LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY
OF
CALIFORNIA

Math.
Stat
Libr.

M W Haskell

THEORIE

DER

TRANSFORMATIONSGRUPPEN

DRITTER UND LETZTER ABSCHNITT

UNTER MITWIRKUNG

VON

PROF. DR. FRIEDRICH ENGEL

BEARBEITET

VON

SOPHUS LIE,

PROFESSOR DER GEOMETRIE AN DER UNIVERSITÄT LEIPZIG.

LEIPZIG

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER

1893

MATH-STAT.

ALLE RECHTE,
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

QA385
L53
v.3
MATH.-
STAT.
LIBRARY

Widmung.

Die neuen Theorien, die in diesem Werke dargestellt sind, habe ich in den Jahren von 1869 bis 1884 entwickelt, wo mir die Liberalität meines

Geburtslandes Norwegen

gestattete, ungestört meine volle Arbeitskraft der Wissenschaft zu widmen, die durch Abels Werke in *Norwegens* wissenschaftlicher Literatur den ersten Platz erhalten hat.

Bei der Durchführung meiner Ideen im Einzelnen und bei ihrer systematischen Darstellung genoss ich seit 1884 in der grössten Ausdehnung die unermüdliche Unterstützung des Professors

Friedrich Engel

meines ausgezeichneten Kollegen an der Universität *Leipzig*.

Das in dieser Weise entstandene Werk widme ich *Frankreichs*

École Normale Supérieure,

deren unsterblicher Schüler Galois zuerst die Bedeutung des Begriffs *discontinuirliche Gruppe* erkannte. Den hervorragenden Lehrern dieses Instituts, besonders den Herren G. Darboux, E. Picard und J. Tannery verdanke ich es, dass die tüchtigsten jungen Mathematiker Frankreichs wetteifernd mit einer Reihe junger *deutscher* Mathematiker meine Untersuchungen über *continuirliche Gruppen,* über *Geometrie* und über *Differentialgleichungen* studiren und mit glänzendem Erfolge verwerthen.

Sophus Lie.

M777310

Vorrede.

Der vorliegende dritte Abschnitt bildet den Schluss des ganzen Werkes. Er zerfällt in sechs Abtheilungen, über deren Inhalt zunächst kurz berichtet werden möge.

In der *ersten* Abtheilung werden alle endlichen continuirlichen Gruppen auf der Geraden und in der Ebene bestimmt und klassificirt, desgleichen alle projectiven Gruppen auf der Geraden und in der Ebene und endlich alle linearen homogenen Gruppen in drei Veränderlichen.

In der *zweiten* Abtheilung werden die endlichen continuirlichen primitiven Gruppen des R_3 vollständig bestimmt. Unter den imprimitiven werden alle die aufgestellt, bei denen eine Schaar von ∞^1 Flächen invariant bleibt, die sich nicht in eine invariante Schaar von ∞^2 Curven zerlegen lässt, und alle die, bei denen eine Schaar von ∞^2 Curven invariant bleibt, die sich nicht in eine invariante Schaar von ∞^1 Flächen zusammenfassen lässt. Endlich wird die Bestimmung der übrigen imprimitiven Gruppen des R_3 skizzirt. Ich habe zwar schon 1878 alle Rechnungen, die zur Bestimmung dieser Gruppen erforderlich sind, durchgeführt, bis jetzt ist es mir aber noch nicht gelungen, diese Rechnungen so übersichtlich anzuordnen, dass mir ihre vollständige Veröffentlichung zweckmässig erschiene.

Die *dritte* Abtheilung enthält die Bestimmung aller primitiven projectiven Gruppen des R_3, ausserdem wird in ihr die Bestimmung aller imprimitiven projectiven Gruppen des R_3 in der Hauptsache zum Abschlusse gebracht, wenn auch einzelne Rechnungen nicht ganz bis zu Ende durchgeführt werden. Von den speciellen Untersuchungen, die in dieser Abtheilung angestellt werden, nenne ich namentlich: die Bestimmung aller Curven und Flächen des R_3, die projective Gruppen mit mehr als zwei Parametern gestatten, und die Aufstellung aller Typen von Untergruppen der projectiven Gruppe eines Kegelschnitts und der projectiven Gruppe einer Fläche zweiten Grades.

Durch die Aufstellung aller Untergruppen der beiden zuletzt genannten Gruppen ist offenbar das Problem erledigt, alle Untergruppen der Gruppe der Euklidischen und der Gruppe der Nichteuklidischen

Bewegungen im R_3 zu bestimmen. Bekanntlich hat Herr Camille Jordan bereits 1868 (s. Ann. di mat. Ser. 2, Bd. 2, S. 167 ff.) alle *reellen* continuirlichen und discontinuirlichen Untergruppen der Gruppe der Euklidischen Bewegungen des R_3 bestimmt. Er benutzt aber dabei eine ganz andre Methode und jedenfalls kommen bei ihm weder das Symbol Xf noch die Gleichungen: $(X_i X_k) = \Sigma c_{iks} X_s f$ vor. Die Bestimmung *aller* continuirlichen Gruppen von Euklidischen und Nicht-euklidischen Bewegungen des R_3 ist erst von mir ausgeführt worden.

Ferner wird durch die Bestimmung aller projectiven Gruppen des R_3 auch die Aufgabe erledigt, alle Typen von Untergruppen der conformen Gruppe des R_4 zu bestimmen. Dieser Zusammenhang wird sogar bei der Bestimmung aller projectiven Gruppen des R_3, die eine Gerade invariant lassen, ausdrücklich verwerthet, es wird nämlich von dem Umstande Gebrauch gemacht, dass die projective Gruppe einer Geraden des R_3 mit der Gruppe der Euklidischen Bewegungen und der Aehnlichkeitstransformationen des R_4 gleichzusammengesetzt ist. Derartige Sätze finden sich bei mir bereits 1871 (Ges. d. Wiss. zu Christiania u. Math. Ann. Bd. 5).

Endlich sind hiermit zugleich alle Untergruppen der grössten Berührungstransformationsgruppe des R_3 bestimmt, bei der Krümmungslinien in Krümmungslinien übergehen. Ich sehe mich veranlasst, ausdrücklich hervorzuheben, dass auch diese wichtigen gruppentheoretischen Untersuchungen schon in den Jahren 1870—71 anfangen. Von meiner Invariantentheorie der Berührungstransformationen ist ebenfalls bereits 1872 eine kurzgefasste Darstellung erschienen, in der alle Hauptresultate angegeben sind (Ges. d. Wiss. zu Christiania 1872).

Derartige Bestimmungen von Gruppen, wie sie in den besprochenen ersten drei Abtheilungen durchgeführt sind, haben an und für sich schon einen hohen Werth; denn wie oft braucht man nicht alle Gruppen oder alle projectiven Gruppen eines Raumes, die gewisse Eigenschaften besitzen, und wie bequem ist es dann, die Gruppen, die man braucht, ohne Weiteres angeben zu können. Hier dienen diese Untersuchungen aber auch noch dazu, die allgemeinen Theorien des Abschnitts I anzuwenden und durch zahlreiche Beispiele zu erläutern. Allerdings wird bei der hier gewählten Art der Darstellung häufig darauf verzichtet, die einzelnen Ergebnisse mit möglichst elementaren Hülfsmitteln abzuleiten; es liegt aber einmal in dem ganzen Plane dieses Werkes, nicht vom Besondern zum Allgemeinen aufzusteigen, sondern umgekehrt so viel wie möglich das Besondre aus dem Allgemeinen abzuleiten.

Ferner haben hier wie auch sonst vielfach in diesem Werke die rein analytischen Entwicklungen im Allgemeinen ein hervorragendes *geometrisches* Interesse. Ueberhaupt hoffe ich, dass meine Gruppentheorie sich für viele Zweige der Mathematik in immer wachsendem Masse fruchtbar erweisen und ihnen eine mehr oder weniger veränderte Gestalt geben wird. Ich denke dabei namentlich an die Geometrie, an die Theorie der Differentialgleichungen, an die Mechanik und endlich auch an die gewöhnliche Cayleysche Invariantentheorie.

Die Principien der Mechanik haben einen gruppentheoretischen Ursprung, die Integrationstheorien der Mechanik liefern eines der schönsten Beispiele zu meinen Theorien. Die Kinematik und ihre Sätze ordnen sich zum Theil als ganz specielle Fälle unter meine allgemeinen Sätze. Meine Untersuchungen über die geodätischen Curven und über das allgemeine Aequivalenzproblem in der Theorie der Differentialgleichungen zeigen, nach welchen Principien man die Mechanik erfolgreich behandeln kann. Die Mathematiker, die hieran angeknüpft haben, es sind die Herren Painlevé, Staude und Stäckel, werden zweifellos zu den schönsten Resultaten gelangen, sobald sie tiefer in meine allgemeinen Theorien eingedrungen sein werden. Selbst für die Optik und überhaupt die mathematische Physik erscheinen meine Ideen fruchtbar.

Die gewöhnliche Cayleysche Invariantentheorie wird, wie ich glaube, durch meine Theorien auf einfachere und allgemeinere Principien zurückgeführt und zugleich auf beliebige Gruppen ausgedehnt. Ich nenne hier nur meine oben erwähnten Untersuchungen über Curven und Flächen des R_3, die infinitesimale projective Transformationen gestatten. Diese Untersuchungen, die überhaupt *zahlreiche Anwendungen* gestatten, haben besonders für die gewöhnliche Invariantentheorie ein hervorragendes Interesse.

Man unterscheidet da zwischen *allgemeinen* und speciellen — sagen wir *singulären* Formen. Eine Form n-ten Grades a_x^n in m Veränderlichen ist dann und nur dann singulär, wenn die Mannigfaltigkeit des R_{m-1}, die durch die Gleichung: $a_x^n = 0$ dargestellt wird, eine infinitesimale projective Transformation des R_{m-1} gestattet oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn die Form a_x^n selbst eine lineare homogene infinitesimale Transformation gestattet. Es ist nun schwer zu verstehen, warum die Invariantentheoretiker nicht schon längst auch nur alle singulären quaternären Formen bestimmt haben, denn die Invariantentheorie dieser Formen ist doch eine andre als die der allgemeinen quaternären Formen. Vielleicht liegt das aber daran, dass die Invari-

antentheoretiker als reine Algebraiker eine gewisse Scheu vor dem Transcendenten gehabt haben.

Dieser Lücke in der Formentheorie*) entspricht in der Krümmungstheorie eine ganz ähnliche Lücke. In der Krümmungstheorie ist bisher die Frage nach den Bedingungen für die Congruenz *imaginärer* Flächen und Curven überhaupt noch gar nicht behandelt worden, zum Beispiel hat man für die Curven von der Länge Null im gewöhnlichen Raume noch nicht einmal die Begriffe entwickelt, die an Stelle der illusorisch werdenden Krümmungen eingeführt werden müssen. Alles das zeigt auf das Schlagendste, wie unvollständig die bisherige Invariantentheorie und die bisherige Krümmungstheorie vom gruppentheoretischen Standpunkte aus sind.

Nach dieser Abschweifung wende ich mich wieder zur Fortsetzung der Inhaltsangabe.

Die *vierte* Abtheilung behandelt eine Reihe ganz besonders wichtiger Kategorien von Gruppen. In dem ersten Kapitel der Abtheilung werden zum Beispiel alle Gruppen in möglichst wenig Veränderlichen aufgestellt, die entweder mit der allgemeinen projectiven oder mit der allgemeinen linearen oder mit der speciellen linearen Gruppe des R_n gleichzusammengesetzt sind. In dem zweiten Kapitel werden die primitiven projectiven Gruppen des R_n untersucht, die Verallgemeinerungen der primitiven projectiven Gruppen des R_3 sind, und es wird gezeigt, dass keine dieser Gruppen durch eine nichtprojective Punkttransformation des R_n wieder in eine projective Gruppe übergeführt werden kann.

Schon im ersten Abschnitt sind alle endlichen continuirlichen Gruppen des R_n bestimmt, die möglichst grosse Transitivität im Infinitesimalen besitzen, und es wird darauf auch eine Bestimmung aller endlichen continuirlichen Gruppen des R_n gegründet, die möglichste Transitivität im Endlichen besitzen. Das damals über diese letzteren Gruppen angegebene Resultat ist richtig, aber es wird aus dem über die ersteren Gruppen bewiesenen Satze durch einen Gränzübergang abgeleitet, dessen Berechtigung keineswegs von vornherein klar ist. Theils die Wichtigkeit dieser Resultate, theils systematische Gründe

*) Merkwürdigerweise wird diese Lücke vielfach gar nicht empfunden. Wenn übrigens Herr Maurer behauptet (Münchn. Ber. 1888, S. 104), Herr Christoffel habe streng bewiesen, dass für die Aequivalenz zweier algebraischer Formen durch lineare Substitution die Gleichheit ihrer absoluten Invarianten sowohl erforderlich als hinreichend sei, so ist zu bemerken, dass sich Herr Christoffel bei seinem Beweis ausdrücklich auf *allgemeine* Formen beschränkt.

liessen es daher richtig erscheinen, eine neue Begründung der betreffenden Sätze zu liefern, wobei gleichzeitig noch andre wichtige Sätze abgeleitet werden konnten. Diesem Zwecke ist das dritte Kapitel der Abtheilung gewidmet.

Das vierte und das fünfte Kapitel der Abtheilung handeln von den continuirlichen Gruppen des R_n $(n>2)$, bei denen eine Differentialgleichung zweiten Grades von der Form:

$$\sum_{iv}^{1\ldots n} f_{iv}(x_1 \ldots x_n) dx_i dx_v = 0$$

invariant bleibt und bei denen ausserdem in einem gewissen Sinne möglichst grosse freie Beweglichkeit im Infinitesimalen stattfindet. Ein *specieller* Fall dieser Aufgabe ist schon von Riemann behandelt worden, denn Riemann sucht im Grunde alle derartigen Gruppen, bei denen nicht blos eine solche Gleichung sondern auch die quadratische Form: $\Sigma f_{iv} dx_i dx_v$ selbst invariant bleibt. Riemann findet die Gruppe der Euklidischen und die Gruppe der Nichteuklidischen Bewegungen im R_n, ich finde ausserdem die Gruppe der Aehnlichkeitstransformationen und die Gruppe der reciproken Radien. Diese meine Untersuchungen, die zuerst 1885 veröffentlicht sind, gehen also wesentlich weiter als die Riemanns, sie liefern aber zugleich eine neue Begründung der von Riemann ohne Beweis angegebenen Resultate, deren Richtigkeit zuerst von den Herren Christoffel und Lipschitz bestätigt worden ist. Herr Killing, der meine betreffende Arbeit von 1885 kennt, hat es passend gefunden, meine Behandlung des Problems ohne wesentliche Aenderung wiederzugeben.

Das letzte Kapitel dieser Abtheilung bespricht kurz, wie sich die Begriffe der Gruppentheorie für *reelle analytische* Gruppen gestalten und inwieweit sich die allgemeinen Sätze der Theorie auf *reelle nichtanalytische* Gruppen ausdehnen lassen. Die Theorie der reellen nichtanalytischen Gruppen wird durch den Satz beherrscht, dass jede *transitive* reelle nichtanalytische Gruppe, bei der gewisse Differentialquotienten existiren, durch eine reelle Transformation in eine reelle analytische Gruppe überführbar ist. Ich habe diesen Satz bereits 1888 veröffentlicht (Leipz. Ber. 1888, S. 17) und habe später (ebd. 1890, S. 360 ff.) auch die Hülfsmittel, die zum Beweise dieses Satzes genügen, angedeutet. Erwähnen will ich noch, dass in dem in Rede stehenden Kapitel gezeigt wird, wie sich die oben besprochene Theorie der Gruppen, die eine Differentialgleichung zweiten Grades invariant lassen, gestaltet, wenn man sich auf reelle Gruppen beschränkt.

Die *fünfte* Abtheilung beschäftigt sich mit den Grundlagen der Geometrie.

In den Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie spielen neben Euklid, der immer die erste Stelle behaupten wird, besonders die Namen Lobatschewski und Riemann eine grosse Rolle, vor allen Dingen aber der Name Riemann. Zwischen Lobatschewski und Riemann besteht jedoch ein wesentlicher Unterschied. Während Lobatschewski nur das Werk Euklids fortsetzen und gewissermassen ein zweiter Euklid sein wollte, schlug Riemann einen ganz andern Weg ein, indem er den Raum als Zahlenmannigfaltigkeit auffasste und auf diese Zahlenmannigfaltigkeit die ganze Analysis anwendete.

Für Euklid existirt der allgemeine Zahlbegriff, also namentlich die irrationale Zahl nicht von vornherein. Bei ihm hat die Geometrie mehrere Stufen, deren erste jedenfalls vom Parallelenaxiom und von dem allgemeinen Grössenbegriff unabhängig ist.

Auf dieser ersten Stufe setzt Euklid gewisse Begriffe wie Raum, Fläche, Curve, Punkt, Gerade, Ebene und gewisse Eigenschaften dieser Begriffe voraus. Ferner postulirt er u. A. den Begriff Bewegung und die Begriffe: Entfernung und Winkel, also gewisse Invarianten der Bewegungen. Diese Begriffe und ihre Eigenschaften, die er postulirt, reichen zum Aufbau der ersten Stufe seiner Geometrie aus. Nunmehr erst führt er das Parallelenaxiom ein und zieht die Folgerungen, die sich daraus ergeben. Endlich führt er den allgemeinen Grössenbegriff ein und zwar ist zu bemerken, dass seine Einführung der Grössenbegriffe: Flächenraum und Bogenlänge im Grunde auf gewissen Axiomen beruht.

Euklids Nachfolger versuchten während einer langen Reihe von Jahrhunderten das System Euklids zu verbessern, namentlich das Parallelenaxiom zu vermeiden. Nicht ohne Interesse sind insbesondere gewisse Untersuchungen, die im vorigen Jahrhundert angestellt worden sind und die man erst in neuester Zeit wieder entdeckt hat. Mehrere Mathematiker, so der von Herrn Beltrami entdeckte Saccheri (1733) und andrerseits Lambert in einer von Herrn Stäckel entdeckten Arbeit*) hatten erkannt, dass von vornherein drei Möglichkeiten denkbar sind. Errichtet man auf einer Geraden in den beiden Punkten

*) Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik Bd. I, 1786. Die Lambertsche Arbeit, die nach Lamberts Tode von Bernoulli herausgegeben worden ist, ist schon im September 1766 aufgesetzt.

A und B zwei gleich lange Lothe AC und BD nach derselben Seite hin, so hat man zwischen den drei Hypothesen:

$$CD \gtreqless AB$$

die Wahl. Man versuchte nun aus jeder dieser drei Hypothesen die Consequenzen zu ziehen. Insbesondere folgert Lambert aus der ersten und der dritten Hypothese, dass der Unterschied zwischen der Winkelsumme eines Dreiecks und zwischen zwei Rechten proportional dem Flächeninhalte des Dreiecks sei, und er hebt ausdrücklich hervor, dass man, sobald die erste Hypothese angenommen werde, für jede Strecke ein absolutes Mass habe und dass es dann keine ähnlichen Figuren mehr gebe. Lambert fügt noch hinzu, dass die dritte Hypothese auf der Kugel verwirklicht sei, und spricht sogar die Vermuthung aus, dass die erste Hypothese bei einer imaginären Kugelfläche vorkomme.

Obgleich nun hiernach Lambert im Grunde bereits die Riemannsche Geometrie auf der Ebene besass*), so kommt er schliesslich durch Ueberlegungen, deren Unzulänglichkeit schon Hindenburg erkannt hat, zu dem Ergebnisse, dass nur die Hypothese: $CD = AB$ zulässig sei.

Lobatschewski war, wie es scheint, der erste, der kühn *behauptete*, dass die Hypothese: $CD > AB$ zu einer vernünftigen, in sich abgeschlossenen Geometrie führe und zwar nicht blos in der Ebene sondern auch im gewöhnlichen Raume. Ob jedoch Lobatschewski einen fehlerfreien Beweis für diese Behauptung geliefert hat, das wage ich nicht zu entscheiden, dazu kenne ich die Lobatschewskischen Untersuchungen nicht genau genug, zumal diese Untersuchungen nur zum Theil in deutscher oder französischer Sprache veröffentlicht sind. Jedenfalls ist aber seine Nichteuklidische Geometrie richtig, das haben die späteren Untersuchungen von Riemann und von Herrn Beltrami gezeigt, aus denen z. B. hervorgeht, dass die Lobatschewskische Geometrie der Ebene auf gewissen Mannigfaltigkeiten des Euklidischen Raumes verwirklicht ist.

Riemann fasst den Raum als eine Zahlenmannigfaltigkeit auf, was übrigens Grassmann im Grunde schon 1844 gethan hatte, er setzt aber ausserdem noch die ganze Analysis als bekannt voraus. Er betrachtet, wenn auch nur implicite, Transformationen dieser Mannigfaltigkeit und fordert, dass bei diesen Transformationen eine beständig positive quadratische Form der Differentiale invariant bleibe. Aus-

*) Hierdurch erledigt sich die auf S. 394 gemachte Bemerkung, die geschrieben ist, bevor wir mit der Lambertschen Arbeit bekannt waren.

gehend von derartigen, allerdings nicht scharf formulirten Axiomen gelangt er zum Begriff der geodätischen Linie und wird durch eine äusserst geniale Anwendung der Gaussschen Theorie des Krümmungsmasses auf drei verschiedene Geometrien geführt, nämlich auf die Euklidische, auf die, die man gewöhnlich als die Lobatschewskische bezeichnet und auf eine dritte, der man den Namen Riemannsche Geometrie gegeben hat.

Riemanns geniales Gebände liegt nur in einer ziemlich knappen Skizze vor und enthält in dieser Form nicht blos Lücken sondern auch andre Mängel. Er hat aber jedenfalls gezeigt, dass es für $n > 1$ immer n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten giebt, die im Riemannschen Sinne constantes Krümmungsmass besitzen und deren Krümmungsmass einen beliebigen positiven oder negativen Werth hat. Er hat auch bemerkt, dass die Existenz von n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten mit constantem positivem Riemannschem Krümmungsmasse durch die Kugel des $(n + 1)$-fach ausgedehnten Euklidischen Raumes von vornherein sicher gestellt ist.

Ein einfaches Bild einer Mannigfaltigkeit mit constantem negativem Riemannschem Krümmungsmasse hat Herr Beltrami gegeben, indem er zeigte, dass für $n = 3$ eine solche Mannigfaltigkeit auf das Innere einer reellen nichtgeradlinigen Fläche zweiten Grades im R_3 abgebildet werden kann. In dieser Verbindung erinnere ich überdies noch an die Cayleysche projective Massbestimmung. Soweit ich es übersehe, liegt das Verdienst der damit zusammenhängenden Untersuchungen des Herrn F. Klein über Nichteuklidische Geometrie wesentlich darin, dass in ihnen die Resultate seiner Vorgänger *popularisirt* werden. Klein verwerthet dabei die von mir herrührenden Begriffe infinitesimale Transformation und eingliedrige Gruppe.

Riemann fasst, wenn auch nur *implicite*, die Bewegungen des Raumes als Transformationen auf, die eine Gruppe bilden, und versucht, so können wir es ausdrücken, diese Gruppe durch einfache Eigenschaften zu charakterisiren. Herr v. Helmholtz hat versucht, in dieser Richtung weiter zu gehen, man kann aber leider nicht sagen, dass dieser sein Versuch, der allerdings viel Interesse hat, gelungen sei, denn seine mathematischen Betrachtungen beruhen auf falschen Voraussetzungen. Wenn ich nicht irre, ist es mir gelungen, das von Riemann implicite gestellte und von Herrn v. Helmholtz behandelte, aber nicht erledigte Problem vollständig zu erledigen. Das Nähere wird man in den Kapiteln 21, 22 und 23 finden.

In den Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie, die von den Herren v. Helmholtz, de Tilly, F. Klein, Lindemann

und Killing angestellt worden sind, finden sich eine Reihe von groben Fehlern, die im letzten Grunde darauf beruhen, dass die Verfasser dieser Untersuchungen entweder gar keine oder nur sehr mangelhafte gruppentheoretische Kenntnisse besassen. Da diese Fehler zum Theile recht lehrreich sind, wird in der Abtheilung über die Grundlagen der Geometrie ausführlich auf sie eingegangen. Was insbesondre Herrn Lindemann anbetrifft, so vergleiche man noch den Schluss von § 146. Allerdings wird die Beurtheilung aller dieser Arbeiten durch den Mangel an Präcision des Ausdrucks, der sich in ihnen bemerklich macht, sehr erschwert.

Die *sechste* und letzte Abtheilung enthält eine Anzahl äusserst wichtiger allgemeiner Untersuchungen über endliche continuirliche Gruppen.

Kapitel 25 beschäftigt sich mit den Fundamentalsätzen der Gruppentheorie. Es handelt sich dabei darum, die diesen Sätzen und ihren Beweisen zu Grunde liegenden Gedanken schärfer hervortreten zu lassen; ausserdem werden noch ähnliche allgemeine Sätze aufgestellt, die geeignet sind, auf die Grundbegriffe und die grundlegenden Sätze neues Licht zu werfen. Dabei wird auch der Versuch berührt, der von andrer Seite gemacht worden ist, eine neue und einfachere Begründung meiner Fundamentalsätze zu liefern.

Ich kann nicht anerkennen, dass Herr Schur eine wirklich einfachere Begründung meiner Fundamentalsätze geliefert hat. Abgesehen davon, dass Herr Schur sich von vornherein auf einen viel specielleren Standpunkt stellt als ich, beruhen auch die Vereinfachungen, die er an einigen Stellen anscheinend erreicht, darauf, dass er nur gewisse Theile meiner betreffenden Sätze beweist; auf diese Weise lassen sich natürlich fast immer Abkürzungen der Beweise erzielen. Hiermit beabsichtige ich aber keineswegs zu leugnen, dass auch diese Untersuchungen des Herrn Schur ihren Werth haben, ganz abgesehen von den wirklich neuen Resultaten, die Herr Schur sonst gefunden hat und die hierbei gar nicht in Frage kommen. In allen Schurschen Arbeiten über Gruppentheorie findet man Gewissenhaftigkeit und Ernst, Eigenschaften, die man leider in zu vielen Arbeiten vermisst, die doch mit grossen Ansprüchen hervortreten.

Das 26. Kapitel zeigt, wie man eine r-gliedrige Gruppe mit bekannten endlichen Gleichungen auf die kanonische Form bringen kann, die durch die infinitesimalen Transformationen der Gruppe bestimmt

ist; es stellt sich heraus, dass dazu an Integrationen höchstens Quadraturen erforderlich sind.

In Kapitel 27 wird das Problem, alle r-gliedrigen transitiven Gruppen von gegebener Zusammensetzung zu bestimmen, von Neuem aufgenommen und die in Abschn. I gegebene Erledigung dieses Problems wird vervollständigt. Es wird gezeigt, dass die Integrationen, die nach Abschn. I zur Erledigung des Problems erforderlich waren, im ungünstigsten Falle auf Quadraturen hinauskommen.

Kapitel 28 handelt über die Theorie der Zusammensetzung. Diese äusserst wichtige Theorie bildet eigentlich den Ausgangspunkt meiner allgemeinen Untersuchungen über endliche continuirliche Gruppen und ich habe auch eine grosse Anzahl wichtiger Ergebnisse über die Theorie der Zusammensetzung erhalten. Diese Ergebnisse, die namentlich für die Anwendung der Gruppentheorie von der grössten Bedeutung sind, werden in Kapitel 28 ziemlich vollständig dargestellt. Ueber die wesentlich weitergehenden Resultate, die in neuerer Zeit von andrer Seite erreicht worden sind, wird im Schlusskapitel ziemlich ausführlich berichtet.

Meine Untersuchungen über Transformationsgruppen waren schon 1884 zum Abschluss gebracht und sind später nur noch in Einzelheiten vervollständigt worden.

Seit 1884 sind nun eine Reihe gruppentheoretischer Untersuchungen auch von andrer Seite ausgeführt worden. Verschiedene von diesen Arbeiten haben einen *rein gruppentheoretischen* Charakter und zwar sind diese, soweit sie sich auf *endliche* continuirliche Gruppen beziehen, meistens von deutschen Forschern ausgeführt worden. Ich nenne hier: Engel, Killing, Study, Schur, Scheffers, Maurer, ferner Page (Amerikaner), Werner, Umlauf und Knothe und von Franzosen: de Tannenberg, Tresse und Cartan. Diese Arbeiten werden in Kapitel 29 kurz besprochen. Andre Arbeiten von Engel und Żorawski einerseits und von Picard und Tresse andrerseits beschäftigen sich mit unendlichen continuirlichen Gruppen, sie können deshalb in diesem Werke nicht näher besprochen werden.

Noch andre, zum Theil ausserordentlich wichtige Arbeiten wenden die Theorie der *endlichen* continuirlichen Gruppen auf Differentialgleichungen an. Hier stehen die Herren Picard und Vessiot in erster Linie, ihnen folgen Appell, Painlevé und viele andre Franzosen. Alle diese Arbeiten ebenso wie die eben erwähnten über unendliche Gruppen können aber erst in dem besondern Werke berücksichtigt werden, das ich, wieder mit Engels Unterstützung, über Differential-

invarianten, unendliche Gruppen und Integrationstheorie abzufassen gedenke.

Noch weniger kann natürlich auf die zahlreichen aber meistens trivialen Arbeiten eingegangen werden, in denen seit 1885 nach Sylvesters Vorgang Differentialinvarianten für eine Anzahl specieller Gruppen aufgestellt worden sind.

Den Schluss des Werkes bildet ein Sachregister zu allen drei Abschnitten, das Herr Prof. Engel bearbeitet hat.

Bei dem Abschlusse eines so umfangreichen Werkes, wie es das vorliegende ist, fühle ich das Bedürfniss noch einmal in grossen Zügen die Gesichtspunkte zu kennzeichnen, die bei meinem ganzen wissenschaftlichen Wirken massgebend gewesen sind, und einige Perspectiven für die Zukunft zu eröffnen.

Der Begriff der *Transformation* ist aus der Geometrie hervorgegangen. Die *Projection* ist die älteste Transformation, sie tritt schon bei den alten Griechen auf, wurde aber systematisch zuerst von dem grossen Geometer Poncelet verwerthet; erst später bemächtigte sich ihrer die Analysis und schuf die Theorie der *projectiven* und der *linearen homogenen Transformationen.* Auch die *Transformation durch reciproke Radien* tritt zuerst bei den Geometern auf, obwohl allerdings ein Physiker, W. Thomson der erste war, der ihre grosse Wichtigkeit erkannt hat. Die Geometrie hat ferner das Princip der Dualität und die Lehre von der Transformation durch reciproke Polaren entwickelt; schon Legendre benutzte diese Transformation in der Theorie der *Minimalflächen,* Poncelet und Gergonne zeigten ihre ausserordentliche Tragweite, während Plücker die dieser Transformation zu Grunde liegende Idee in ihrer wahren Allgemeinheit entwickelte und folgerichtig durchführte.

Auch mir ist die Bedeutung des Begriffs der *Transformation* zuerst in der *Geometrie* klar geworden. Indem ich Plückers Ideen über Wechsel des Raumelements weiter verfolgte, gelangte ich schon 1868 zu dem allgemeinen Begriffe der Berührungstransformation*). Dieser Begriff führte mich unter Anderm zu einem merkwürdigen Zusammenhang zwischen projectiver und metrischer Geometrie; es zeigte sich, dass die Untersuchung solcher Beziehungen, *die bei projectiven Transformationen ungeändert bleiben,* gleichbedeutend ist mit der Unter-

*) Ampères und Jacobis schöne Vorarbeiten waren mir damals noch unbekannt; aber Ampère betrachtet nur eine specielle Klasse von Berührungstransformationen und Jacobis allgemeine Definition ist unrichtig.

suchung der Beziehungen, *die bei einer gewissen Kategorie von Berührungstransformationen invariant bleiben*, einer Kategorie, die die metrische Geometrie beherrscht*).

Sehr bald erkannte ich auch die hohe Bedeutung, *die der Begriff der Transformation für die Analysis hat.* Ich bemerkte (1870—71), dass die bisherigen klassischen Integrationstheorien sich immer auf solche Differentialgleichungen beziehen, die gewisse bekannte Gruppen von Transformationen gestatten. Im Frühling 1872 fand ich, dass sich die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung als eine Transformationstheorie auffassen lässt, mein Ausgangspunkt dabei war die Einführung des Begriffs der *infinitesimalen Berührungstransformation.* In demselben Jahre 1872 entwickelte ich eine vollständige Invariantentheorie der unendlichen Gruppe aller Berührungstransformationen und löste das Aequivalenzproblem für Ausdrücke *erster* Ordnung gegenüber dieser Gruppe vollständig. Ich beschränkte mich aber nicht auf diese Gruppe sondern behandelte schon 1872—73 gewisse von ihren unendlichen Untergruppen — meine Functionengruppen — und entwickelte für jede derartige Gruppe eine vollständige Invariantentheorie.

Andrerseits entwickelte ich in den Jahren 1870—74 den Begriff der *endlichen continuirlichen Gruppe* und erkannte seine weitreichende Bedeutung für die Geometrie und für die Theorie der Differentialgleichungen. Schon 1870—72 verwerthete ich die endlichen continuirlichen Gruppen für die Integrationstheorie und bereits 1872 deutete ich eine Invariantentheorie *der unendlichen Gruppe aller Punkttransformationen* an.

So traten für mich die Begriffe *Transformation* und *Transformationsgruppe* immer mehr in den Vordergrund und ich entwickelte nach und nach eine allgemeine *Transformationstheorie***).

F. Klein, dem ich im Laufe dieser Jahre alle diese meine Ideen mittheilte, wurde dadurch veranlasst, ähnliche Gesichtspunkte für die *discontinuirlichen* Gruppen zu entwickeln. In seinem Erlanger Programm, wo er über seine und über meine Ideen berichtet, spricht er überdies

*) Diese Ideen habe ich bereits 1871 deutlich ausgesprochen (Ges. d. Wiss. zu Christiania).

**) Cartesius deutete zuerst die *Gleichung:* $y = f(x)$ als eine Curve (und die Gleichung: $z = f(x, y)$ als eine Fläche). Die neuere Mathematik deutet ein *Gleichungensystem* wie zum Beispiel dieses: $x_1 = f(x, y)$, $y_1 = \varphi(x, y)$ als eine Transformation. Die Functionentheorie betrachtet die Gleichung: $x_1 + iy_1 = f(x + iy)$ als Bestimmungsgleichung einer conformen Transformation. Die Untersuchung *der Transformationen an sich* ist daher ein Schritt analog dem Schritte, den Cartesius that, als er den Coordinatenbegriff einführte.

noch von Gruppen, die nach meiner Terminologie weder continuirlich noch discontinuirlich sind, zum Beispiel spricht er von der Gruppe aller Cremonaschen Transformationen und von der Gruppe der Verzerrungen. Dass ein Wesensunterschied zwischen diesen Arten von Gruppen und den von mir sogenannten continuirlichen Gruppen besteht, *dass sich nämlich meine continuirlichen Gruppen durch Differentialgleichungen definiren lassen, während das bei jenen Gruppen nicht der Fall ist,* das war ihm offenbar vollständig entgangen. Auch von dem so wichtigen Begriffe der Differentialinvariante findet sich in dem Kleinschen Programme fast keine Spur. Klein hat an diesem Begriffe, auf den sich erst eine *allgemeine* Invariantentheorie begründen lässt, keinen Antheil, und er hat erst von mir gelernt, dass jede durch Differentialgleichungen definirte Gruppe Differentialinvarianten bestimmt, die durch Integration von vollständigen Systemen gefunden werden können.

Ich sehe mich hier zu diesen Auseinandersetzungen veranlasst, weil Kleins Schüler und Freunde wiederholt das gegenseitige Verhältniss zwischen Kleins und meinen Arbeiten falsch dargestellt haben und weil andrerseits einige Bemerkungen, mit denen Klein die Neudrucke seines interessanten Programms in bis jetzt vier verschiedenen Zeitschriften*) begleitet hat, unrichtig aufgefasst werden könnten. Ich bin kein Schüler von Klein, das Umgekehrte ist auch nicht der Fall, wenn es auch vielleicht der Wahrheit näher käme.

Indem ich alles das hier zur Sprache bringe, denke ich selbstverständlich nicht daran, an Kleins originaler Production innerhalb der Theorie der algebraischen Gleichungen und der Functionentheorie Kritik zu üben. Ich schätze Kleins Talente hoch, und werde nie die Theilnahme vergessen, mit der er von jeher meine wissenschaftlichen Bestrebungen begleitet hat, aber ich glaube, dass er z. B. nicht genug zwischen Induction und Beweis, zwischen der Einführung eines Begriffs und seiner Verwerthung unterscheidet.

Das vorliegende Werk liefert eine rein abstracte Theorie der endlichen continuirlichen Gruppen. Später sollen zwei andre Werke folgen, in denen mehr die Anwendungen der Gruppentheorie in den Vordergrund treten werden. Das eine dieser Werke, das ich wieder mit der Unterstützung von Prof. Engel zu bearbeiten gedenke, wird eine selbständige Theorie der Differentialinvarianten geben und darauf

*) Annali di matem.; Annales de l'École Normale; Math. Ann.; Bulletin of the New York math. society.

die Theorie der unendlichen continuirlichen Gruppen begründen. Auf diesem Wege wird sich zu gleicher Zeit eine *neue* Begründung der Theorie der endlichen continuirlichen Gruppen ergeben. Ausserdem soll dieses Werk aber noch die Anwendung der Gruppentheorie auf die Integration der Differentialgleichungen enthalten. Das zweite Werk, bei dessen Abfassung mich Herr Dr. Scheffers unterstützen wird, soll der Geometrie gewidmet sein. Ich gedenke darin eine ausführliche Darstellung meiner sämmtlichen geometrischen Untersuchungen zu geben, die sich ebenfalls vielfach auf Gruppentheorie, auf die Theorie der Berührungstransformationen und auf Differentialgleichungen beziehen.

Hier will ich nur kurz die Gesichtspunkte angeben, die bei der Abfassung des ersten der beiden geplanten Werke massgebend sein werden.

Zuerst soll in diesem Werke die Theorie der Differentialinvarianten vollständig entwickelt werden, das heisst also die allgemeine Invariantentheorie beliebiger continuirlicher Gruppen.

Derartige Invariantentheorien sind im Laufe der Zeit schon eine ganze Reihe entwickelt worden.

Die Euler-Mongesche Krümmungstheorie ist nichts andres als eine Theorie der Differentialinvarianten bei der Gruppe aller *Bewegungen*. Diese Auffassung, die von mir herrührt, tritt wohl erst in meinen Arbeiten aus dem Jahre 1883 hervor. Bald darauf, 1884 zeigte ich auch, dass die Gauss-Mindingsche Deformationstheorie die Invariantentheorie einer gewissen unendlichen continuirlichen Gruppe ist. Es sind das wohl die beiden ersten Invariantentheorien continuirlicher Gruppen*).

Die dritte Invariantentheorie ist die der linearen Gruppe, die von Cayley begründet worden ist, nachdem sie durch Arbeiten von Cauchy, Jacobi, Eisenstein, Hesse und Boole vorbereitet war. Auch in ihr spielen Differentialinvarianten ein Rolle, denn alle die Differentiationsoperationen, durch die man zum Beispiel aus Invarianten neue Invarianten erhält, sind nichts andres als Differentialinvarianten gegenüber gewissen Gruppen, die in sehr einfacher Weise aus der linearen homogenen Gruppe gebildet werden können.

Die Untersuchungen von Riemann und die daran anknüpfenden von Christoffel und Lipschitz (1870) sind eine Ausdehnung der Gauss-Mindingschen Invariantentheorie auf n Dimensionen.

Die vierte Invariantentheorie ist meine 1870—1874 veröffentlichte

*) Für discontinuirliche Gruppen sind zwei Invariantentheorien entwickelt worden, die eine in der Theorie der algebraischen Gleichungen von Lagrange und Galois, die andre in der Zahlentheorie von Gauss und seinen Nachfolgern.

Invariantentheorie der unendlichen Gruppe aller Berührungstransformationen und gewisser in ihr enthaltener unendlicher Untergruppen.

Die fünfte ist die Invariantentheorie der unendlichen Gruppen aller Punkttransformationen, die ich in den Jahren 1872—1878 skizzirte. Ich denke dabei hauptsächlich an meine Theorie der Aehnlichkeit endlicher continuirlicher Gruppen und an meine Integrationstheorie eines vollständigen Systems mit bekannten infinitesimalen Transformationen.

In den Jahren 1879—83 entwickelten Laguerre und Halphen*) eine äusserst wichtige Theorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen, die sich als die Invariantentheorie einer gewissen unendlichen Gruppe auffassen lässt, die sechste in der Reihe.

Endlich habe ich in den Jahren 1883—84 eine allgemeine Invariantentheorie für alle Gruppen entwickelt, die sich durch Differentialgleichungen definiren lassen. Ich habe bei dieser Gelegenheit auch gezeigt, dass der Begriff *Differentialparameter*, den Lamé und Beltrami in speciellen Fällen eingeführt hatten, *auf alle continuirlichen Gruppen ausgedehnt werden kann* und dass jeder Differentialparameter eine Differentialinvariante einer gewissen erweiterten Gruppe ist.

Es ist klar, dass diese meine Invariantentheorie aller continuirlichen Gruppen alle vorher besprochenen Invariantentheorien umfasst. Es wird sich daher in dem geplanten Werke darum handeln, diese Theorie vollständig und in grösster Allgemeinheit zu entwickeln. In Verbindung damit wird zugleich eine umfassende Theorie aller continuirlichen Gruppen gegeben werden, die sich durch Differentialgleichungen definiren lassen, eine Theorie, bei der die endlichen und die unendlichen continuirlichen Gruppen als wesentlich gleichberechtigt erscheinen. Daran wird sich anschliessen eine vollständige Erledigung des Aequivalenzproblems für alle diese continuirlichen Gruppen.

Es bleibt mir jetzt noch zu zeigen, in welchem Sinne die Theorie der Differentialgleichungen in dem geplanten Werke behandelt werden soll.

*) Halphen hat den Versuch gemacht, einen Gruppenbegriff aufzustellen, der von dem meinigen verschieden ist, sein Gruppenbegriff ist aber trivial und hat auch noch nirgends Anwendung gefunden. — Schon in den Jahren 1870—74 lenkte ich wiederholt die Aufmerksamkeit auf Differentialgleichungen, die Gruppen gestatten, und entwickelte unter Anderm eine Reihe von fundamentalen Sätzen über *die Differentialgleichungen, die bei einer endlichen continuirlichen Gruppe der Ebene invariant bleiben.* Hieran schliessen sich als *Ausführungen* für specielle Gruppen die Untersuchungen Halphens über die Differentialinvarianten der projectiven Gruppe.

Hauptaufgabe der Mathematik ist, unbekannte Dinge aus bekannten Eigenschaften zu bestimmen. Diese Eigenschaften sind *meistens* durch Gleichungen ausdrückbar, in denen entweder nur die unbekannten Grössen selbst oder auch ihre Differentialquotienten vorkommen.

Im ersten Falle hat man das Problem der Auflösung der Gleichungen, unter Anderm der Auflösung einer *algebraischen* Gleichung mit einer Unbekannten. Im zweiten Falle hat man das Problem der Integration von Differentialgleichungen.

Galois war der erste, der vollkommen klar erkannte, wie ausserordentlich wichtig die Begriffe *Substitutionengruppe* und *Invariante einer discontinuirlichen Gruppe* für die Behandlung von Problemen jener ersten Art sind. Die Bedeutung des Begriffs *continuirliche Gruppe* für die Lehre von den Differentialgleichungen und den Zusammenhang dieses Begriffs mit den Begriffen: *Invariante*, *Differentialinvariante* und *Differentialparameter* habe ich entdeckt.

Die Lehre von den Differentialgleichungen stützt sich in erster Linie auf die Functionentheorie. Diese liefert die Beweise für die Existenz der Lösungen und untersucht die einfachsten Abhängigkeiten, die durch Differentialgleichungen definirt sind, zum Beispiel untersucht sie die Functionen, die durch Integrale über algebraische Functionen und durch die Umkehrung dieser Integrale entstehen.

Auf diese Weise gelangt man zu Functionenklassen. Will man nun etwa eine gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung zwischen x und y integriren, so kann man fragen, ob y als Function von x einer der so gewonnenen Functionenklassen angehört. Das ist die rein functionentheoretische Behandlungsweise. Man kann aber auch fragen, ob es möglich ist, an Stelle von x und y solche neue Veränderliche x und y einzuführen, dass die vorgelegte Differentialgleichung eine Form erhält, die man mit Hülfe bekannter Functionenklassen integriren kann. Diese Frage ist es, die bei meinen Untersuchungen über Differentialgleichungen bestimmend gewesen ist.

Zum Beispiel beruht für mich die Integrationstheorie einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$f(z, x_1 \ldots x_n, p_1 \ldots p_n) = 0$$

einfach auf dem Satze, dass jede solche Gleichung durch eine Berührungstransformation die Gestalt: $p_1 = 0$ erhalten kann.

Ferner bemerkte ich, dass Monges ursprüngliche Integrationstheorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung nur bei solchen Gleichungen zum Ziele führt, die sich durch eine Berührungstransformation entweder auf die Form: $r = 0$ oder auf die Form: $s = 0$ bringen lassen. Auf diese Bemerkung gründete ich neue schöne

Integrationstheorien, indem ich zuerst fragte, ob die vorgelegte Gleichung etwa die Form: $s = 0$ erhalten konnte; war das möglich, so war es vortheilhaft, die betreffende Transformation aufzusuchen.

So muss man nun überhaupt zum Beispiel in der Lehre von den partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung erstens nach integrabeln Formen suchen und zweitens die Kriterien bestimmen, an denen man erkennen kann, ob vorgelegte Differentialgleichungen auf integrable Formen zurückführbar sind, und endlich drittens, wenn sie es sind, allgemeine Methoden für diese Zurückführung entwickeln.

Bei der *Aufsuchung der besprochenen Kriterien*, die nebenbei bemerkt durch die Theorie der Differentialinvarianten geliefert werden, handelt es sich in erster Linie darum, ob die betreffende integrable Form eine continuirliche Gruppe gestattet oder nicht. Daher muss man überhaupt alle Differentialgleichungen bestimmen, die continuirliche Gruppen gestatten, und sie auf kanonische Formen bringen. Das ist ein höchst interessantes Problem, das ich zum Beispiel für die gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen zwei Veränderlichen vollständig erledigt habe. Auch mit der Erledigung des Problems für die partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung habe ich mich vielfach beschäftigt, wenn ich auch verhältnissmässig wenig darüber veröffentlicht habe.

Auch *bei der Zurückführung einer Differentialgleichung auf eine kanonische Form* kommt es wesentlich darauf an, ob die Gleichung eine continuirliche Gruppe gestattet oder nicht. Gestattet sie keine, so ist die Zurückführung gar kein Integrationsproblem.

Eine grosse Anzahl der Integrationsprobleme, zu denen man auf dem angegebenen Wege gelangt, lässt sich auf das Problem zurückführen, ein vollständiges System zu integriren, das bekannte infinitesimale Transformationen gestattet. Das neue Werk wird daher eine erschöpfende Darstellung der von mir herrührenden rationellen Integrationstheorie dieses letzteren Problems bringen und es wird ausserdem zeigen, dass sich viele fundamentale Probleme gerade auf dieses Problem zurückführen lassen.

Die eben angedeutete Betrachtungsweise der Theorie der Differentialgleichungen fällt ganz unter die Gruppentheorie. Neuere Untersuchungen von Picard und Vessiot haben gezeigt, dass auch die andre, rein functionentheoretische Behandlungsweise der Differentialgleichungen mit der Gruppentheorie in Zusammenhang gebracht werden kann, vorläufig wenigstens soweit es sich um die Theorie der linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen handelt. Selbstverständlich werden auch diese Untersuchungen eingehende Berücksichtigung finden.

Ich habe schon hervorgehoben, welche Bedeutung meine Gruppentheorie für Geometrie, Differentialgleichungen und Invariantentheorie besitzt. Jetzt möchte ich noch kurz andeuten, welche Bedeutung sie für die Elemente der Mathematik hat.

Wenn man, mit Recht oder mit Unrecht, die Geometrie als eine Erfahrungswissenschaft auffasst, die Mathematik und überhaupt die *Analysis* dagegen als eine rein abstracte Wissenschaft, so ist es naturgemäss, die Analysis *in ihrer ganzen Ausdehnung* zum Aufbau der Geometrie zu verwerthen. Sodann liegt es nahe mit Riemann an die Spitze der Geometrie das Axiom zu stellen: der Raum ist eine Zahlenmannigfaltigkeit, und überhaupt den Weg einzuschlagen, der in der 5. Abtheilung des gegenwärtigen Abschnitts befolgt wird. Ohne mich auf eine Wiederholung des früher Gesagten einzulassen, möchte ich nur bemerken, dass die von Riemann und mir gegebene Begründung der Geometrie gewisse Berührungspunkte mit den Betrachtungen besitzt, die Grassmann schon 1844 angestellt hat, die aber freilich bei Weitem nicht so *allgemein* und so präcis sind. Ich glaube, dass der Ausgangspunkt in Grassmanns, mir allerdings vage erscheinenden Betrachtungen derselbe ist, wie bei Riemann, nämlich die Zahlenmannigfaltigkeit und dass diese Betrachtungen auch in gewissem Sinne als gruppentheoretisch aufzufassen sind.

Auch auf die Elemente der Arithmetik wirft meine Gruppentheorie Licht. Der von Hamilton und seinen Nachfolgern herrührende Begriff *eines begränzten Zahlensystems mit associativer Multiplication* ordnet sich, wie Poincaré und Study gezeigt haben, unter meinen Gruppenbegriff und erhält dadurch eine ganz neue Beleuchtung. Dass auch der allgemeine Begriff eines begränzten Zahlensystems schon an sich ein grosses Interesse besitzt, das zeigt in der merkwürdigsten Weise mein Begriff infinitesimale Transformation und meine Auffassung des Poissonschen Klammerausdrucks als einer *Multiplication* von infinitesimalen Transformationen. Endlich lässt sich auch die Rechnung mit den Grassmannschen complexen Zahlen als ein gruppentheoretischer Kalkül auffassen.

Dass die Gruppentheorie auch für die Elemente und die Principien der Mechanik von grosser Bedeutung ist, wurde schon oben erwähnt.

Die Gruppentheorie wirft somit nach allen Seiten neues Licht.

Zum Schlusse noch einige persönliche Bemerkungen.

Als junger Student hörte ich 1863 bei meinem ausgezeichneten Landsmanne L. Sylow eine kurze Vorlesung über die Galoissche

Theorie der algebraischen Gleichungen. Obwohl ich erst viel später (1868) den Gedanken fasste, in der Mathematik als Schriftsteller aufzutreten, so kann es doch keinem Zweifel unterliegen, dass diese Vorlesung Einfluss auf mich geübt hat. Ich gedenke ferner mit Dankbarkeit des Interesses, das von Clebsch, sowie von den Herren: Cremona, Felix Klein, Adolph Mayer und besonders Camille Jordan schon meinen ersten Untersuchungen über partielle Differentialgleichungen und über *Differentialgleichungen, die infinitesimale Transformationen gestatten*, entgegengebracht wurde. Wenn ich mir auch nicht bewusst bin, von den Genannten in höherem Masse direct Anregung erhalten zu haben, als aus den in diesem Werke gemachten Angaben ersichtlich ist, so muss ich doch bekennen, dass die Theilnahme, die ich bei ihnen fand, für mich von dem grössten Werthe war und noch ist.

Ganz besonders verpflichtet fühle ich mich Herrn G. Darboux, der immer, namentlich für meine *geometrischen* Untersuchungen das grösste Interesse gezeigt hat. Für meine wissenschaftliche Laufbahn war es von unschätzbarer Bedeutung, dass Darboux in seinen glänzenden Vorlesungen fortwährend die Aufmerksamkeit seiner Schüler auf meine Untersuchungen lenkte.

Herr E. Picard ist der erste Mathematiker, der die Wichtigkeit meiner *gruppentheoretischen* Untersuchungen nicht blos erkannt und öffentlich anerkannt, sondern auch durch eigne Arbeiten bewiesen hat. Hier brauche ich nicht nochmals auf die verschiedenartigen neuen und *ungemein werthvollen* Anwendungen meiner Theorien einzugehen, die Picard seit 1883 gemacht hat. Danken möchte ich ihm aber dafür, dass er bei so vielen Gelegenheiten die Wichtigkeit meiner Gruppentheorie stark betont hat.

Noch vielen andern bin ich Dank schuldig. Herr Poincaré, der nach Cauchys Vorbild auf allen Gebieten der Mathematik arbeitet, hat wiederholt interessante Anwendungen meiner Gruppentheorie gemacht. Ganz besonders bin ich ihm dafür dankbar, dass er wie später auch Picard sich in meinem Kampfe über die Grundlagen der Geometrie auf meine Seite gestellt hat, während meine Gegner versuchten, meine Arbeiten über diesen Gegenstand unbeachtet zu lassen.

Zu danken habe ich auch dem Königlich Sächsischen Cultusministerium, das mir an der altberühmten Universität *Leipzig* einen grössern Wirkungskreis eröffnet hat.

Herrn Jules Tannery, der mit hervorragendem Geschick und grossem Erfolge die mathematisch-naturwissenschaftliche Abtheilung der *École Normale Supérieure* zu *Paris* leitet, verdanke ich einen un-

schätzbaren Zuwachs zu den Schülern, die ich in *Leipzig* gefunden habe. Seit einer Reihe von Jahren hat er die tüchtigsten jungen Mathematiker dieser Anstalt veranlasst, zu mir nach *Leipzig* zu kommen, um meine Theorien bei mir selbst zu studiren. Meiner Dankbarkeit für die hervorragenden Schüler, die mir auf diese Weise zu Theil geworden sind, habe ich in der Widmung dieses Werkes Ausdruck zu geben versucht. Wenn ich von vornherein von den Arbeiten dieser jungen Männer, die mit grosser Begabung ausgezeichnete Kenntnisse verbinden, das Beste erwartete, so darf ich schon jetzt sagen, dass meine Erwartungen vollständig erfüllt worden sind.

Eine ganz besondere Stellung nimmt Herr Professor Engel mir gegenüber ein. Auf Veranlassung von F. Klein und A. Mayer ging er im Jahre 1884 nach Christiania, um mich bei der Ausarbeitung einer zusammenhängenden Darstellung meiner Theorien zu unterstützen. Er hat sich dieser Aufgabe, deren Umfang wir damals noch nicht ahnten, mit einer Ausdauer und einer Tüchtigkeit unterzogen, die ihres Gleichen sucht. Er hat während dieser Zeit auch eine Reihe von wichtigen selbständigen Ideen entwickelt, hat aber in höchst uneigennütziger Weise darauf verzichtet, sie ausführlich und zusammenhängend darzustellen, er hat sich vielmehr mit kurzen Mittheilungen darüber begnügt, die in den Mathematischen Annalen und namentlich in den Leipziger Berichten erschienen sind, und hat seine Talente und die ganze freie Zeit, die ihm seine Vorlesungen übrig liessen, unausgesetzt der Aufgabe gewidmet, meine Theorien so ausführlich und vollständig, so systematisch, namentlich aber so *exact* darzustellen, wie nur irgend möglich. Durch diese selbstlose Wirksamkeit, die sich jetzt bereits über einen Zeitraum von neun Jahren erstreckt, hat er mich und ich glaube die ganze wissenschaftliche Welt zu höchstem Danke verpflichtet. Ich persönlich habe ihm ausserdem noch für die Unterstützung zu danken, die meiner Lehrthätigkeit an der Universität *Leipzig* durch seine Vorlesungen zu Theil geworden ist.

So viele Mühe auch wir beide, Engel und ich auf das vorliegende Werk verwandt haben, so liegt es doch in der Natur der Sache, dass einzelne kleinere Versehen vorgekommen sein können; solche etwaige Versehen sind durch den Umfang des Werkes und durch die Neuheit der darin dargestellten Theorien zur Genüge entschuldigt. Andrerseits konnten einzelne Gegenstände nur gestreift werden, da versteht es sich denn von selbst, dass die betreffenden Auseinandersetzungen zuweilen noch der Vervollständigung bedürfen. Ich erinnere hier nur an die Darstellung der Berührungstransformationen in Connexcoordinaten (III, 530—532). Dort ist die Aufgabe vollständig gelöst, alle Trans-

formationen aufzustellen, die die drei Ausdrücke: $\Sigma u_\nu x_\nu$, $\Sigma u_\nu dx_\nu$, $\Sigma x_\nu du_\nu$ invariant lassen, es ist andrerseits auch klar, dass jede solche Transformation eine Berührungstransformation darstellt, merkwürdigerweise entziehen sich aber einzelne Berührungstransformationen zum Beispiel die Dualität dieser Darstellung. Ich behalte mir vor, alle diese Beziehungen bei einer andern Gelegenheit ausführlich zu entwickeln. —

Auch die Wirksamkeit des Herrn Dr. Scheffers in Leipzig kann ich hier nicht unerwähnt lassen. Schon als Student unterstützte Scheffers meine Lehrthätigkeit an der Universität *Leipzig* durch die sorgfältigen Ausarbeitungen, die er von meinen Vorlesungen lieferte. Jetzt liegen von seiner Hand in zwei verschiedenen Bänden ausführliche Bearbeitungen dieser meiner Vorlesungen vor und ich stehe nicht an, diese seine Bearbeitungen als äusserst verdienstvolle Leistungen zu bezeichnen. Wenn die jetzt erscheinenden Vorlesungen zur Einführung in die Gruppentheorie etwas zu umfangreich erscheinen, so liegt das daran, dass diese Vorlesungen bestimmt und geeignet sind, nicht blos in *jeden einzelnen* der drei Abschnitte des vorliegenden Werkes einzuführen, sondern auch in die beiden Werke über Invariantentheorie und über Geometrie, die ich mit der Unterstützung von Engel und von Scheffers zu bearbeiten gedenke.

Ich kann nicht schliessen, ohne der Verlagsbuchhandlung von B. G. Teubner zu gedenken, die sich von jeher so unschätzbare Verdienste um die mathematischen Wissenschaften erworben hat. Es liegt in der Natur der Sache, dass so umfangreiche Werke, die einen so neuen Gegenstand behandeln, dem Verleger keinen sicheren Gewinn in Aussicht stellen. Um so höher muss ich es schätzen, dass die Verlagsbuchhandlung zu jeder Zeit allen Wünschen, die ich und meine Mitarbeiter Engel und Scheffers ausgesprochen haben, mit der grössten Bereitwilligkeit entgegengekommen ist.

Im September 1893.

Sophus Lie.

Inhaltsverzeichniss.

Dritter und letzter Abschnitt.

Abtheilung I.

Seite

Die endlichen continuirlichen Gruppen der geraden Linie und der Ebene . . . . . 1—121

Kap. 1. Bestimmung aller endlichen continuirlichen Transformationsgruppen der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit 1

„ 2. Bestimmung aller Untergruppen der allgemeinen projectiven Gruppe auf der Geraden und der allgemeinen linearen homogenen Gruppe in der Ebene 12

„ 3. Bestimmung aller endlichen continuirlichen Gruppen von Punkttransformationen der Ebene 28

„ 4. Klassification der endlichen continuirlichen Gruppen von Punkttransformationen der Ebene 58

„ 5. Bestimmung und Klassificirung aller projectiven Gruppen der Ebene 78

„ 6. Bestimmung aller linearen homogenen Gruppen in drei Veränderlichen 109

Abtheilung II.

Die endlichen continuirlichen Gruppen des gewöhnlichen Raumes . . . . . 122—178

Kap. 7. Bestimmung aller primitiven Gruppen des dreifach ausgedehnten Raumes 122

„ 8. Bestimmung gewisser imprimitiver Gruppen des dreifach ausgedehnten Raumes 141

Abtheilung III.

Die projectiven Gruppen des gewöhnlichen Raumes 179—262

Kap. 9. Curven und Flächen des gewöhnlichen Raumes, die projective Gruppen gestatten 180

„ 10. Die projective Gruppe einer Fläche zweiten Grades im gewöhnlichen Raume 198

„ 11. Die Gruppe der Euklidischen Bewegungen und der Aehnlichkeitstransformationen 210

„ 12. Die primitiven projectiven Gruppen des gewöhnlichen Raumes 224

„ 13. Die imprimitiven projectiven Gruppen des gewöhnlichen Raumes 232

Abtheilung IV.

Seite

Untersuchungen über verschiedene Arten von Gruppen des n-fach ausgedehnten Raumes . . . . . 263—392

Kap. 14. Gruppen, die mit gewissen projectiven Gruppen gleichzusammengesetzt sind 264

„ 15. Allgemeines über gewisse primitive projective Gruppen des n-fach ausgedehnten Raumes 283

„ 16. Bestimmung aller endlichen continuirlichen Gruppen des R_n, die möglichst transitiv sind 296

„ 17. Gruppen des R_n mit einer invarianten Gleichung von der Form: $\sum_{kv}^{1\ldots n} f_{kv}(x_1 \ldots x_n)\, dx_k dx_v = 0$. 314

„ 18. Einige Eigenschaften der im vorigen Kapitel gefundenen Gruppen 346

„ 19. Die reellen Gruppen 360

Abtheilung V.

Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie 393—543

Kap. 20. Bestimmung aller Gruppen des R_3, bei denen zwei Punkte eine und nur eine, mehr als zwei Punkte dagegen keine wesentliche Invariante haben 399

„ 21. Kritik der Helmholtzschen Untersuchungen 437

„ 22. Erste Lösung des Riemann-Helmholtzschen Problems . . 471

„ 23. Zweite Lösung des Riemann-Helmholtzschen Problems. . 498

„ 24. Kritik einiger neuerer Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie 524

Schlussbemerkungen zu Abtheilung V 535

Abtheilung VI.

Allgemeine Betrachtungen über endliche continuirliche Gruppen . . . . . 544—815

Kap. 25. Die Fundamentalsätze der Gruppentheorie 545

„ 26. Die Ueberführung der endlichen Gleichungen einer r-gliedrigen Gruppe in ihre kanonische Form. 607

„ 27. Die Bestimmung aller r-gliedrigen transitiven Gruppen von gegebener Zusammensetzung. 635

„ 28. Allgemeines über die Zusammensetzung r-gliedriger Gruppen. 665

„ 29. Die gruppentheoretischen Arbeiten Andrer 753

Sachregister zu Abschnitt I, II und III 816

Namenregister zu Abschnitt I, II und III 829

Abtheilung I.

Die endlichen continuirlichen Gruppen der geraden Linie und der Ebene.

Die vorliegende erste Abtheilung enthält die Bestimmung aller endlichen continuirlichen Gruppen von Punkttransformationen auf der geraden Linie und der Ebene (Kapitel 1, 3, 4). Ferner enthält sie die Bestimmung aller projectiven Gruppen auf der Geraden und der Ebene (Kap. 2, § 4 und Kap. 5). Im Anschluss an diese Untersuchungen werden ausserdem noch alle linearen homogenen Gruppen in zwei und drei Veränderlichen aufgestellt (Kap. 2, § 5 und Kap. 6). Ausserdem ist noch zu erwähnen, dass durch die Entwickelungen der Kapp. 3 und 4 in Verbindung mit Kap. 23 des Abschnitts II auch die Bestimmung aller endlichen continuirlichen Gruppen von Berührungstransformationen einer Ebene geleistet ist (s. Kap. 4, § 19).

Durch das Gesagte sind die Ergebnisse der ersten Abtheilung im Allgemeinen gekennzeichnet. Insbesondere möge noch hervorgehoben werden, was sich über die Form der bestimmten Gruppen ergiebt: Es zeigt sich nämlich, dass die endlichen continuirlichen Gruppen der geraden Linie sämmtlich mit projectiven Gruppen ähnlich sind. Für die Ebene gilt das allerdings nicht mehr, aber auch in der Ebene können die infinitesimalen Transformationen einer jeden endlichen continuirlichen Gruppe auf eine sehr einfache Form gebracht werden: bei den transitiven Gruppen treten in dieser Form ausser ganzen rationalen Functionen nur noch Exponentialfunctionen auf, bei den intransitiven kommen willkürliche Functionen vor. Diese wichtigen Ergebnisse über die Form der Gruppen auf der Geraden und der Ebene hat Lie bereits im Jahre 1874 in Nr. 22 der Gött. Nachr. veröffentlicht.

Kapitel 1.

Bestimmung aller endlichen continuirlichen Transformationsgruppen der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit.

Zunächst entwickeln wir zwei verschiedene Methoden, die uns ohne Schwierigkeit alle Transformationsgruppen der einfach ausgedehnten

Mannigfaltigkeit liefern. Sodann zeigen wir, dass die Bestimmung dieser Gruppen auch schon aus den Ergebnissen des Kap. 29 im I. Abschnitt fast unmittelbar folgt.

§ 1.

Eine r-gliedrige Gruppe der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit x wird durch eine Gleichung von der Form:

$$x' = f(x, a_1 \ldots a_r)$$

mit r Parametern $a_1 \ldots a_r$ dargestellt. Sie ist erzeugt von r unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

$$X_1 f = \xi_1(x) \frac{df}{dx}, \ \ldots \ X_r f = \xi_r(x) \frac{df}{dx},$$

die paarweise Relationen von der Gestalt:

$$(X_i X_k) = \left(\xi_i \frac{d\xi_k}{dx} - \xi_k \frac{d\xi_i}{dx}\right) \frac{df}{dx} = \sum_1^r {}_s c_{iks} X_s f$$
$$(i, k = 1 \ldots r)$$

erfüllen.

Die allgemeine infinitesimale Transformation unsrer Gruppe lautet:

$$Xf = \sum_1^r {}_k e_k \xi_k(x) \cdot \frac{df}{dx} = \xi(x) \frac{df}{dx},$$

wo $e_1 \cdots e_r$ willkürliche Constanten bezeichnen. Da nun $X_1 f \cdots X_r f$ unabhängige infinitesimale Transformationen sind und da in Folge dessen $\xi_1 \ldots \xi_r$ keine lineare Relation:

$$a_1 \xi_1 + \cdots + a_r \xi_r = 0$$

mit constanten Coefficienten befriedigen, so ist die Function:

$$\xi = e_1 \xi_1 + \cdots + e_r \xi_r$$

mit den r willkürlichen Constanten $e_1 \ldots e_r$ die allgemeine Lösung einer linearen Differentialgleichung r^{ter} Ordnung:

$$\frac{d^r \xi}{dx^r} + \alpha_1(x) \cdot \frac{d^{r-1} \xi}{dx^{r-1}} + \cdots + \alpha_{r-1}(x) \frac{d\xi}{dx} + \alpha_r(x) \cdot \xi = 0,$$

die ihrerseits die allgemeine infinitesimale Transformation unsrer Gruppe und damit die Gruppe selbst vollständig bestimmt. Wir sehen also: *die Definitionsgleichungen* (vgl. Abschn. I, Kap. 11) *einer r-gliedrigen Transformationsgruppe der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit bestehen aus einer linearen gewöhnlichen Differentialgleichung r^{ter} Ordnung.*

Wir denken uns jetzt in der Umgebung eines Punktes von allgemeiner Lage, den wir zum Coordinatenanfang wählen, die infinitesimalen Transformationen unsrer Gruppe nach Potenzen von x entwickelt.

Die Definitionsgleichung, welche nach dem Differentialquotienten r^{ter} Ordnung von ξ aufgelöst ist, zeigt (a. a. O. S. 188 ff.), dass in unsrer Gruppe keine infinitesimale Transformation von r^{ter} oder höherer Ordnung in x vorhanden ist, also keine infinitesimale Transformation, deren Reihenentwickelung nach x mit Gliedern r^{ter} oder höherer Ordnung beginnt. Dagegen können wir uns stets r unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe derart ausgewählt denken, dass je eine von nullter, erster, $\ldots (r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung in x ist:

$$(1)\qquad \begin{cases} X_0 f &= (1 + a_0 x + \cdots)\,\dfrac{df}{dx} \\ X_1 f &= (x + a_1 x^2 + \cdots)\,\dfrac{df}{dx} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_{r-1} f &= (x^{r-1} + a_{r-1} x^r + \cdots)\,\dfrac{df}{dx}. \end{cases}$$

Diese r unabhängigen infinitesimalen Transformationen können wir natürlich an Stelle der ursprünglich gewählten: $X_1 f \cdots X_r f$ benutzen.

Nunmehr erinnern wir daran, dass zwei infinitesimale Transformationen von bezüglich i^{ter} und k^{ter} Ordnung durch Combination eine Transformation von $(i+k-1)^{\text{ter}}$ oder höherer Ordnung ergeben (a. a. O. S. 193, Theor. 30); in unserm Falle finden wir:

$$(2)\qquad \Big((x^i + \cdots)\frac{df}{dx},\ (x^k + \cdots)\frac{df}{dx}\Big) = \Big((k-i)x^{i+k-1} + \cdots\Big)\frac{df}{dx},$$

wo auf der rechten Seite das Glied $(i+k-1)^{\text{ter}}$ Ordnung augenscheinlich niemals verschwinden kann, wenn i und k von einander verschieden sind. Vorhin haben wir aber gesehen, dass unsre r-gliedrige Gruppe keine infinitesimale Transformation von r^{ter} oder höherer Ordnung enthält, folglich können wir schliessen, dass in unsrer Gruppe die Zahlen i, k und $i+k-1$ stets kleiner als r sein müssen. Wählen wir daher für i den grössten möglichen Werth: $i = r-1$ und für $k \neq i$ ebenfalls den grössten möglichen Werth: $k = r-2$, so erhalten wir für die Gliederzahl r unsrer Gruppe die Bedingung:

$$r - 1 + r - 2 - 1 < r,$$

das heisst: $r < 4$.

In der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit giebt es somit keine endliche continuirliche Gruppe mit mehr als drei Parametern.

Wir behandeln jetzt die drei möglichen Fälle: $r = 1, 2, 3$ der Reihe nach.

Ist $r = 1$, so enthält die Gruppe nur eine infinitesimale Transformation von der Gestalt:

$$X_0 f = (1 + \cdots)\frac{df}{dx}.$$

Wir führen nun:

$$x_1 = \int_0^x \frac{dx}{1 + \cdots}$$

an Stelle von x als neue Veränderliche ein. Das dürfen wir, denn x_1 wird eine gewöhnliche Potenzreihe von x, die für $x = 0$ verschwindet und ebenso wird x eine gewöhnliche Potenzreihe von x_1, die für $x_1 = 0$ verschwindet. In der neuen Veränderlichen x_1 erhält $X_0 f$ die Form:

$$X_0 f = \frac{df}{dx_1}.$$

Diese infinitesimale Transformation erzeugt eine eingliedrige Gruppe, deren endliche Transformationen lauten: $x_1' = x_1 + a$; es ist das die Gruppe aller Translationen der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit.

Im Falle $r = 2$ haben wir zwei infinitesimale Transformationen:

$$X_0 f = (1 + \cdots) \frac{df}{dx}, \quad X_1 f = (x + \cdots) \frac{df}{dx},$$

die durch Combination ergeben:

$$(X_0 X_1) = (1 + \cdots) \frac{df}{dx},$$

es besteht also eine Relation von der Form:

$$(X_0 X_1) = X_0 f + \lambda . X_1 f,$$

oder, wenn wir $X_0 f + \lambda X_1 f$ als neues $X_0 f$ einführen:

$$(X_0 X_1) = X_0 f. \tag{3}$$

Wählen wir jetzt wie im ersten Falle die Veränderliche x_1 so, dass $X_0 f$ die Form: $\frac{df}{dx_1}$ annimmt, so wird: $X_1 f = \xi_1 \frac{df}{dx_1}$ und wegen der Relation (3):

$$\frac{d\xi_1}{dx_1} = 1, \quad \xi_1 = x_1 + \text{Const.},$$

wo übrigens die Integrationsconstante verschwindet, weil die infinitesimale Transformation $X_1 f$ auch in der neuen Veränderlichen x_1 von der ersten Ordnung sein muss (Abschn. I, S. 197, Satz 1).

Die beiden infinitesimalen Transformationen:

$$X_0 f = \frac{df}{dx_1}, \quad X_1 f = x_1 \frac{df}{dx_1}$$

erzeugen eine zweigliedrige Gruppe mit den endlichen Transformationen: $x_1' = a_1 x_1 + a_2$, es ist das die allgemeine lineare Gruppe der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit.

Ist endlich $r = 3$, so enthält die Gruppe drei infinitesimale Transformationen von der Form:

$$X_0 f = (1 + \cdots)\frac{df}{dx}, \quad X_1 f = (x + \cdots)\frac{df}{dx}, \quad X_2 f = (x^2 + \cdots)\frac{df}{dx},$$

es bestehen daher Relationen von der folgenden Gestalt:

$$(X_0 X_1) = X_0 f + \lambda_1 X_1 f + \lambda_2 X_2 f,$$
$$(X_0 X_2) = 2 X_1 f + \mu X_2 f,$$
$$(X_1 X_2) = X_2 f.$$

Setzen wir:

$$\overline{X}_0 f = X_0 f + \alpha_1 X_1 f + \alpha_2 X_2,$$

so ergiebt sich:

$$(\overline{X}_0 X_1) = \overline{X}_0 f + (\lambda_1 - \alpha_1) X_1 f + (\lambda_2 - 2\alpha_2) X_2 f,$$
$$(\overline{X}_0 X_2) = 2 X_1 f + (\alpha_1 + \mu) X_2 f,$$

oder wenn wir $\alpha_1 = \lambda_1$ und $2\alpha_2 = \lambda_2$ wählen:

$$(\overline{X}_0 X_1) = \overline{X}_0 f, \quad (\overline{X}_0 X_2) = 2 X_1 f + (\lambda_1 + \mu) X_2 f.$$

Aus der Jacobischen Identität:

$$((\overline{X}_0 X_1) X_2) + ((X_1 X_2)\overline{X}_0) + ((X_2 \overline{X}_0) X_1) = 0$$

folgt schliesslich:

$$(\overline{X}_0 X_2) + (X_2 \overline{X}_0) + (\lambda_1 + \mu) X_2 f = 0,$$

also ist: $\lambda_1 + \mu = 0$ und wir haben:

$$(4) \qquad (\overline{X}_0 X_1) = \overline{X}_0, \quad (\overline{X}_0 X_2) = 2 X_1, \quad (X_1 X_2) = X_2.$$

Die infinitesimalen Transformationen $\overline{X}_0 f$ und $X_1 f$ erzeugen für sich offenbar eine zweigliedrige Gruppe, die unter den vorigen Fall gehört und daher durch geeignete Wahl der Veränderlichen x auf die Form:

$$\overline{X}_0 f = \frac{df}{dx}, \quad X_1 f = x\frac{df}{dx}$$

gebracht werden kann. Zu gleicher Zeit erhält $X_2 f$ eine gewisse neue Form: $\xi_2 \frac{df}{dx}$, wo ξ_2 wegen der Relationen (4) die Gleichungen:

$$\frac{d\xi_2}{dx} = 2x, \quad x\frac{d\xi_2}{dx} - \xi_2 = \xi_2$$

erfüllen muss und in Folge dessen einfach gleich x^2 ist. Somit haben wir:

$$\overline{X}_0 f = \frac{df}{dx}, \quad X_1 f = x\frac{df}{dx}, \quad X_2 f = x^2\frac{df}{dx}.$$

Die endlichen Gleichungen der von diesen infinitesimalen Transformationen erzeugten dreigliedrigen Gruppe lauten:

$$x' = \frac{a_1 + a_2 x}{1 + a_3 x},$$

es ist das die allgemeine projective Gruppe der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit.

Damit haben wir das wichtige Theorem gewonnen:

Theorem 1*). *Jede endliche continuirliche Gruppe der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit hat höchstens drei Parameter, sie ist ähnlich entweder mit der eingliedrigen Gruppe:*

$$x' = x + a$$

aller Translationen oder mit der zweigliedrigen allgemeinen linearen Gruppe:

$$x' = a_1 + a_2 x,$$

oder endlich mit der dreigliedrigen allgemeinen projectiven Gruppe:

$$x' = \frac{a_1 + a_2 x}{1 + a_3 x}.$$

Wir haben gesehen, dass jede zweigliedrige Gruppe der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit auf die Form:

$$\frac{df}{dx}, \quad x\frac{df}{dx} \tag{5}$$

gebracht werden kann. Hieraus lässt sich schliessen, dass zwei unabhängige infinitesimale Transformationen:

$$X_1 f = \xi_1 \frac{df}{dx}, \quad X_2 f = \xi_2 \frac{df}{dx}$$

der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit niemals vertauschbar sein können; wären sie es nämlich, so würden sie eine zweigliedrige Gruppe erzeugen, die mit der Gruppe (5) nicht gleichzusammengesetzt und also auch nicht ähnlich wäre. Uebrigens findet man auch aus der Bedingung der Vertauschbarkeit:

$$(X_1 X_2) = \left(\xi_1 \frac{d\xi_2}{dx} - \xi_2 \frac{d\xi_1}{dx}\right) \frac{df}{dx} = 0$$

sofort, dass ξ_2 und ξ_1 sich nur um einen constanten Factor unterscheiden, dass also $X_1 f$ und $X_2 f$, wenn sie vertauschbar sein sollen, nicht von einander unabhängig sein können. Es ergiebt sich mithin der

Satz 1. *Zwei unabhängige infinitesimale Transformationen der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit sind niemals vertauschbar.*

Man beachte, dass die Gruppen der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit sämmtlich transitiv sind. Wenn man will, kann man sogar sagen, dass sie primitiv sind.

---

*) Lie, Gött. Nachr. Dec. 1874 und Math. Ann. Bd. 16, an der zweiten Stelle wird die Methode des Textes benutzt.

§ 2.

Im Anfang des § 1 sahen wir, dass zu jeder r-gliedrigen Gruppe der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung r^{ter} Ordnung:

$$\frac{d^r\xi}{dx^r} + \alpha_1(x)\frac{d^{r-1}\xi}{dx^{r-1}} + \cdots + \alpha_r(x)\xi = 0$$

gehört, durch die sie vollständig definirt ist: die Definitionsgleichung der betreffenden Gruppe. Man kann nun die Gruppen der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit auch in der Weise bestimmen, dass man jede Differentialgleichung sucht, die Definitionsgleichung einer Gruppe ist. Das wollen wir jetzt durchführen*).

Soll die lineare Differentialgleichung r^{ter} Ordnung:

$$\xi^{(r)} + \alpha_1(x)\xi^{(r-1)} + \cdots + \alpha_{r-1}(x)\xi' + \alpha_r(x)\xi = 0 \tag{6}$$

die Definitionsgleichung einer r-gliedrigen Gruppe sein, so ist nach Abschn. I, Theor. 28, S. 187 Folgendes nothwendig und hinreichend: wenn $\xi(x)$ und $\eta(x)$ irgend zwei Lösungen der Differentialgleichung (6) sind, so muss stets auch $\xi\eta' - \xi'\eta$ eine Lösung dieser Gleichung sein.

Um nun die Bedingungen zu finden, die sich hieraus für die Functionen $\alpha_1(x) \ldots \alpha_r(x)$ ergeben, bilden wir die Gleichung:

$$\frac{d^r(\xi\eta' - \xi'\eta)}{dx^r} + \alpha_1 \cdot \frac{d^{r-1}(\xi\eta' - \xi'\eta)}{dx^{r-1}} + \cdots + \alpha_r(\xi\eta' - \xi'\eta) = 0, \tag{7}$$

und drücken in ihr vermöge (6) und:

$$\eta^{(r)} + \alpha_1(x)\eta^{(r-1)} + \cdots + \alpha_{r-1}(x)\eta' + \alpha_r(x)\eta = 0 \tag{6'}$$

die r^{ten} und $(r+1)^{\text{ten}}$ Ableitungen von ξ und η durch:

$$\xi,\ \xi' \ldots \xi^{(r-1)},\ \eta,\ \eta' \ldots \eta^{(r-1)} \tag{8}$$

aus. Wir erhalten auf diese Weise zwischen den Grössen (8) eine Gleichung von der Form:

$$\sum_{i,\,k}^{0 \ldots r-1} \lambda_{ik}(\xi^{(i)}\eta^{(k)} - \xi^{(k)}\eta^{(i)}) = 0, \tag{9}$$

und diese Gleichung muss identisch erfüllt sein, welche Lösungen der Differentialgleichung r^{ter} Ordnung (6) auch ξ und η sein mögen. Hieraus folgt sofort, dass (9) überhaupt für alle Werthe der Grössen (8) identisch

*) Lie hat die Gruppen auf der geraden Linie in dieser Weise schon in den 70er Jahren bestimmt oder jedenfalls 1882. Er beschäftigte sich damals mit der Zurückführung der Differentialgleichung $\xi''' + 2\alpha\xi' + \alpha'\xi = 0$ auf die Form $\xi''' = 0$. Aus seiner allgemeinen Integrationstheorie folgt sofort, dass hierzu eine Riccatische Gleichung 1. O. genügen muss.

bestehen, dass also der Coefficient jedes einzelnen Ausdrucks: $\xi^{(i)}\eta^{(k)} - \xi^{(k)}\eta^{(i)}$ gleich Null sein muss.

Betrachten wir zunächst die beiden Fälle: $r = 1$ und $r = 2$.

Ist $r = 1$, so hat die Differentialgleichung (6) die Form:

$$\xi' + \alpha(x)\xi = 0. \tag{10}$$

Sind $\xi(x)$ und $\eta(x)$ irgend zwei Lösungen dieser Gleichung, so verschwindet der Ausdruck $\xi\eta' - \xi'\eta$ augenscheinlich identisch und ist daher wiederum eine Lösung von (10). Die Function $\alpha(x)$ ist in Folge dessen gar keiner Beschränkung unterworfen.

Im Falle $r = 2$ hat (6) die Gestalt:

$$\xi'' + \alpha_1(x)\xi' + \alpha_2(x)\xi = 0. \tag{11}$$

Es ist nun:

$$\frac{d(\xi\eta' - \xi'\eta)}{dx} = \xi\eta'' - \xi''\eta, \quad \frac{d^2(\xi\eta' - \xi'\eta)}{dx^2} = \xi\eta''' - \xi'''\eta + \xi'\eta'' - \xi''\eta',$$

also erhält (7) die Form:

$$\xi(\eta''' + \alpha_1\eta'' + \alpha_2\eta') - \eta(\xi''' + \alpha_1\xi'' + \alpha_2\xi') + \xi'\eta'' - \xi''\eta' = 0,$$

drückt man daher ξ'', η'', ξ''', η''' durch ξ, η, ξ', η' aus, so ergiebt sich:

$$(-\alpha_1' + \alpha_2)(\xi\eta' - \xi'\eta) = 0,$$

das ist die oben besprochene Gleichung (9) für unsern Fall. Der Factor von $\xi\eta' - \xi'\eta$ muss hier verschwinden, wir finden daher: $\alpha_1' = \alpha_2$ und erkennen, dass die Gleichung (11) stets dann aber auch nur dann die Definitionsgleichung einer zweigliedrigen Gruppe ist, wenn sie die Form besitzt:

$$\xi'' + \alpha(x)\xi' + \alpha'(x)\xi = 0.$$

Die Function $\alpha(x)$ ihrerseits ist keiner Beschränkung unterworfen.

Wir kommen zu dem Falle $r > 2$.

Es ist, wie man leicht sieht:

$$\frac{d^m(\xi\eta' - \xi'\eta)}{dx^m} = \xi\eta^{(m+1)} - \xi^{(m+1)}\eta + (m-1)(\xi'\eta^{(m)} - \xi^{(m)}\eta') + \\ + \frac{m(m-3)}{1.2}(\xi''\eta^{(m-1)} - \xi^{(m-1)}\eta'') + \cdots,$$

eine Reihe, die mit dem $\frac{1}{2}(m+1)^{\text{ten}}$ oder mit dem $\frac{1}{2}(m+2)^{\text{ten}}$ Gliede schliesst, jenachdem die ganze Zahl m ungerade ist oder gerade. Berücksichtigen wir daher nur alle die Glieder, in denen Ableitungen von mindestens $(r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung vorkommen, so können wir die Gleichung (7) schreiben wie folgt:

$$\xi\eta^{(r+1)} - \xi^{(r+1)}\eta + (r-1)(\xi'\eta^{(r)} - \xi^{(r)}\eta') + \frac{r(r-3)}{1.2}(\xi''\eta^{(r-1)} - \xi^{(r-1)}\eta'') +$$
$$+ \alpha_1\{\xi\eta^{(r)} - \xi^{(r)}\eta + (r-2)(\xi'\eta^{(r-1)} - \xi^{(r-1)}\eta')\} +$$
$$+ \alpha_2(\xi\eta^{(r-1)} - \xi^{(r-1)}\eta) + \cdots = 0.$$

Diese Gleichung gestalten wir um, indem wir die Relationen:

$$\xi^{(r)} + \alpha_1\xi^{(r-1)} + \cdots = 0,$$
$$\xi^{(r+1)} + \alpha_1\xi^{(r)} + (\alpha_1' + \alpha_2)\xi^{(r-1)} + \cdots = 0$$

und die entsprechenden Relationen für η benutzen, und finden, dass die Gleichung (9) die Form hat:

$$-\alpha_1'(\xi\eta^{(r-1)} - \xi^{(r-1)}\eta) - \alpha_1(\xi'\eta^{(r-1)} - \xi^{(r-1)}\eta') +$$
$$+ \frac{r(r-3)}{1.2}(\xi''\eta^{(r-1)} - \xi^{(r-1)}\eta'') + \cdots = 0,$$

wo die weggelassenen Glieder nur Ableitungen von niedrigerer als der $(r-1)^{\text{ten}}$ Ordnung enthalten. Indem wir nunmehr die Coefficienten der einzelnen Ausdrücke $\xi^{(i)}\eta^{(k)} - \xi^{(k)}\eta^{(i)}$ gleich Null setzen, bekommen wir: $r(r-3) = 0$ und: $\alpha_1 = \alpha_1' = 0$. Es ergiebt sich also, dass r nur dann grösser als 2 sein kann, wenn es gleich 3 ist, und dass für $r = 3$ unsre Differentialgleichung (6) die Form besitzen muss:

$$\xi''' + \alpha_2(x)\xi' + \alpha_3(x)\xi = 0. \tag{12}$$

Um die Functionen α_2 und α_3 näher zu bestimmen, bilden wir die Gleichung:

$$\frac{d^3(\xi\eta' - \xi'\eta)}{dx^3} + \alpha_2\frac{d(\xi\eta' - \xi'\eta)}{dx} + \alpha_3(\xi\eta' - \xi'\eta) = 0$$

und finden:

$$\xi\eta^{(4)} - \xi^{(4)}\eta + 2(\xi'\eta''' - \xi'''\eta') + \alpha_2(\xi\eta'' - \xi''\eta) + \alpha_3(\xi\eta' - \xi'\eta) = 0,$$

also mit Berücksichtigung der Gleichungen (12) und:

$$\xi^{(4)} + \alpha_2\xi'' + (\alpha_2' + \alpha_3)\xi' + \alpha_3'\xi = 0$$

und der entsprechenden Gleichungen für η:

$$(-\alpha_2' + 2\alpha_3)(\xi\eta' - \xi'\eta) = 0.$$

Demnach muss $\alpha_2' = 2\alpha_3$ sein, das ist aber die einzige Bedingung, der α_2 und α_3 zu genügen haben.

Setzen wir $\alpha_2(x) = 2\alpha(x)$, so erscheint die Definitionsgleichung der allgemeinsten dreigliedrigen Gruppe der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit in der Form:

$$\xi''' + 2\alpha(x)\xi' + \alpha'(x)\xi = 0.$$

Damit sind alle Gruppen der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit bestimmt und wir haben den

Satz 2. *Die Definitionsgleichung einer endlichen continuirlichen Gruppe der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit hat stets eine unter den drei Formen:*

$$(13)\qquad \begin{cases} \xi' + \alpha(x)\xi = 0, \\ \xi'' + \alpha(x)\xi' + \alpha'(x)\xi = 0, \\ \xi''' + 2\alpha(x)\xi' + \alpha'(x)\xi = 0; \end{cases}$$

hierbei ist die Function $\alpha(x)$ keiner Beschränkung unterworfen.

Im Vorstehenden haben wir überhaupt alle Gruppen der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit gefunden und unter den gefundenen Gruppen sind offenbar auch die drei Typen enthalten, auf die wir im vorigen Paragraphen geführt worden sind; setzen wir nämlich $\alpha = 0$, so erhalten wir die drei Definitionsgleichungen:

$$(14)\qquad \xi' = 0, \quad \xi'' = 0, \quad \xi''' = 0,$$

welche der Reihe nach die drei Gruppen:

$$\frac{df}{dx}; \quad \frac{df}{dx}, \; x\frac{df}{dx}; \quad \frac{df}{dx}, \; x\frac{df}{dx}, \; x^2\frac{df}{dx}$$

liefern. Es bleibt daher noch nachzuweisen, dass es möglich ist, die Definitionsgleichungen (13) durch Einführung einer neuen Veränderlichen so umzugestalten, dass sie die einfachen Formen (14) erhalten.

Um diesen Nachweis zu erbringen, denken wir uns: $x_1 = F(x)$ an Stelle von x als neue Veränderliche eingeführt. Dabei nimmt die infinitesimale Transformation:

$$Xf = \xi(x)\frac{df}{dx}$$

die Form an:

$$Xf = \xi(x)\frac{df}{dx} = \xi(x)\cdot F'(x)\cdot\frac{df}{dx_1} = \xi_1(x_1)\frac{df}{dx_1},$$

es wird also:

$$\xi = \frac{\xi_1}{F'}.$$

Ferner wird:

$$\xi' = \xi_1' - \frac{\xi_1 F''}{F'^2},$$

$$\xi'' = \xi_1'' F' - \xi_1' \frac{F''}{F'} - \xi_1 \frac{F' F''' - 2F''^2}{F'^3},$$

$$\xi''' = \xi_1''' F'^2 - \xi_1' \frac{2F' F''' - 3F''^2}{F'^2} - \xi_1 \frac{d}{dx}\frac{F' F''' - 2F''^2}{F'^3},$$

wo der Abkürzung wegen $\xi_1^{(\nu)}$ für $\frac{d^\nu \xi_1}{dx_1^\nu}$ geschrieben ist.

Führen wir jetzt die neue Veränderliche x_1 in die Gleichungen (13) ein, so erhalten diese die folgenden Formen:

$$\xi_1' + \left(\frac{\alpha}{F'} - \frac{F''}{F'^2}\right)\xi_1 = 0,$$

$$\xi_1'' + \left(\frac{\alpha}{F'} - \frac{F''}{F'^2}\right)\xi_1' + \frac{1}{F'}\frac{d}{dx}\left(\frac{\alpha}{F'} - \frac{F''}{F'^2}\right)\xi_1 = 0,$$

$$\xi_1''' + 2\left(\frac{\alpha}{F'^2} - \frac{F'F''' - \frac{3}{2}F''^2}{F'^4}\right)\xi_1' + \frac{1}{F'}\frac{d}{dx}\left(\frac{\alpha}{F'^2} - \frac{F'F''' - \frac{3}{2}F''^2}{F'^4}\right)\xi_1 = 0,$$

sollen aber diese Gleichungen die einfache Gestalt (14) annehmen, so brauchen wir blos in den beiden ersten Fällen für F eine Lösung der Differentialgleichung:

$$F'' = \alpha F'$$

einzusetzen, im letzten Falle dagegen eine Lösung der Gleichung:

$$F'F''' - \frac{3}{2}F''^2 = \alpha F'^2.$$

Damit ist der verlangte Nachweis geliefert.

§ 3.

Wir haben bisher die Gruppen der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit direct bestimmt, ohne von den Theorien des ersten Abschnitts mehr zu benutzen als einige allgemeine Sätze aus den ersten Kapiteln. Es darf aber nicht unerwähnt bleiben, dass die Bestimmung aller Gruppen der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit schon aus den Ergebnissen des Kap. 29 in Abschnitt I fast unmittelbar folgt.

Wie wir im Anfange von § 1 gesehen haben, enthält jede r-gliedrige Gruppe der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit in der Umgebung eines Punktes $x = 0$ von allgemeiner Lage eine infinitesimale Transformation von nullter Ordnung in x, ferner je eine von erster, von zweiter, ... $(r-1)^{\text{ter}}$, dagegen keine von r^{ter} oder höherer Ordnung.

Betrachten wir nun die Fälle $r = 1$, $r = 2$, $r > 2$ etwas näher, so erkennen wir sofort, dass sie genau den drei a. a. O. auf S. 625 unterschiedenen Fällen entsprechen, wenn wir nur daselbst $n = 1$ setzen. Ist nämlich $r = 1$, so enthält unsre r-gliedrige Gruppe in der Umgebung von $x = 0$ gerade $n = 1$ infinitesimale Transformationen von nullter, $n^2 - 1 = 0$ von erster und keine von höherer Ordnung. Ist zweitens $r = 2$, so enthält die Gruppe gerade n Transformationen von nullter, $n^2 = 1$ von erster, aber keine von höherer Ordnung. Ist endlich $r > 2$, so enthält die Gruppe $n = 1$ Transformationen von nullter, $n^2 = 1$ von erster und ausserdem noch gewisse von höherer Ordnung. Hieraus folgt, dass wir das Ergebniss, welches in dem Kap. 29 des Abschn. I erhalten wird, sofort auf unsern Fall anwenden können. Thun wir das, so bekommen wir unmittelbar das in Theorem 1 auf S. 6 ausgesprochene Resultat. Dabei ergiebt sich insbesondere,

dass die specielle lineare Gruppe eines n-fach ausgedehnten Raumes für $n = 1$ in die Gruppe aller Translationen der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit übergeht.

Kapitel 2.

Bestimmung aller Untergruppen der allgemeinen projectiven Gruppe auf der Geraden und der allgemeinen linearen homogenen Gruppe in der Ebene.

Die Kenntniss aller Untergruppen der beiden in der Ueberschrift genannten Gruppen ist für die späteren allgemeinen Untersuchungen über die Gruppen der Ebene unentbehrlich*). Indem wir diese Untergruppen bestimmen, erhalten wir natürlich zugleich eine Bestimmung aller Untergruppen jeder Gruppe, die mit einer der beiden in der Ueberschrift bezeichneten Gruppen gleichzusammengesetzt ist (s. Abschn. I, Theorem 33, S. 210).

Aus Bequemlichkeitsrücksichten werden wir von jetzt an bei den infinitesimalen Transformationen in einer Veränderlichen x kurz schreiben:

$$\frac{df}{dx} = p$$

und ebenso werden wir bei den infinitesimalen Transformationen in zwei Veränderlichen x, y die Abkürzungen anwenden:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = q.$$

Aehnliche Bezeichnungen haben wir ja schon früher benutzt (s. z. B. Abschn. I, S. 555).

§ 4.

Die allgemeine projective Gruppe der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit x ist dreigliedrig, sie soll daher in dem gegenwärtigen Paragraphen kurz „die G_3“ genannt werden.

Unsre G_3 enthält die ∞^3 endlichen Transformationen:

$$x' = \frac{a_1 x + a_2}{a_3 x + 1},$$

*) Die continuirlichen Untergruppen der allgemeinen linearen homogenen Gruppe: xp, yp, xq, yq in zwei Veränderlichen x, y sind zum ersten Male bestimmt worden im Norwegischen Archiv 1878, vgl. auch Math. Ann. Bd. 16; die Veränderlichen x, y wurden dabei als Cartesische Coordinaten in der Ebene und auch als homogene Coordinaten im Strahlbüschel gedeutet. Später hat Stephanos interessante Untersuchungen über die genannte Gruppe angestellt.

erzeugt ist sie von den drei unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

$$X_1 f = p, \quad X_2 f = xp, \quad X_3 f = x^2 p$$

(s. Kap. 1 oder Abschn. I, S. 554 f.). Ihre allgemeine infinitesimale Transformation besitzt daher die Gestalt:

$$Xf = (e_1 + e_2 x + e_3 x^2)p,$$

wo e_1, e_2, e_3 willkürliche Constanten bezeichnen.

Die G_3 ist transitiv, ja sogar dreifach transitiv (Abschn. I, S. 631 f.), das heisst sie enthält stets eine Transformation, vermöge deren drei beliebige verschiedene Punkte der Mannigfaltigkeit x in drei beliebige andere übergeführt werden können; der unendlich ferne Punkt macht dabei gar keinen Unterschied.

Die Zusammensetzung (Abschn. I, Kap. 17) der G_3 wird durch die Gleichungen:

$$(1) \qquad (X_1 X_2) = X_1 f, \quad (X_1 X_3) = 2 X_2 f, \quad (X_2 X_3) = X_3 f$$

bestimmt, ihre adjungirte Gruppe (a. a. O. Kap. 16) lautet demnach folgendermassen:

$$E_1 f = -e_2 \frac{\partial f}{\partial e_1} - 2 e_3 \frac{\partial f}{\partial e_2},$$

$$E_2 f = e_1 \frac{\partial f}{\partial e_1} - e_3 \frac{\partial f}{\partial e_3},$$

$$E_3 f = 2 e_1 \frac{\partial f}{\partial e_2} + e_2 \frac{\partial f}{\partial e_3}.$$

Da die G_3 keine ausgezeichnete infinitesimale Transformation enthält, so ist diese adjungirte Gruppe dreigliedrig.

Zunächst wollen wir untersuchen, welche Typen von eingliedrigen Untergruppen in unsrer G_3 enthalten sind, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wir wollen alle in ihr vorhandenen Typen von infinitesimalen Transformationen bestimmen. Dazu bedienen wir uns der im Abschn. I, S. 278—287 entwickelten Vorstellungen und Methoden.

Wir deuten in der allgemeinen infinitesimalen Transformation Xf unsrer G_3 die Grössen e_1, e_2, e_3 als homogene Punktcoordinaten einer Ebene, dann wird jede infinitesimale Transformation und also auch jede eingliedrige Untergruppe der G_3 durch einen Punkt dieser Ebene dargestellt und umgekehrt ist jeder Punkt der Ebene das Bild einer infinitesimalen Transformation und damit zugleich einer eingliedrigen Untergruppe der G_3.

Wir denken uns nunmehr die Punkte der Ebene e_1, e_2, e_3 durch die adjungirte Gruppe $E_1 f$, $E_2 f$, $E_3 f$ unsrer G_3 transformirt und suchen alle kleinsten invarianten Mannigfaltigkeiten, die in der Ebene auf-

treten (s. Abschn. I, S. 225), das heisst alle invarianten Mannigfaltigkeiten, deren Punkte bei der adjungirten Gruppe so transformirt werden, dass jeder Punkt von allgemeiner Lage auf einer solchen Mannigfaltigkeit in alle andern derartigen Punkte der Mannigfaltigkeit übergeht. Jede solche kleinste invariante Mannigfaltigkeit stellt dann einen Typus von infinitesimalen Transformationen und also auch einen Typus von eingliedrigen Untergruppen der G_3 dar. In der angegebenen Weise erhalten wir alle derartigen Typen; denn zwei eingliedrige Untergruppen gehören demselben Typus an, wenn sie innerhalb der G_3 mit einander gleichberechtigt sind, das aber tritt dann und nur dann ein, wenn der Bildpunkt der einen durch eine Transformation der adjungirten Gruppe in den Bildpunkt der andern übergeführt werden kann, das heisst, wenn die Bildpunkte beider auf derselben kleinsten invarianten Mannigfaltigkeit liegen.

Gesucht werden also jetzt alle Mannigfaltigkeiten der Ebene e_1, e_2, e_3, die bei der adjungirten Gruppe invariant bleiben. Da nun e_1, e_2, e_3 homogene Punktcoordinaten sind, so werden die betreffenden Mannigfaltigkeiten durch homogene Gleichungensysteme in e_1, e_2, e_3 dargestellt, das heisst durch Gleichungensysteme, welche die infinitesimale Transformation:

$$Ef = e_1 \frac{\partial f}{\partial e_1} + e_2 \frac{\partial f}{\partial e_2} + e_3 \frac{\partial f}{\partial e_3}$$

gestatten. Unsre Aufgabe kommt also darauf hinaus, in e_1, e_2, e_3 alle Gleichungensysteme zu bestimmen, die bei der viergliedrigen Gruppe: $E_1 f$, $E_2 f$, $E_3 f$, Ef invariant bleiben. Diese Bestimmung führen wir aus nach Anleitung von Abschn. I, Theorem 42, S. 237. Wir bilden also die Matrix:

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} -e_2 & -2e_3 & 0 \\ e_1 & 0 & -e_3 \\ 0 & 2e_1 & e_2 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix} .$$

Da nicht alle dreireihigen Determinanten dieser Matrix identisch verschwinden, so setzen wir alle dreireihigen Determinanten gleich Null und bekommen so, abgesehen von dem geometrisch bedeutungslosen Gleichungensysteme: $e_1 = e_2 = e_3 = 0$ die Gleichung:

$$(3) \qquad e_2^2 - 4e_1 e_3 = 0 ,$$

die sicher eine Mannigfaltigkeit von der verlangten Beschaffenheit darstellt. Beachten wir ferner, dass vermöge (3) nicht alle zweireihigen Determinanten der Matrix (2) verschwinden und dass wir durch Null-

setzen aller zweireihigen Determinanten nur das unbrauchbare Gleichungensystem: $e_1 = e_2 = e_3 = 0$ bekommen, so erkennen wir, dass die adjungirte Gruppe ausser dem Kegelschnitt (3) keine Punktfigur der Ebene e_1, e_2, e_3 invariant lässt.

Damit sind alle Typen von eingliedrigen Untergruppen der G_3 gefunden, es sind ihrer zwei: die Untergruppen des ersten Typus werden durch alle Punkte der Ebene dargestellt, die nicht auf dem Kegelschnitt (3) liegen, die Untergruppen des zweiten durch die Punkte dieses Kegelschnitts. Zwei eingliedrige Untergruppen der G_3 sind also innerhalb der G_3 dann und nur dann mit einander gleichberechtigt, wenn ihre Bildpunkte entweder beide ausserhalb des Kegelschnitts (3) oder beide auf diesem Kegelschnitt liegen.

Wollen wir für jeden der beiden Typen von eingliedrigen Untergruppen einen Repräsentanten haben, so brauchen wir nur irgend zwei Punkte der Ebene auszuwählen, von denen der eine nicht auf dem Kegelschnitte liegt, während der andere darauf liegt. Zwei solche Punkte sind: $e_1 = e_3 = 0$ und $e_2 = e_3 = 0$, also ist die eingliedrige Untergruppe xp ein Repräsentant des ersten, die eingliedrige Untergruppe p einer des zweiten Typus.

Die beiden gefundenen Typen lassen sich in sehr einfacher Weise charakterisiren.

Sucht man nämlich alle Punkte der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit x, die bei der eingliedrigen Gruppe:

$$Xf = (e_1 + e_2 x + e_3 x^2) p$$

invariant bleiben, so hat man nur die Gleichung zweiten Grades:

$$e_3 x^2 + e_2 x + e_1 = 0 \tag{4}$$

aufzulösen: die Wurzeln dieser Gleichung sind die Abscissen der gesuchten invarianten Punkte. Ist nun: $e_2^2 - 4 e_1 e_3 \neq 0$, gehört also Xf dem ersten Typus an, so hat die Gleichung (4) zwei verschiedene Wurzeln, von denen allerdings eine unendlich gross sein kann, folglich lässt Xf in diesem Falle zwei getrennte Punkte invariant, deren einer auch im Unendlichen liegen kann. Ist andrerseits $e_2^2 - 4 e_1 e_3 = 0$, so hat die Gleichung (4) zwei zusammenfallende Wurzeln, die auch unendlich gross sein können, mithin lässt Xf in diesem Falle einen doppelt zählenden Punkt invariant, der im Endlichen oder im Unendlichen liegen kann. Man sieht leicht, dass in jedem der beiden besprochenen Fälle die eingliedrige Untergruppe Xf durch die Punkte, die sie invariant lässt, vollständig bestimmt ist.

Es seien:

$$Xf = e_1 X_1 f + e_2 X_2 f + e_3 X_3 f, \quad Yf = \varepsilon_1 X_1 f + \varepsilon_2 X_2 f + \varepsilon_3 X_3 f$$

irgend zwei unabhängige infinitesimale Transformationen unsrer G_3, es sollen also nicht alle zweireihigen Determinanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{vmatrix}$$

verschwinden. Durch Combination von Xf mit Yf erhalten wir die infinitesimale Transformation:

$$(5)\quad (XY) = (e_1\varepsilon_2 - e_2\varepsilon_1)X_1f + 2(e_1\varepsilon_3 - e_3\varepsilon_1)X_2f + (e_2\varepsilon_3 - e_3\varepsilon_2)X_3f.$$

Unter der gemachten Voraussetzung werden Xf und Yf in der Ebene e_1, e_2, e_3 durch zwei verschiedene Punkte dargestellt, ebenso (XY) durch einen Punkt mit den homogenen Coordinaten:

$$\eta_1 = e_1\varepsilon_2 - e_2\varepsilon_1, \quad \eta_2 = 2(e_1\varepsilon_3 - e_3\varepsilon_1), \quad \eta_3 = e_2\varepsilon_3 - e_3\varepsilon_2.$$

Dieser Punkt lässt sich in sehr einfacher Weise geometrisch definiren; er befriedigt nämlich offenbar die beiden Gleichungen:

$$e_2\eta_2 - 2e_1\eta_3 - 2e_3\eta_1 = 0, \quad \varepsilon_2\eta_2 - 2\varepsilon_1\eta_3 - 2\varepsilon_3\eta_1 = 0,$$

er liegt mithin sowohl auf der Polare von e_1, e_2, e_3 in Bezug auf den Kegelschnitt (3) als auf der Polare von ε_1, ε_2, ε_3. Mit andern Worten:

Sind Xf und Yf irgend zwei unabhängige infinitesimale Transformationen unsrer G_3, so findet man den Bildpunkt der infinitesimalen Transformation (XY), indem man die Bildpunkte von Xf und Yf durch eine Gerade verbindet und den Pol dieser Geraden in Bezug auf den Kegelschnitt: $e_2^2 - 4e_1e_3 = 0$ sucht.

Diese geometrische Construction des Bildpunktes von (XY) aus den Bildpunkten von Xf und Yf zeigt deutlich, dass zwei unabhängige infinitesimale Transformationen unserer G_3 niemals vertauschbar sind (vgl. S. 6). Sind nämlich Xf und Yf von einander unabhängig, so sind ihre Bildpunkte verschieden und die Verbindungslinie ihrer Bildpunkte besitzt stets einen ganz bestimmten Pol, also kann der Ausdruck (XY) niemals identisch verschwinden.

Nunmehr ist es sehr leicht, alle zweigliedrigen Untergruppen der G_3 anzugeben.

Sind Xf und Yf zwei unabhängige infinitesimale Transformationen einer solchen Untergruppe, so lautet die allgemeine infinitesimale Transformation derselben: $\lambda Xf + \mu Yf$, also wird die Untergruppe in der Ebene: e_1, e_2, e_3 durch eine Gerade dargestellt. Damit nun aber Xf und Yf wirklich eine zweigliedrige Untergruppe erzeugen, ist noch nothwendig und hinreichend, dass eine Gleichung von der Form:

$$(XY) = c_1Xf + c_2Yf$$

besteht, mit andern Worten: eine Gerade der Ebene e_1, e_2, e_3 stellt nur dann eine zweigliedrige Untergruppe der G_3 dar, wenn sie ihren

Pol in Bezug auf den Kegelschnitt (3) enthält, das heisst wenn sie eine Tangente dieses Kegelschnitts ist. Also:

Die zweigliedrigen Untergruppen der G_3 werden in der Ebene e_1, e_2, e_3 durch die Tangenten des Kegelschnitts: $e_2^2 - 4e_1e_3 = 0$ dargestellt.

Es ist klar, dass vermöge der adjungirten Gruppe E_1f, E_2f, E_3f jede Tangente des Kegelschnitts in jede andere übergeführt werden kann, demnach sind die zweigliedrigen Untergruppen unsrer G_3 alle innerhalb der G_3 mit einander gleichberechtigt: es giebt in der G_3 nur einen einzigen Typus von zweigliedrigen Untergruppen. Als Repräsentanten dieses Typus können wir die Tangente im Punkte $e_2=e_3=0$ wählen. Die Gleichung dieser Tangente lautet $e_3 = 0$, demnach finden wir als Repräsentanten die Untergruppe: p, xp. Es ist das die grösste in der G_3 enthaltene Untergruppe, die den unendlich fernen Punkt invariant lässt. Da nun vermöge unsrer G_3 jeder Punkt x, auch der unendlich ferne in jeden andern übergeführt werden kann, so ergiebt sich, dass jede zweigliedrige Untergruppe unsrer G_3 einen Punkt im Endlichen oder Unendlichen stehen lässt und durch die Angabe dieses invarianten Punktes vollständig bestimmt ist.

Wir fassen jetzt die gewonnenen Ergebnisse zusammen:

Theorem 2. *Jede Untergruppe der allgemeinen projectiven Gruppe: p, xp, x^2p der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit x ist innerhalb dieser Gruppe mit einer der drei Untergruppen:*

$$\boxed{p,\ xp} \qquad \boxed{xp} \qquad \boxed{p}$$

gleichberechtigt; im ersten dieser drei möglichen Fälle lässt sie einen Punkt invariant, im zweiten lässt sie zwei getrennte, im dritten lässt sie zwei zusammenfallende Punkte invariant und zwar ist sie jedesmal durch Angabe der bei ihr invarianten Punkte vollständig bestimmt.

Es versteht sich von selbst, dass die vorstehenden Entwickelungen, soweit sie blos von der Zusammensetzung der Gruppe p, xp, x^2p abhängen, überhaupt auf jede dreigliedrige Gruppe X_1f, X_2f, X_3f von der Zusammensetzung:

$$(1) \qquad (X_1X_2) = X_1f, \quad (X_1X_3) = 2X_2f, \quad (X_2X_3) = X_3f$$

Anwendung finden. Insbesondere ergiebt sich sofort, dass jede Untergruppe einer solchen Gruppe innerhalb der Gruppe mit einer der drei Untergruppen:

$$\boxed{X_1f,\ X_2f} \qquad \boxed{X_2f} \qquad \boxed{X_1f}$$

gleichberechtigt ist.

Wir wollen jetzt noch einen bemerkenswerthen Satz ableiten, der uns später von Nutzen sein wird.

Es seien:

$$Y_i f = \alpha_{i1} X_1 f + \alpha_{i2} X_2 f + \alpha_{i3} X_3 f \quad (i = 1, 2, 3)$$

irgend drei infinitesimale Transformationen einer dreigliedrigen Gruppe $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$, von der wir annehmen, dass sie die Zusammensetzung (1) hat. Deuten wir nun wie oben die ∞^2 infinitesimalen Transformationen $e_1 X_1 f + e_2 X_2 f + e_3 X_3 f$ als Punkte einer Ebene, indem wir e_1, e_2, e_3 als homogene Punktcoordinaten auffassen, so werden $Y_1 f$, $Y_2 f$, $Y_3 f$ durch drei Punkte dargestellt, ferner wird $(Y_1 Y_2)$ der Pol der Geraden zwischen den Punkten $Y_1 f$ und $Y_2 f$ in Bezug auf den Kegelschnitt: $e_2^2 - 4 e_1 e_3 = 0$ und $(Y_1 Y_3)$ wird der Pol der Geraden zwischen $Y_1 f$ und $Y_3 f$. Hieraus folgt, dass $Y_1 f$ der Pol der Geraden ist, welche die beiden Punkte $(Y_1 Y_2)$ und $(Y_1 Y_3)$ mit einander verbindet, es mufs also eine Relation von der Form:

$$((Y_1 Y_2), (Y_1 Y_3)) = \varrho \, . \, Y_1 f$$

bestehen, wo ϱ eine Constante bezeichnet. Durch Ausrechnung findet man ϱ sehr leicht und damit den

Satz 1. *Ist $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ eine dreigliedrige Gruppe von der Zusammensetzung:*

$$(1) \qquad (X_1 X_2) = X_1 f, \quad (X_1 X_3) = 2 X_2 f, \quad (X_2 X_3) = X_3 f,$$

und sind:

$$Y_i f = \alpha_{i1} X_1 f + \alpha_{i2} X_2 f + \alpha_{i3} X_3 f \qquad (i = 1, 2, 3)$$

irgend drei infinitesimale Transformationen dieser Gruppe, so besteht eine Relation von der Gestalt:

$$(6) \qquad ((Y_1 Y_2), (Y_1 Y_3)) = 2 \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \cdot Y_1 f .$$

§ 5.

Wir wenden uns zur Betrachtung der allgemeinen linearen homogenen Gruppe:

$$(7) \qquad \begin{cases} x' = a_1 x + a_2 y \\ y' = a_3 x + a_4 y \end{cases}$$

einer zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit x, y.

Diese Gruppe ist viergliedrig, sie soll daher in dem gegenwärtigen Paragraphen kurz „die G_4“ genannt werden; erzeugt ist sie von den vier unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

$$(8) \qquad xp, \; yp, \; xq, \; yq .$$

Aus Abschn. I, Theorem 98, S. 561 geht hervor, dass unsre G_4 nur zwei invariante Untergruppen enthält, nämlich die specielle lineare homogene:

(9) $$xq,\ xp - yq,\ yp,$$

die dreigliedrig ist, und ausserdem noch eine eingliedrige, die von der ausgezeichneten infinitesimalen Transformation:

$$xp + yq$$

erzeugt ist. Namentlich ist die dreigliedrige Gruppe (9) wichtig, denn sie ist (Abschn. I, Theorem 96, S. 558) mit der allgemeinen projectiven Gruppe der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit holoedrisch isomorph; wählt man als Punktcoordinate der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit die Veränderliche $\mathfrak{x}$ und ordnet man den infinitesimalen Transformationen (9) der Reihe nach die Transformationen:

(10) $$+\mathfrak{p},\quad -2\mathfrak{x}\mathfrak{p},\quad -\mathfrak{x}^2\mathfrak{p}$$

zu, so tritt der holoedrische Isomorphismus der beiden Gruppen (9) und (10) sofort zu Tage.

Da es sich empfiehlt, das Vorhandensein der beiden invarianten Untergruppen unsrer G_4 sichtbar zu machen, so ersetzen wir von jetzt ab die vier unabhängigen infinitesimalen Transformationen (8) unsrer G_4 durch die vier folgenden:

$$X_1 f = xq,\quad X_2 f = xp - yq,\quad X_3 f = yp,$$
$$X_4 f = xp + yq.$$

Die Zusammensetzung unsrer G_4 wird dann durch die Gleichungen:

$$(X_1 X_2) = -2X_1 f,\quad (X_1 X_3) = X_2 f,\quad (X_2 X_3) = -2X_3 f$$
$$(X_1 X_4) = (X_2 X_4) = (X_3 X_4) = 0$$

dargestellt.

Zunächst bestimmen wir wieder alle in der G_4 vorhandenen Typen von eingliedrigen Untergruppen. Zu diesem Zwecke deuten wir in der allgemeinen infinitesimalen Transformation:

$$e_1 xq + e_2(xp - yq) + e_3 yp + e_4(xp + yq)$$

unsrer G_4 die Grössen $e_1 \ldots e_4$ als homogene Punktcoordinaten eines dreifach ausgedehnten Raumes. Sodann denken wir uns diesen Raum durch die adjungirte Gruppe:

$$E_1 f = 2e_2 \frac{\partial f}{\partial e_1} - e_3 \frac{\partial f}{\partial e_2}$$
$$E_2 f = -2e_1 \frac{\partial f}{\partial e_1} + 2e_3 \frac{\partial f}{\partial e_3}$$
$$E_3 f = e_1 \frac{\partial f}{\partial e_2} - 2e_2 \frac{\partial f}{\partial e_3}$$
$$E_4 f = 0$$

unsrer G_4 transformirt und suchen alle kleinsten bei der adjungirten Gruppe invarianten Mannigfaltigkeiten auf, mit andern Worten: wir suchen in den Veränderlichen $e_1 \ldots e_4$ alle Gleichungensysteme, welche die infinitesimalen Transformationen $E_1 f \ldots E_4 f$ und ausserdem noch die Transformation:

$$Ef = e_1 \frac{\partial f}{\partial e_1} + e_2 \frac{\partial f}{\partial e_2} + e_3 \frac{\partial f}{\partial e_3} + e_4 \frac{\partial f}{\partial e_4}$$

gestatten. Die identisch verschwindende Transformation $E_4 f$ können wir dabei natürlich von vornherein weglassen.

Die Transformationen $E_1 f$, $E_2 f$, $E_3 f$, Ef erzeugen eine viergliedrige Gruppe, deren Determinante

$$(11) \qquad \begin{vmatrix} 2e_2 & -e_3 & 0 & 0 \\ -2e_1 & 0 & 2e_3 & 0 \\ 0 & e_1 & -2e_2 & 0 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{vmatrix}$$

identisch verschwindet, während ihre dreireihigen Unterdeterminanten nicht alle identisch null sind. Die vier Gleichungen:

$$E_1 f = 0, \quad E_2 f = 0, \quad E_3 f = 0, \quad Ef = 0$$

haben daher eine Lösung gemein, die gleich einer willkürlichen Constanten gesetzt eine Schaar von ∞^1 invarianten Flächen liefert, nämlich die Schaar der Flächen zweiten Grades:

$$(12) \qquad \frac{e_2^2 + e_1 e_3}{e_4^2} = \text{const.},$$

unter denen als Gränzfälle ein Kegel: $e_2^2 + e_1 e_3 = 0$ und eine doppeltzählende Ebene: $e_4^2 = 0$ enthalten sind.

Um die übrigen invarianten Mannigfaltigkeiten zu finden, müssen wir die drei- und die zweireihigen Unterdeterminanten von (11) gleich Null setzen. Durch Nullsetzen der dreireihigen Unterdeterminanten erhalten wir erstens das Gleichungensystem:

$$(13) \qquad e_2^2 + e_1 e_3 = 0, \quad e_4 = 0,$$

also einen invarianten Kegelschnitt: die Schnittcurve des invarianten Kegels: $e_2^2 + e_1 e_3 = 0$ mit der invarianten Ebene $e_4 = 0$. Zweitens erhalten wir:

$$(14) \qquad e_1 = e_2 = e_3 = 0,$$

also einen invarianten Punkt: die Spitze des invarianten Kegels $e_2^2 + e_1 e_3 = 0$; es ist das der Bildpunkt der ausgezeichneten infinitesimalen Transformation unsrer G_4, der Transformation $xp + yq$. Durch Nullsetzen aller zweireihigen Unterdeterminanten erhalten wir nur das Gleichungensystem (14), also nichts neues.

Damit sind alle bei der Gruppe $E_1 f \ldots E_4 f$ invarianten Mannigfaltigkeiten des Raumes $e_1 \ldots e_4$ gefunden, denn der Kegelschnitt (13) enthält augenscheinlich keine kleinere invariante Mannigfaltigkeit. Uebrigens hätten wir das Auftreten der Ebene $e_4 = 0$ und des darin liegenden Kegelschnitts (13) voraussehen können, denn die dreigliedrige invariante Untergruppe (9) unsrer G_4 wird in dem Raume $e_1 \ldots e_4$ gerade durch die Ebene $e_4 = 0$ abgebildet; andrerseits werden die Punkte der Ebene $e_4 = 0$ bei der adjungirten Gruppe $E_1 f \ldots E_4 f$ offenbar genau so transformirt, wie bei der adjungirten Gruppe $E_1 f$, $E_2 f$, $E_3 f$ der dreigliedrigen Gruppe (9), denn $E_4 f$ lässt alle Punkte des Raumes und also auch alle Punkte der Ebene $e_4 = 0$ stehen. Aus den Entwickelungen des vorigen Paragraphen ergiebt sich nunmehr sofort, dass in der Ebene $e_4 = 0$ keine andre invariante Mannigfaltigkeit auftritt als ein gewisser Kegelschnitt.

Erwähnt mag noch werden, dass die Gruppe $E_1 f$, $E_2 f$, $E_3 f$ nur eine andere Form einer sehr bekannten Gruppe ist. Denkt man sich nämlich das homogene Coordinatensystem im Raume $e_1 \ldots e_4$ so gewählt, dass die Ebene $e_4 = 0$ in die unendlich ferne Ebene übergeht und der Kegelschnitt (13) in den imaginären Kugelkreis, so ist unsre Gruppe nichts andres als die Gruppe aller Rotationen um den Punkt $e_1 = e_2 = e_3 = 0$; die ∞^1 Flächen zweiten Grades (12) werden einfach die ∞^1 Kugeln mit dem Mittelpunkte $e_1 = e_2 = e_3 = 0$.

Nachdem wir alle bei der Gruppe $E_1 f \ldots E_4 f$ invarianten Mannigfaltigkeiten gefunden haben, können wir sofort alle Typen von infinitesimalen Transformationen oder, was auf dasselbe hinauskommt, alle Typen von eingliedrigen Untergruppen unsrer G_4 angeben. Jeder solche Typus wird ja im Raume $e_1 \ldots e_4$ durch eine bei der adjungirten Gruppe $E_1 f \ldots E_4 f$ invariante Mannigfaltigkeit dargestellt und zwar durch eine sogenannte kleinste invariante Mannigfaltigkeit (s. S. 14). Es ergiebt sich auf diese Weise Folgendes:

1) Jede nicht ausgeartete unter den ∞^1 Flächen zweiten Grades (12) stellt einen Typus dar, nur müssen jedesmal alle Punkte des Kegelschnitts (13) von der Fläche ausgeschlossen werden. Das sind also ∞^1 verschiedene Typen.

2) Der Kegel $e_2^2 + e_1 e_3 = 0$ stellt einen Typus dar, wenn man die Spitze und den Kegelschnitt (13) weglässt.

Die übrigen Typen sind:

3) Die Ebene $e_4 = 0$ mit Ausschluss des Kegelschnitts (13).

4) Der Kegelschnitt (13).

5) Die Spitze $e_1 = e_2 = e_3 = 0$ des Kegels $e_2^2 + e_1 e_3 = 0$.

Wollen wir für jeden der gefundenen Typen einen Repräsentanten

haben, so müssen wir jedesmal auf der betreffenden kleinsten invarianten Mannigfaltigkeit einen Punkt auswählen. Im ersten Falle z. B. wird die invariante Mannigfaltigkeit durch eine Gleichung von der Form:

$$e_4^2 = c^2(e_2^2 + e_1 e_3)$$

dargestellt, wo c eine endliche von Null verschiedene Constante bedeutet und wo $e_1 \ldots e_4$ alle Werthe annehmen können, welche die Gleichungen (13) nicht erfüllen. Wir können daher wählen:

$$e_1 = e_3 = 0, \quad e_2 = 1$$

und etwa: $e_4 = c$, für die ∞^1 Typen von der ersten Art erhalten wir dann die ∞^1 Repräsentanten:

1) $$xp - yq + c(xp + yq) \qquad (c \neq 0).$$

Zu bemerken ist hier, dass zwei entgegengesetzt gleiche Werthe von c stets zwei infinitesimale Transformationen liefern, die auf derselben Fläche zweiten Grades liegen, die also innerhalb der G_4 mit einander gleichberechtigt sind. Es liegt das daran, dass die Gleichung $e_4^2 = c^2$ sowohl durch $e_4 = c$ als durch $e_4 = -c$ befriedigt wird.

In ähnlicher Weise können wir zu Repräsentanten der übrigen Typen die nachstehenden eingliedrigen Gruppen wählen:

2) $xq + xp + yq$, 3) $xp - yq$, 4) xq, 5) $xp + yq$.

Jetzt bleiben noch alle zwei- und alle dreigliedrigen Untergruppen unsrer G_4 zu bestimmen.

Es seien:

$$Y_i f = \alpha_i xq + \beta_i(xp - yq) + \gamma_i yp + \delta_i(xp + yq) \quad (i = 1, 2)$$

zwei unabhängige infinitesimale Transformationen unsrer G_4. Lassen wir aus ihnen die Glieder mit $xp + yq$ weg, so erhalten wir die beiden verkürzten infinitesimalen Transformationen:

$$\overline{Y}_i f = \alpha_i xq + \beta_i(xp - yq) + \gamma_i yp \quad (i = 1, 2).$$

Diese verkürzten Transformationen brauchen allerdings nicht mehr unabhängig von einander zu sein, jedenfalls ist aber:

(15) $$(Y_1 Y_2) = (\overline{Y}_1 \overline{Y}_2),$$

da ja $xp + yq$ mit allen infinitesimalen Transformationen der G_4 vertauschbar ist.

Die Gleichung (15) führt uns zu einer sehr einfachen Construction des Bildpunktes von $(Y_1 Y_2)$ aus den Bildpunkten von $Y_1 f$ und $Y_2 f$.

Offenbar gehören nämlich die verkürzten infinitesimalen Transformationen $\overline{Y}_1 f$ und $\overline{Y}_2 f$ der speciellen linearen homogenen Gruppe:

xq, $xp - yq$, yp an und werden daher durch Punkte in der Ebene $e_4 = 0$ dargestellt. Die Bildpunkte von $\overline{Y}_1 f$ und $\overline{Y}_2 f$ erhält man, wenn man die Bildpunkte von $Y_1 f$ und $Y_2 f$ mit dem Punkte $xp + yq$, also mit der Spitze des Kegels $e_2^2 + e_1 e_3 = 0$ durch gerade Linien verbindet und die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Ebene $e_4 = 0$ aufsucht, oder kürzer: indem man die Punkte $Y_1 f$ und $Y_2 f$ vom Punkte $xp + yq$ aus auf die Ebene $e_4 = 0$ projicirt. Den Punkt $(Y_1 Y_2) = (\overline{Y}_1 \overline{Y}_2)$ findet man daher, wenn man in der Ebene $e_4 = 0$ zu der Verbindungslinie der beiden Punkte $\overline{Y}_1 f$, $\overline{Y}_2 f$ den Pol in Bezug auf den Kegelschnitt (13) sucht.

Die angegebene Construction für den Punkt $(Y_1 Y_2)$ liefert im Allgemeinen stets einen ganz bestimmten Punkt der Ebene: $e_4 = 0$, keinen bestimmten Punkt liefert sie nur dann, wenn die Verbindungslinie der Punkte $Y_1 f$ und $Y_2 f$ durch den Punkt $xp + yq$ geht, dann fallen nämlich entweder die beiden Punkte $\overline{Y}_1 f$ und $\overline{Y}_2 f$ zusammen und es wird $(Y_1 Y_2) = (\overline{Y}_1 \overline{Y}_2) = 0$, oder einer der Punkte $Y_1 f$ und $Y_2 f$ fällt mit dem Punkte $xp + yq$ zusammen und es wird $(Y_1 Y_2) = 0$. Hieraus folgt, *dass zwei unabhängige infinitesimale Transformationen unsrer G_4 dann und nur dann vertauschbar sind, wenn die Verbindungslinie ihrer Bildpunkte durch den Punkt $xp + yq$ geht.*

Damit sind alle zweigliedrigen Untergruppen unsrer G_4 gefunden, deren infinitesimale Transformationen vertauschbar sind; jede solche Untergruppe wird durch eine Gerade dargestellt, die den Punkt $xp + yq$ enthält. Nun kann aber bei der adjungirten Gruppe unsrer G_4 augenscheinlich jede Gerade durch den Punkt $xp + yq$, die keine Erzeugende des Kegels $e_2^2 + e_1 e_3 = 0$ ist, in jede andere Gerade von derselben Beschaffenheit übergehen und ebenso kann jede Erzeugende dieses Kegels in jede andre übergehen. Mit andern Worten:

In unsrer G_4 giebt es zwei Typen von zweigliedrigen Untergruppen mit vertauschbaren infinitesimalen Transformationen. Die Untergruppen vom ersten Typus werden durch die Geraden des Raumes $e_1 \ldots e_4$ dargestellt, welche den Punkt $xp + yq$ enthalten, aber keine Erzeugenden des Kegels $e_2^2 + e_1 e_3 = 0$ sind, die vom zweiten Typus sind die Erzeugenden dieses Kegels. Zu Repräsentanten der beiden Typen können wir die zweigliedrigen Untergruppen:

$$xp - yq,\ xp + yq \quad \text{und} \quad xq,\ xp + yq$$

wählen.

Jede noch übrige zweigliedrige Untergruppe der G_4 wird durch eine Gerade dargestellt, die den Punkt $xp + yq$ nicht trifft. Diese Gerade liegt entweder ganz in der Ebene $e_4 = 0$ oder sie hat mit dieser Ebene blos einen Punkt gemein. Im ersten Falle haben wir

es offenbar mit einer Untergruppe der speciellen linearen homogenen Gruppe: xq, $xp - yq$, yp zu thun, die betreffende Untergruppe wird daher nothwendig durch eine Tangente des Kegelschnitts (13) dargestellt. Im zweiten Falle seien $Y_1 f$ und $Y_2 f$ zwei unabhängige infinitesimale Transformationen der Untergruppe, dann muss der Punkt $(Y_1 Y_2)$, der ein ganz bestimmter Punkt der Ebene $e_4 = 0$ ist, auf der Geraden zwischen $Y_1 f$ und $Y_2 f$ liegen, es muss also $(Y_1 Y_2)$ eben der Punkt sein, den die Verbindungslinie von $Y_1 f$ und $Y_2 f$ mit der Ebene $e_4 = 0$ gemein hat. Man erkennt hieraus leicht, dass der Punkt $(Y_1 Y_2)$ auf dem Kegelschnitt (13) liegen und dass die Gerade zwischen $Y_1 f$ und $Y_2 f$ in einer Tangentialebene des Kegels $e_2^2 + e_1 e_3 = 0$ enthalten sein muss. Umgekehrt stellt auch wirklich jede Gerade, die den Kegelschnitt (13) trifft und in einer Tangentialebene des Kegels $e_2^2 + e_1 e_3 = 0$ liegt, eine zweigliedrige Untergruppe dar.

Damit sind alle zweigliedrigen Untergruppen der G_4 gefunden, deren infinitesimale Transformationen nicht vertauschbar sind. Es sind das erstens alle Tangenten des Kegelschnitts (13) in der Ebene $e_4 = 0$ und zweitens alle Tangenten des Kegels $e_2^2 + e_1 e_3 = 0$, die den Kegelschnitt (13) treffen, aber weder durch den Punkt $xp + yq$ gehen, noch in der Ebene $e_4 = 0$ liegen.

Die Untergruppen der ersten Kategorie sind innerhalb der G_4 alle mit einander gleichberechtigt und bilden einen Typus für sich, zu dessen Repräsentanten wir die Gruppe:

$$xq,\ xp - yq$$

wählen können.

Was die Untergruppen der zweiten Kategorie anbetrifft, so bedenke man, dass die nicht ausgearteten unter den Flächen zweiten Grades (12) sämmtlich den Kegel $e_2^2 + e_1 e_3 = 0$ längs des Kegelschnitts (13) berühren, dass also die Erzeugenden dieser Flächen zweiten Grades alle auf den Tangentialebenen des Kegels $e_2^2 + e_1 e_3 = 0$ liegen. Die Untergruppen der zweiten Kategorie werden also im Raume $e_1 \ldots e_4$ durch die Erzeugenden der nicht ausgearteten unter den Flächen zweiten Grades (12) dargestellt. Nun geht bei der adjungirten Gruppe jeder Punkt einer solchen Fläche zweiten Grades, der nicht auf dem Kegel (13) liegt, in jeden andern über, also kann auch jede Erzeugende der Fläche in jede andere Erzeugende derselben Schaar auf der Fläche übergeführt werden, dagegen kann eine solche Erzeugende bei der adjungirten Gruppe niemals in eine Erzeugende einer andern Fläche zweiten Grades und auch nie in eine Erzeugende der andern Schaar auf derselben Fläche übergehen; das letztere folgt daraus, dass die adjungirte Gruppe continuirlich ist. Demnach zerfallen die zweigliedrigen

Untergruppen der zweiten Kategorie in unendlich viele Typen. Jede nicht ausgeartete unter den Flächen zweiten Grades (12) liefert zwei solche Typen, der eine wird von der ersten Schaar von Erzeugenden der Fläche dargestellt, der andere von der zweiten Schaar. Um für jeden solchen Typus einen Repräsentanten zu haben, brauchen wir nur in irgend einer Tangentialebene des Kegels $e_2^2 + e_1 e_3 = 0$ alle Tangenten dieses Kegels anzugeben, die den Kegelschnitt (13) treffen, aber weder in der Ebene $e_4 = 0$ liegen, noch durch den Punkt $xp + yq$ gehen, denn jede Tangentialebene des Kegels geht ja bei der adjungirten Gruppe in jede andere über. Wählen wir z. B. die Tangentialebene des Kegels, welche den Punkt xq enthält, so bekommen wir für unsre unendlich vielen Typen die Repräsentanten:

$$xq,\ xp - yq + c(xp + yq),$$

wo c eine endliche von 0 verschiedene Constante bezeichnet. Hier liefern entgegengesetzt gleiche Werthe von c stets Untergruppen, die durch zwei Erzeugende derselben Fläche zweiten Grades dargestellt werden, aber diese Erzeugenden gehören verschiedenen Schaaren an, also sind die betreffenden beiden Untergruppen innerhalb der G_4 nicht mit einander gleichberechtigt.

Endlich sind noch die dreigliedrigen Untergruppen unsrer G_4 zu bestimmen.

Eine dreigliedrige Untergruppe g_3 der G_4 wird im Raume $e_1 \ldots e_4$ durch eine Ebene dargestellt. Fällt diese Ebene mit der Ebene $e_4 = 0$ zusammen, so ist die g_3 nichts anderes als die dreigliedrige invariante Untergruppe:

$$xq,\ xp - yq,\ yp \tag{9}$$

der G_4. In jedem andern Falle schneidet die Bildebene von g_3 die Ebene $e_4 = 0$ in einer Geraden, die nothwendig eine zweigliedrige Untergruppe der G_4 und zugleich eine Untergruppe der Gruppe (9) darstellt. Hieraus folgt, dass die betreffende Gerade eine Tangente des Kegelschnitts (13) ist und dass die Bildebene der Untergruppe g_3 diesen Kegelschnitt berührt. Sind nun $Y_1 f$ und $Y_2 f$ irgend zwei unabhängige infinitesimale Transformationen von g_3 und hat $Y_1 f$ seinen Bildpunkt auf der erwähnten Kegelschnittstangente, während der Bildpunkt von $Y_2 f$ nicht auf dieser Tangente liegt, so muss die infinitesimale Transformation $(Y_1 Y_2)$ entweder identisch verschwinden oder ihren Bildpunkt auf jener Tangente haben; das erste tritt nur ein, wenn die drei Punkte $Y_1 f$, $Y_2 f$ und $xp + yq$ in einer Geraden liegen, das zweite nur dann, wenn die Ebene, welche durch $Y_2 f$ und die Tangente be-

stimmt ist, auch den Punkt $xp + yq$ enthält. Folglich muss die Bildebene von g_3, wenn sie nicht mit der Ebene $e_4 = 0$ zusammenfällt, durch den Punkt $xp + yq$ gehen, sie muss eine Tangentialebene des Kegels $e_2^2 + e_1 e_3 = 0$ sein. Wirklich stellt auch, wie man sich leicht überzeugt, jede Tangentialebene dieses Kegels eine dreigliedrige Untergruppe der G_4 dar. Alle diese Untergruppen sind innerhalb der G_4 mit einander gleichberechtigt, denn bei der adjungirten Gruppe der G_4 geht jede Tangentialebene des Kegels in jede andre über.

Es giebt demnach zwei Typen von dreigliedrigen Untergruppen unsrer G_4. Der erste Typus wird von der invarianten Untergruppe:

$$xq,\ xp - yq,\ yp$$

allein gebildet, die Gruppen des zweiten Typus werden im Raume $e_1 \ldots e_4$ durch die Tangentialebenen des Kegels: $e_2^2 + e_1 e_3 = 0$ abgebildet; ein Repräsentant dieses Typus ist die Gruppe:

$$xq,\ xp - yq,\ \ xp + yq.$$

Fassen wir jetzt die gewonnenen Ergebnisse zusammen:

Theorem 3. *Ist eine Untergruppe der allgemeinen linearen homogenen Gruppe* G_4*:*

$$xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq$$

der Ebene x, y **dreigliedrig**, *so ist sie entweder die invariante Untergruppe:*

1 $\boxed{xq,\ xp - yq,\ yp}$

oder sie ist innerhalb der allgemeinen linearen homogenen Gruppe mit der Untergruppe:

2 $\boxed{xq,\ xp - yq,\ xp + yq}$

gleichberechtigt; jede **zweigliedrige** *Untergruppe der* G_4 *ist innerhalb der* G_4 *mit einer der Untergruppen:*

3 $\boxed{xq,\ xp - yq + c(xp + yq) \quad c \neq 0}$ 4 $\boxed{xq,\ xp - yq}$

5 $\boxed{xp - yq,\ xp + yq}$ 6 $\boxed{xq,\ xp + yq}$

gleichberechtigt. Endlich ist jede **eingliedrige** *Untergruppe der* G_4 *entweder mit einer der Untergruppen:*

7 $\boxed{xp - yq + c(xp + yq) \quad c \neq 0}$ 8 $\boxed{xp - yq}$

9 $\boxed{xq + xp + yq}$ 10 $\boxed{xq}$

gleichberechtigt oder sie ist von der ausgezeichneten infinitesimalen Transformation:

11 $$\boxed{xp + yq}$$

der G_4 erzeugt. Die in zwei Fällen auftretende willkürliche Constante c ist ein wesentlicher Parameter, das heisst verschiedenen Werthen von c entsprechen Untergruppen, die innerhalb der G_4 im Allgemeinen nicht gleichberechtigt sind.

Es versteht sich von selbst, dass wir auf Grund der vorstehenden Entwickelungen bei jeder viergliedrigen Gruppe, die mit der allgemeinen linearen homogenen Gruppe der Ebene x, y gleichzusammengesetzt ist, alle Typen von Untergruppen und auch alle Untergruppen überhaupt sofort angeben können.

Während wir uns bisher blos mit der Zusammensetzung der G_4:

$$xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq$$

beschäftigt haben, wollen wir zum Schluss noch über die G_4 in ihrer Eigenschaft als Gruppe der Ebene x, y einige Bemerkungen machen.

Die G_4 lässt den Punkt $x = y = 0$ invariant und vertauscht die ∞^1 durch diesen Punkt gehenden Geraden unter einander. Unter den infinitesimalen Transformationen der G_4 giebt es eine aber auch nur eine, die jede Gerade durch den Punkt $x = y = 0$ stehen lässt, es ist das die ausgezeichnete infinitesimale Transformation $xp + yq$ der Gruppe. Folglich werden die ∞^1 Geraden durch den Punkt $x = y = 0$ bei unsrer G_4 durch eine dreigliedrige Gruppe transformirt, die projectiv und mit der G_4 meroedrisch isomorph ist. Diese dreigliedrige Gruppe ist offenbar nichts andres als die allgemeine projective Gruppe der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit; man kann sich davon leicht direkt überzeugen. Die Veränderlichen x, y lassen sich nämlich als homogene Coordinaten der ∞^1 Geraden durch den Punkt $x = y = 0$ auffassen; ersetzt man nun diese zwei homogenen Coordinaten durch eine nichthomogene:

$$x_1 = \frac{x}{y}$$

und bestimmt man, wie x_1 bei den infinitesimalen Transformationen der G_4 transformirt wird, so findet man, dass es gerade durch die allgemeine projective Gruppe p_1, $x_1 p_1$, $x_1^2 p_1$ der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit transformirt wird. Die Ausführung dieser Rechnung s. Abschn. I, S. 579, vgl. auch ebenda S. 558, Theorem 96.

Aus dem Gesagten geht hervor, dass jede r-gliedrige Untergruppe unsrer G_4 die ∞^1 Geraden durch den Punkt $x = y = 0$ entweder

r-gliedrig oder $(r-1)$-gliedrig transformirt und zwar tritt der erste Fall ein, wenn die infinitesimale Transformation $xp+yq$ in der Untergruppe fehlt, der zweite, wenn $xp+yq$ in der Untergruppe enthalten ist. Die einzige Untergruppe der G_4, die jene Geraden ebenso wie die G_4 dreigliedrig transformirt, ist die invariante Untergruppe $xq, xp-yq, yp$. Verbinden wir hiermit die Ergebnisse des vorigen Paragraphen, nach denen jede Untergruppe der allgemeinen projectiven Gruppe der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit entweder einen Punkt oder zwei getrennte Punkte oder zwei zusammenfallende Punkte invariant lässt, so erhalten wir den

Satz 2. *Die allgemeine lineare homogene Gruppe* G_4*:*

$$xq,\ xp-yq,\ yp,\ xp+yq$$

der Ebene x, y *enthält nur eine Untergruppe, die ebenso wie die* G_4 *keine Gerade durch den invarianten Punkt* $x=y=0$ *stehen lässt, es ist das die dreigliedrige invariante Untergruppe:*

$$xq,\ xp-yq,\ yp$$

der G_4*. Jede andre Untergruppe der* G_4 *lässt mindestens eine Gerade durch den Punkt* $x=y=0$ *in Ruhe.*

Lässt eine Untergruppe der G_4 blos *eine* Gerade durch den Punkt $x=y=0$ invariant, so ist sie entweder dreigliedrig und gehört dem Typus 2 des Theorems an, oder sie ist zweigliedrig und gehört einem der Typen 3 und 4 an. Lässt sie zwei getrennte Gerade durch den Punkt stehen, so ist sie entweder zweigliedrig und vom Typus 5 oder eingliedrig und von einem der Typen 7 und 8; lässt sie zwei zusammenfallende Gerade stehen, so ist sie zweigliedrig vom Typus 6 oder eingliedrig und von einem der Typen 9 und 10. Uebrig bleibt nur die eingliedrige Untergruppe $xp+yq$, bei der jede Gerade durch den Punkt $x=y=0$ ihre Lage behält.

Kapitel 3.

Bestimmung aller endlichen continuirlichen Gruppen von Punkttransformationen der Ebene.

Wenn es in der Ueberschrift heisst, dass alle*) endlichen continuirlichen Gruppen von Punkttransformationen der Ebene bestimmt

*) Die Bestimmung aller Gruppen der Ebene hat Lie schon 1874 in den Göttinger Nachrichten skizzirt. Eine ausführliche Begründung gab er 1878 im Norwegischen Archiv und später in den Math. Ann. Bd. 16. Das im Text benutzte

werden sollen, ist das nicht so zu verstehen, als ob wir diese Gruppen alle wirklich hinschreiben wollten. Dies zu thun ist keineswegs unsre Absicht; wir verfahren vielmehr wie in Abschn. I, Kap. 22, S. 434 f. bei der Bestimmung aller r-gliedrigen transitiven Gruppen von gegebener Zusammensetzung. Wir theilen die endlichen continuirlichen Gruppen von Punkttransformationen der Ebene in Typen, indem wir zwei dieser Gruppen stets dann aber auch nur dann zu demselben Typus rechnen, wenn die eine mit der andern durch eine Punkttransformation der Ebene ähnlich ist. Auf diese Weise gehört jede der gesuchten Gruppen einem und nur einem Typus an; umgekehrt sind alle einem bestimmten Typus angehörigen Gruppen ohne Weiteres angebbar, wenn man eine unter ihnen kennt, und diese eine Gruppe kann als Repräsentant des ganzen Typus angesehen werden. Demnach dürfen wir die in der Ueberschrift bezeichnete Aufgabe durch die folgende ersetzen:

Es soll für jeden Typus von endlichen continuirlichen Gruppen von Punkttransformationen der Ebene ein aber auch nur ein Repräsentant angegeben werden.

Ist diese Aufgabe gelöst, so kennen wir im Grunde alle endlichen continuirlichen Gruppen von Punkttransformationen der Ebene, denn jede dieser Gruppen ist mit einem einzigen der gefundenen Repräsentanten durch eine Punkttransformation der Ebene ähnlich.

Nach Abschn. I, S. 220 f. zerfallen die Gruppen der Ebene in zwei getrennte Kategorien, von denen die erste alle primitiven, die zweite alle imprimitiven Gruppen umfasst; überdies ist klar, dass zwei demselben Typus angehörige Gruppen der Ebene stets entweder beide primitiv oder beide imprimitiv sind. In Folge dessen können wir die Aufgabe, auf deren Erledigung wir das in der Kapitelüberschrift gestellte Problem zurückgeführt haben, der Reihe nach erst für die primitiven und sodann für die imprimitiven Gruppen lösen. Bevor wir jedoch dazu übergehen, müssen wir uns erst noch vergegenwärtigen, woran es sich erkennen lässt, ob eine vorgelegte endliche continuirliche Gruppe von Punkttransformationen der Ebene primitiv ist oder imprimitiv. Wir schicken deshalb einen Paragraphen voraus, in dem wir die allgemeinen Entwickelungen des Abschnitts I über Primitivität und Imprimitivität auf die Gruppen der Ebene übertragen und, soweit es für diesen besonderen Fall nöthig ist, vervollständigen.

---

einfache Verfahren zur Bestimmung aller imprimitiven Gruppen der Ebene hat Lie zuerst 1885 in seinem Archiv angegeben und seit 1886 in seinen Vorlesungen an der Universität Leipzig.

§ 6.

Nach Abschnitt I, S. 220 f. ist eine r-gliedrige Gruppe:

$$X_k f = \xi_k(x, y)p + \eta_k(x, y)q \qquad (k = 1 \ldots r)$$

der Ebene x, y dann und nur dann imprimitiv, wenn sie eine Schaar von ∞^1 Curven $\varphi(x, y) = \text{const.}$ invariant lässt. Ist daher die Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ intransitiv, so ist sie zugleich imprimitiv, denn eine intransitive Gruppe der Ebene zerlegt die Ebene in ∞^1 Curven: $\psi(x, y) = \text{const.}$, die sämmtlich invariant bleiben, sie lässt also zugleich die ganze Curvenschaar: $\psi(x, y) = \text{const.}$ invariant.

Die angegebene nothwendige und hinreichende Bedingung für die Imprimitivität der Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ kann nun verschiedene Formen erhalten. Zunächst kommt sie darauf hinaus, dass bei der betreffenden Gruppe eine gewisse lineare partielle Differentialgleichung:

$$Af = \alpha(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \beta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

invariant bleibt (a. a. O. S. 221). Bedenken wir aber, dass mit der linearen partiellen Differentialgleichung $Af = 0$ die gewöhnliche Differentialgleichung:

$$\alpha(x, y) \,.\, dy - \beta(x, y) \,.\, dx = 0 \tag{1}$$

invariant verknüpft ist, so erkennen wir sofort, dass wir auch sagen dürfen:

Die r-gliedrige Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ der Ebene x, y ist dann und nur dann imprimitiv, wenn sie eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung von der Form (1) *invariant lässt.*

Wir erinnern jetzt daran, dass durch $dx : dy$ in jedem Punkte der Ebene x, y eine gewisse Fortschreitungsrichtung bestimmt wird und dass in Folge dessen $x, y, dx : dy$ als Coordinaten der ∞^3 Linienelemente der Ebene aufgefasst werden können. Wollen wir daher wissen, ob unsre Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ eine gewöhnliche Differentialgleichung von der Form (1) invariant lässt, so müssen wir zunächst untersuchen, in welcher Weise sie die Linienelemente der Ebene x, y transformirt und insbesondere feststellen, ob sie eine Schaar von ∞^2 Linienelementen invariant lässt, die durch eine Gleichung von der besonderen Form (1) dargestellt wird.

Zu diesem Zwecke betrachten wir wie in Abschn. I, S. 524 ff. die Veränderlichen x, y als Functionen einer Hülfsveränderlichen t und erweitern die infinitesimalen Transformationen $X_k f$ durch Mitnahme der Differentialquotienten:

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dy}{dt} = y'.$$

Wir erhalten so in den Veränderlichen x, y, x', y' die erweiterte Gruppe:

$$X_k'f = \xi_k p + \eta_k q + \xi_k' p' + \eta_k' q' \qquad (k = 1 \ldots r),$$

wo von den Abkürzungen:

$$x' \frac{\partial \xi_k}{\partial x} + y' \frac{\partial \xi_k}{\partial y} = \xi_k', \quad \frac{\partial f}{\partial x'} = p'$$

$$x' \frac{\partial \eta_k}{\partial x} + y' \frac{\partial \eta_k}{\partial y} = \eta_k', \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = q'$$

Gebrauch gemacht worden ist. Da nun $x, y, x' : y'$ offenbar ebensogut wie $x, y, dx : dy$ als Coordinaten der ∞^3 Linienelemente der Ebene x, y benutzt werden können, so giebt die erweiterte Gruppe $X_1'f \ldots X_r'f$ an, wie die Linienelemente bei der Gruppe $X_1f \ldots X_rf$ transformirt werden; es handelt sich also jetzt noch darum, zu ermitteln, ob die Gruppe $X_1'f \ldots X_r'f$ eine Gleichung von der Form:

$$\alpha(x, y) \cdot y' - \beta(x, y) \cdot x' = 0 \tag{1'}$$

invariant lässt oder nicht.

In der Gruppe $X_1f \ldots X_rf$ giebt es eine gewisse Anzahl, etwa gerade $r - m$ unabhängige infinitesimale Transformationen, die einen beliebig gewählten Punkt x_0, y_0 von allgemeiner Lage stehen lassen; die Zahl m hat hier den Werth 2 oder den Werth 1, jenachdem die Gruppe $X_1f \ldots X_rf$ transitiv ist oder intransitiv. Diese $r - m$ infinitesimalen Transformationen erzeugen natürlich eine $(r - m)$-gliedrige Untergruppe der Gruppe $X_1f \ldots X_rf$ (s. Abschn. I, S. 205, Satz 2), ihre Reihenentwickelungen nach Potenzen von $x - x_0$, $y - y_0$ sind von Gliedern nullter Ordnung frei und haben daher die Form:

$$Y_kf = \{\lambda_k(x - x_0) + \mu_k(y - y_0) + \cdots\} p + \{\nu_k(x - x_0) + \varrho_k(y - y_0) + \cdots\} q$$
$$(k = 1 \ldots r - m),$$

zugleich ist unter den gemachten Voraussetzungen

$$e_1 Y_1 f + \cdots + e_{r-m} Y_{r-m} f$$

die allgemeinste infinitesimale Transformation der Gruppe $X_1f \ldots X_rf$, die keine Glieder von der nullten Ordnung in $x - x_0$, $y - y_0$ enthält. Erweitern wir die Y_kf ebenso wie vorhin die X_kf, so erhalten wir in den Veränderlichen x, y, x', y' $r - m$ unabhängige infinitesimale Transformationen von der Gestalt:

$$Y_k'f = Y_kf + \{(\lambda_k + \cdots)x' + (\mu_k + \cdots)y'\} p' + \{(\nu_k + \cdots)x' + (\varrho_k + \cdots)y'\} q'$$
$$(k = 1 \ldots r - m),$$

die ihrerseits eine $(r - m)$-gliedrige Untergruppe der Gruppe $X_1'f \ldots X_r'f$ erzeugen, nämlich die grösste in dieser Gruppe enthaltene Untergruppe, die das Gleichungensystem: $x = x_0$, $y = y_0$ invariant lässt.

Bleibt nun bei der Gruppe $X_1'f \ldots X_r'f$ eine Gleichung von der Form (1') invariant, so bleibt bei der Gruppe $Y_1'f \ldots Y_{r-m}'f$ offenbar das Gleichungensystem:

$$x = x_0,\ y = y_0,\ \alpha(x, y)y' - \beta(x, y)x' = 0$$

invariant oder, was auf dasselbe hinauskommt, das Gleichungensystem:

$$(2) \qquad x = x_0,\ y = y_0,\ \alpha(x_0, y_0)y' - \beta(x_0, y_0)x' = 0,$$

wo die Coefficienten von x' und y' jedenfalls nicht beide verschwinden, da ja x_0, y_0 ein Punkt von allgemeiner Lage ist. Erinnern wir uns daher, dass ein Gleichungensystem von der Form (2) ein durch den Punkt x_0, y_0 gehendes Linienelement darstellt, so können wir sagen: Ist die Gruppe $X_1f \ldots X_rf$ imprimitiv, so lässt die Gruppe $Y_1'f \ldots Y_{r-m}'f$ ausser dem Punkte x_0, y_0 auch noch ein hindurchgehendes Linienelement invariant.

Aber auch das Umgekehrte gilt: wenn die Gruppe $Y_1'f \ldots Y_{r-m}'f$ mit dem Punkte x_0, y_0 von allgemeiner Lage zugleich auch ein hindurchgehendes Linienelement x_0, y_0, $\alpha_0 y' - \beta_0 x' = 0$ invariant lässt, so ist die Gruppe $X_1f \ldots X_rf$ imprimitiv. In der That, es sei zunächst die Gruppe $X_1f \ldots X_rf$ transitiv, die Zahl m habe also den Werth 2. Dann gestattet das betreffende Linienelement durch den Punkt x_0, y_0 gerade $r-2$ unabhängige infinitesimale Transformationen der r-gliedrigen Gruppe $X_1'f \ldots X_r'f$, es nimmt also bei dieser Gruppe gerade ∞^2 verschiedene Lagen an, deren Inbegriff bei dieser Gruppe invariant bleibt (s. Abschn. I, S. 483, Theorem 85). Bedenken wir überdies, dass auch der Punkt x_0, y_0 bei der Gruppe $X_1'f \ldots X_r'f$ gerade ∞^2 verschiedene Lagen annimmt, so erkennen wir, dass die bei der Gruppe $X_1'f \ldots X_r'f$ invariante Schaar von ∞^2 Linienelementen durch eine Gleichung von der Form (1') dargestellt wird, dass also die Gruppe $X_1f \ldots X_rf$ unter der gemachten Voraussetzung wirklich imprimitiv ist. Uebrig bleibt der Fall, dass die Gruppe $X_1f \ldots X_rf$ intransitiv ist; in diesem Falle ist aber ihre Imprimitivität von vornherein gewiss, die oben aufgestellte Behauptung ist demnach vollständig bewiesen.

Will man also feststellen, ob eine vorgelegte r-gliedrige continuirliche Gruppe $X_1f \ldots X_rf$ der Ebene x, y imprimitiv oder primitiv ist, so hat man folgendermassen zu verfahren: man stelle die grösste in der Gruppe $X_1f \ldots X_rf$ enthaltene Untergruppe auf, die einen beliebig gewählten Punkt x_0, y_0 von allgemeiner Lage invariant lässt, und untersuche, wie diese Untergruppe die ∞^1 durch den Punkt x_0, y_0 gehenden Linienelemente der Ebene x, y transformirt; lässt die Untergruppe eines der betreffenden ∞^1 Linienelemente stehen, so ist die Gruppe $X_1f \ldots X_rf$ imprimitiv, lässt sie keines stehen, so ist die Gruppe $X_1f \ldots X_rf$ primitiv.

Es bleibt uns jetzt noch übrig, das eben gefundene Kriterium in eine bequeme analytische Form zu kleiden.

Alles kommt darauf an, ob die auf S. 31 definirte Gruppe $Y_1'f \ldots Y_{r-m}'f$ ein Linienelement durch den invarianten Punkt x_0, y_0 stehen lässt oder nicht. Um darüber ins Klare zu kommen, brauchen wir aber gar nicht die ganze Gruppe $Y_1'f \ldots Y_{r-m}'f$, sondern wir brauchen nur zu ermitteln, wie diese Gruppe die ∞^1 Linienelemente durch den Punkt x_0, y_0 transformirt und das können wir nach Abschn. I, S. 232—234 sehr leicht: wir lassen nämlich aus den $Y_k'f$ die Glieder mit p und q weg und setzen in den übrigen Gliedern $x = x_0$, $y = y_0$, dann erhalten wir in den Veränderlichen x', y' eine lineare homogene Gruppe:

$$\mathfrak{Y}_k f = (\lambda_k x' + \mu_k y')p' + (\nu_k x' + \varrho_k y')q' \qquad (k = 1 \ldots r-m),$$

die mit der Gruppe $Y_1'f \ldots Y_{r-m}'f$ isomorph ist und die Linienelemente durch den Punkt x_0, y_0 gerade so transformirt wie diese.

Nunmehr bleibt noch zu untersuchen, ob die lineare homogene Gruppe $\mathfrak{Y}_1 f \ldots \mathfrak{Y}_{r-m} f$ ein Linienelement: $\alpha_0 y' - \beta_0 x' = 0$ stehen lässt, oder, was auf dasselbe hinauskommt, ob sie aufgefasst als Gruppe einer Ebene x', y' eine Gerade durch den Punkt $x' = y' = 0$ stehen lässt. Diese Frage aber können wir nach S. 28 beantworten. Wir erhalten daher das

Theorem 4. *Ob eine vorgelegte r-gliedrige Gruppe:*

$$X_k f = \xi_k(x, y)p + \eta_k(x, y)q \qquad (k = 1 \ldots r)$$

der Ebene x, y primitiv ist oder nicht, lässt sich folgendermassen entscheiden: Man bestimme zunächst die Zahl $r - m$ der von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$, die einen beliebig gewählten Punkt x_0, y_0 von allgemeiner Lage invariant lassen, sodann wähle man unter den infinitesimalen Transformationen von dieser Beschaffenheit irgend $r - m$ unabhängige aus, etwa $Y_1 f \ldots Y_{r-m} f$ und schreibe ihre Reihenentwickelungen nach Potenzen von $x - x_0$, $y - y_0$ hin, jedoch mit Weglassung aller Glieder von zweiter und höherer Ordnung. Lauten diese Reihenentwickelungen folgendermassen:

$$Y_k f = \{\lambda_k(x - x_0) + \mu_k(y - y_0) + \cdots\}p + \{\nu_k(x - x_0) + \varrho_k(y - y_0) + \cdots\}q \qquad (k = 1 \ldots r-m),$$

so bilde man schliesslich in den Veränderlichen x', y' die infinitesimalen Transformationen:

$$\mathfrak{Y}_k f = (\lambda_k x' + \mu_k y')p' + (\nu_k x' + \varrho_k y')q'$$
$$(k = 1 \ldots r - m),$$

die eine lineare homogene Gruppe erzeugen. Wenn dann die Gruppe $\mathfrak{Y}_1 f \ldots \mathfrak{Y}_{r-m} f$ *eine der beiden Formen:*

$$(3) \qquad \begin{cases} x'q',\ x'p' - y'q',\ y'p,\ x'p + y'q', \\ x'q',\ x'p' - y'q',\ y'p' \end{cases}$$

hat, so ist die vorgelegte Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ *primitiv, in jedem andern Falle ist sie imprimitiv.*

Aus diesem Theoreme folgt, dass man, um über die Primitivität oder Imprimitivität der Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ entscheiden zu können, gar nicht die infinitesimalen Transformationen $X_1 f \ldots X_r f$ selbst zu kennen braucht, dass vielmehr dazu schon die Definitionsgleichungen (Abschn. I, Kap. 11) der Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ ausreichend sind. Denn kennt man diese Definitionsgleichungen, so kann man in den Reihenentwickelungen der $Y_k f$ die Glieder von erster Ordnung in $x - x_0$ und $y - y_0$ bestimmen und kann daher auch die lineare homogene Gruppe $\mathfrak{Y}_1 f \ldots \mathfrak{Y}_{r-m} f$ aufstellen.

Andrerseits folgt, dass eine r-gliedrige Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ der Ebene x, y stets imprimitiv ist, wenn ihre Gliederzahl r kleiner ist als fünf. Ist nämlich die betreffende Gruppe transitiv — offenbar brauchen wir unsre Behauptung nur für diesen Fall zu beweisen — so ist $m = 2$ und also $r - m < 3$, also hat die zugehörige lineare homogene Gruppe $\mathfrak{Y}_1 f \ldots \mathfrak{Y}_{r-m} f$ sicher keine der beiden Formen (3).

Nunmehr können wir die auf S. 29 ausgesprochene Aufgabe in Angriff nehmen. Wir erledigen sie, wie schon angekündigt, zuerst für die primitiven und sodann für die imprimitiven Gruppen.

I. Die primitiven Gruppen der Ebene.

§ 7.

Soll eine r-gliedrige Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ oder kurz G_r der Ebene x, y primitiv sein, so muss sie vor allen Dingen transitiv sein, ferner muss die zu ihr gehörige lineare homogene Gruppe $\mathfrak{Y}_1 f \ldots \mathfrak{Y}_{r-m} f$, die wir im vorigen Paragraphen definirt haben, eine der beiden Formen (3) besitzen. Umgekehrt ist nach den Entwicklungen des vorigen Paragraphen jede Gruppe G_r, bei der diese beiden Bedingungen erfüllt sind, sicher primitiv.

Denken wir uns die infinitesimalen Transformationen der G_r in der Umgebung eines Punktes x_0, y_0 von allgemeiner Lage nach Potenzen von $x - x_0$, $y - y_0$ entwickelt, so ergiebt sich Folgendes:

Eine r-gliedrige Gruppe G_r der Ebene x, y ist dann und nur dann primitiv, wenn sie in der Umgebung eines Punktes x_0, y_0 von allgemeiner Lage die nachstehenden infinitesimalen Transformationen enthält:

Erstens zwei infinitesimale Transformationen von nullter Ordnung in $x - x_0, y - y_0$, aus denen sich keine Transformation von erster oder höherer Ordnung linear ableiten lässt, also mit andern Worten zwei infinitesimale Transformationen von der Form:

$$p + \cdots, \qquad q + \cdots, \tag{4}$$

wo die weggelassenen Glieder in $x - x_0, y - y_0$ von erster oder höherer Ordnung sind. Diese Forderung ist gleichbedeutend mit der, dass die G_r transitiv sein soll.

Zweitens entweder vier oder drei infinitesimale Transformationen von erster Ordnung, aus denen sich keine Transformation von zweiter oder höherer Ordnung in $x - x_0, y - y_0$ linear ableiten lässt, und zwar müssen diese infinitesimalen Transformationen erster Ordnung entweder die Form:

$$(x - x_0)q + \cdots, (x - x_0)p - (y - y_0)q + \cdots, (y - y_0)p + \cdots$$
$$(x - x_0)p + (y - y_0)q + \cdots$$

besitzen oder die Form:

$$(x - x_0)q + \cdots, (x - x_0)p - (y - y_0)q + \cdots, (y - y_0)p + \cdots,$$

wo beide Male die weggelassenen Glieder von zweiter oder höherer Ordnung in $x - x_0, y - y_0$ sein müssen. Diese Form der infinitesimalen Transformationen erster Ordnung folgt sofort aus dem Umstand, dass die früher besprochene lineare homogene Gruppe $\mathfrak{Y}_1 f \ldots \mathfrak{Y}_{r-m} f$ eine der beiden Formen (3) besitzen muss.

Nun aber haben wir alle endlichen continuirlichen Gruppen, deren infinitesimale Transformationen nullter und erster Ordnung die eben angegebene Form besitzen, schon in Abschnitt I bestimmt, nämlich im 29. Kapitel: wir brauchen nur dort der Zahl n den Werth 2 zu ertheilen. Demnach können wir sagen:

Theorem 5. *Ist eine endliche continuirliche Gruppe von Punkttransformationen der Ebene x, y primitiv, lässt sie also keine Curvenschaar: $\varphi(x, y) = const.$ invariant, so hat sie entweder fünf, oder sechs oder acht Parameter und ist dementsprechend ähnlich entweder mit der speciellen linearen Gruppe:*

$$p,\ q,\ xq,\ xp - yq,\ yp,$$

oder mit der allgemeinen linearen Gruppe:

$$p,\ q,\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq$$

oder endlich mit der allgemeinen projectiven Gruppe:

$$p,\ q,\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq,\ x^2p + xyq,\ xyp + y^2q.$$

Damit haben wir alle Typen von primitiven Gruppen der Ebene gefunden und zugleich für jeden dieser Typen einen Repräsentanten. Es giebt, wie man sieht, in der Ebene nur drei Typen von primitiven Gruppen. Man beachte übrigens, dass die Entwicklungen des Kap. 29 in Abschn. I auf die zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit angewendet noch alle Typen von primitiven Gruppen dieser Mannigfaltigkeit liefern, während sie andrerseits überhaupt alle Gruppentypen der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit liefern (s. Kap. 1, S. 11).

II. Die imprimitiven Gruppen der Ebene.

§ 8.

Ist $X_1 f \ldots X_r f$ eine r-gliedrige imprimitive Gruppe der Ebene und ist: $\varphi(x, y) = \text{const.}$ irgend eine bei dieser Gruppe invariante Curvenschaar, so bestehen (vgl. Abschnitt I, S. 139, Satz 1) Relationen von der Form:

$$X_k \varphi = \omega_k(\varphi) \qquad (k = 1 \ldots r).$$

Führen wir daher φ als neues x ein, so erhält unsre Gruppe die Gestalt:

$$X_k f = \xi_k(x) p + \eta_k(x, y) q \qquad (k = 1 \ldots r),$$

wo wir wieder die üblichen Buchstaben ξ und η angewendet haben. Wie man sieht, wird jetzt bei der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ die Veränderliche x für sich transformirt und zwar (Abschn. I, S. 222) ebenfalls durch eine Gruppe, die von den verkürzten infinitesimalen Transformationen:

$$\overline{X}_k f = \xi_k(x) p \qquad (k = 1 \ldots r)$$

erzeugt ist. Diese neue Gruppe ist mit der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ isomorph, denn aus den Relationen:

$$(X_i X_k) = \sum_1^r {}_s c_{ik\,s} X_s f \qquad (i, k = 1 \ldots r)$$

folgt augenscheinlich:

$$(\overline{X}_i \overline{X}_k) = \sum_1^r {}_s c_{ik\,s} \overline{X}_s f \qquad (i, k = 1 \ldots r)$$

(vgl. auch Abschn. I, S. 307, Satz 4), aber im Allgemeinen wird der Isomorphismus meroedrisch sein, denn aus der Unabhängigkeit der infinitesimalen Transformationen: $X_1 f \ldots X_r f$ folgt die der Transformationen: $\overline{X}_1 f \ldots \overline{X}_r f$ keineswegs.

Nach Theorem 1, S. 6 kann die Gruppe: $\overline{X}_1 f \ldots \overline{X}_r f$ als Gruppe der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit nicht mehr als drei Parameter haben, sie ist daher entweder drei-, oder zwei-, oder eingliedrig, oder endlich nullgliedrig, das heisst, sie reducirt sich auf die identische Transformation; dieser letzte Fall tritt ein, wenn alle $\overline{X}_k f$ identisch verschwinden. Dementsprechend transformirt die Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ die Curven: $x =$ const. entweder drei-, oder zwei-, oder eingliedrig, oder endlich nullgliedrig, das heisst gar nicht. Wir haben also vier Fälle zu unterscheiden, die wir jetzt mit dem letzten anfangend der Reihe nach durchgehen wollen.

Erstens. Die Curven: $x =$ const. werden nullgliedrig transformirt, es verschwinden also alle $\overline{X}_k f$. In diesem Falle enthält die Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ r unabhängige infinitesimale Transformationen von der Gestalt:

$$\Phi_1(x, y)q, \quad \ldots \quad \Phi_r(x, y)q.$$

Zweitens. Die Curven: $x =$ const. werden eingliedrig transformirt. Da die Gruppe: $X_1 f \ldots \overline{X}_r f$ in diesem Falle eingliedrig ist, so kann man nach dem oben angeführten Theorem die Veränderliche x so wählen, dass jedes $\overline{X}_k f$ die Form: $a_k p$ und demnach jedes $X_k f$ die Form: $a_k p + \eta_k(x, y)q$ erhält, wo die r Constanten $a_1 \ldots a_r$ natürlich nicht alle verschwinden dürfen. Hieraus ergiebt sich, dass die Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ bei der betreffenden Wahl von x r unabhängige infinitesimale Transformationen von der Form:

$$\Phi_1(x, y)q, \quad \ldots \quad \Phi_{r-1}(x, y)q, \quad p + \eta(x, y)q$$

enthält.

Drittens. Die Curven $x =$ const. werden zweigliedrig transformirt. In diesem Falle kann man nach dem bewussten Theoreme die Veränderliche x so wählen, dass jedes $\overline{X}_k f$ die Form: $(a_k + b_k x)p$ erhält und zwar können hier nicht alle Ausdrücke: $a_k b_j - a_j b_k$ verschwinden, weil ja die Gruppe: $\overline{X}_1 f \ldots \overline{X}_r f$ zweigliedrig ist und also zwei unabhängige infinitesimale Transformationen enthalten muss. Man sieht nunmehr sofort, dass die Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ bei der betreffenden Wahl von x r unabhängige infinitesimale Transformationen von der Form:

$$\Phi_1(x, y)q, \ \ldots \ \Phi_{r-2}(x, y)q, \ p + \eta_0(x, y)q, \ xp + \eta_1(x, y)q$$

enthält.

Viertens. Die Curven $x =$ const. werden dreigliedrig transformirt. In diesem Falle kann man die Veränderliche x stets so wählen, dass es in der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ r unabhängige infinitesimale Transformationen von der Form:

$$\Phi_1(x, y)q, \ \ldots \ \Phi_{r-3}(x, y)q, \ p + \eta_0(x, y)q, \ xp + \eta_1(x, y)q, \ x^2p + \eta_2(x, y)q$$

giebt.

Damit sind vier Kategorien von imprimitiven Gruppen der Ebene gefunden. Jede imprimitive Gruppe der Ebene gehört bei geeigneter Wahl der Veränderlichen x, y einer dieser Kategorien an. Um daher alle imprimitiven Gruppen zu finden, brauchen wir blos für jede einzelne unter den vier Kategorien alle in ihr enthaltenen Gruppen zu bestimmen.

Die Lösung der Aufgabe, auf die wir so geführt worden sind, wird wesentlich erleichtert, wenn wir Folgendes beachten: erstens, dass bei jeder Transformation von der Form:

$$x_1 = \text{const.}\, x, \quad y_1 = \Omega(x, y) \tag{5}$$

jede Gruppe, die einer unsrer vier Kategorien angehört, in eine derselben Kategorie angehörige Gruppe übergeht und zweitens, dass jede r-gliedrige Gruppe aus einer der drei letzten Kategorien eine $(r-1)$-gliedrige Untergruppe enthält, die der vorhergehenden Kategorie angehört. Wir können daher folgendermassen verfahren:

Zunächst bestimmen wir alle Gruppen von der Form:

$$\Phi_1(x, y)q, \ \ldots \ \Phi_r(x, y)q,$$

und führen sie durch Transformationen von der Gestalt (5) auf eine Reihe von Normalformen zurück. Sodann fügen wir zu jeder unter den gewonnenen Normalformen in allgemeinster Weise eine solche infinitesimale Transformation: $p + \eta(x, y)q$ hinzu, dass sich wieder eine Gruppe ergiebt; so finden wir alle Gruppen der zweiten Kategorie und bringen sie durch Transformationen von der Gestalt (5) auf einfache Normalformen. Zu jeder dieser Normalformen fügen wir wieder in allgemeinster Weise eine Transformation von der Form: $xp + \eta_1(x, y)q$ und bekommen so die Gruppen der dritten Kategorie und endlich aus diesen durch Hinzufügung einer Transformation: $x^2p + \eta_2(x, y)q$ die Gruppen der vierten.

Das hiermit aufgestellte allgemeine Programm wollen wir jetzt im Einzelnen durchführen.

§ 9.

Die Curven: $x = \text{const.}$ werden nullgliedrig transformirt.

Es handelt sich hier um die Bestimmung aller r-gliedrigen Gruppen von der Form:

$$X_k f = \Phi_k(x, y)q \qquad (k = 1 \ldots r). \tag{6}$$

Wie man sieht, transformirt die Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ blos die Veränderliche y, während sie x gar nicht transformirt. Ertheilen wir daher dem x irgend einen constanten Werth a, so bekommen wir an Stelle der $X_k f$ gewisse infinitesimale Transformationen:

$$(6') \qquad \mathfrak{X}_k f = \Phi_k(a, y) q \qquad (k = 1 \ldots r),$$

die eine mit der Gruppe (6) isomorphe Gruppe in der Veränderlichen y allein erzeugen. Solange nun die Constante a nicht specielle Werthe annimmt, kann offenbar keine der infinitesimalen Transformationen $\mathfrak{X}_k f$ identisch verschwinden, die Gruppe (6′) reducirt sich also sicher nicht auf die identische Transformation. Andrerseits kann diese Gruppe nach Theorem 1, S. 6 nicht mehr als drei Parameter enthalten; demnach zerfallen alle Gruppen (6) in drei Klassen und zwar gehört eine Gruppe von der Form (6) der ersten, zweiten oder dritten Klasse an, jenachdem die Gruppe (6′) für einen allgemeinen Werth von a ein-, zwei- oder dreigliedrig ist.

Wir bestimmen jetzt der Reihe nach die Gruppen einer jeden dieser drei Klassen.

Ist die Gruppe (6′) eingliedrig, so kann sie nach Theorem 1, S. 6 durch geeignete Wahl von y die Form q erhalten, mit andern Worten, wenn man in den $\mathfrak{X}_k f$ eine geeignete Funktion $\Omega(a, y)$ von y und der Constanten a als neues y einführt, so bekommen alle $\mathfrak{X}_k f$ die Gestalt:

$$\mathfrak{X}_k f = F_k(a) \cdot q \qquad (k = 1 \ldots r).$$

Führt man daher die Function: $\Omega(x, y)$ als neues y in die Gruppe (6) ein — es ist das eine Transformation von der Gestalt (5) — so erhält diese Gruppe die Form:

$$X_k f = F_k(x) \cdot q \qquad (k = 1 \ldots r).$$

Andrerseits ist klar, dass r infinitesimale Transformationen von der Gestalt:

$$[1] \qquad \boxed{F_1(x)q,\ F_2(x)q,\ \ldots\ F_r(x)q}$$

stets eine r-gliedrige Gruppe erzeugen, welche Functionen von x auch die F sein mögen, vorausgesetzt nur, dass keine Relation:

$$c_1 F_1(x) + \cdots + c_r F_r(x) = 0$$

mit constanten Coefficienten besteht. Wir haben also hiermit alle Gruppen, die unsrer ersten Klasse angehören, durch Transformationen von der Gestalt (5) auf geeignete Normalformen gebracht.

Es sei zweitens die Gruppe (6′) zweigliedrig und also r jedenfalls > 1. Dann kann sie nach dem mehrfach angeführten Theorem

durch geeignete Wahl von y die Form: q, yq erhalten. Auf (6) übertragen heisst das: die Gruppe (6) erhält, wenn eine zweckmässig gewählte Function $\Omega(x, y)$ als neues y eingeführt wird, die Gestalt:

$$X_k f = \{F_k(x) + G_k(x) \cdot y\} q \qquad (k = 1 \ldots r).$$

Nun aber finden wir durch Combination:

$$(X_i X_k) = (F_i G_k - F_k G_i) q = \Omega_{ik}(x) \cdot q,$$

wo Ω_{ik} jedenfalls nicht immer verschwindet, denn wären $X_i f$ und $X_k f$ für alle Werthe von i und k durch eine Relation von der Form: $\alpha_{ik}(x) X_i f + \beta_{ik}(x) X_k f = 0$ verknüpft, so wäre die Gruppe (6′) gegen unsre Voraussetzung blos eingliedrig. Nunmehr kommt bei beliebigem j:

$$(\Omega_{ik} q, X_j f) = G_j \Omega_{ik} q$$

und wenn wir in dieser Gleichung links $G_j \Omega_{ik} q$ an die Stelle von $\Omega_{ik} q$ einsetzen: $G_j^2 \Omega_{ik} q$ u. s. w., kurz überhaupt: $G_j^m \cdot \Omega_{ik} q$, wo die ganze Zahl m beliebig gross gemacht werden kann. Hieraus folgt, dass die G_j alle von x frei sein müssen, denn andernfalls müssten die unendlich vielen infinitesimalen Transformationen:

$$\Omega_{ik} q, \; G_j \Omega_{ik} q, \; G_j^2 \Omega_{ik} q \ldots,$$

die alle von einander unabhängig sind, sämmtlich der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ angehören, und das ist unmöglich, weil diese Gruppe endlich ist. Also sind die G_j constant und die infinitesimalen Transformationen unsrer Gruppe haben die Gestalt:

$$X_k f = \{c_k y + F_k(x)\} q \qquad (k = 1 \ldots r),$$

wo die c_k natürlich nicht alle verschwinden. Ist daher etwa c_r nicht gleich Null, so führen wir: $c_r y + F_r(x)$ als neues y ein, dann wird: $X_r f = c_r y q$ und unsre Gruppe enthält r unabhängige infinitesimale Transformationen von der Form:

$$[2] \qquad \boxed{\begin{matrix} F_1(x) q, \ldots F_{r-1}(x) q, \; yq \\ (r > 1) \end{matrix}}.$$

Es sei endlich drittens die Gruppe (6′) dreigliedrig, so dass sie nach Theorem 1, S. 6 durch geeignete Wahl von y die Form: $q, yq, y^2 q$ erhalten kann. Dann ist es stets möglich, eine solche Function: $\Omega(x, y)$ als neues y einzuführen, dass die Gruppe (6) in der Form:

$$X_k f = \{\varphi_k(x) + y \cdot \chi_k(x) + y^2 \cdot \psi_k(x)\} q \qquad (k = 1 \ldots r)$$

erscheint. Bedenkt man nun, dass die Veränderliche x bei der Combination zweier infinitesimaler Transformationen: $X_i f$ und $X_k f$ blos die Rolle einer Constanten spielt und dass $q, yq, y^2 q$ in den Beziehungen:

$$(q, yq) = q, \quad (q, y^2q) = 2yq, \; (yq, y^2q) = y^2q$$

stehen, so erkennt man, dass der Satz 1, S. 18 auf je drei der infinitesimalen Transformationen X_kf anwendbar ist, dass also zwischen X_if, X_kf und X_jf die Identität:

$$((X_iX_k), (X_iX_j)) = 2 \begin{vmatrix} \varphi_i & \chi_i & \psi_i \\ \varphi_k & \chi_k & \psi_k \\ \varphi_j & \chi_j & \psi_j \end{vmatrix} X_if = 2\Delta_{ikj}X_if$$

besteht. Setzt man in dieser Identität $\Delta_{ikj}X_if$ an die Stelle von X_if, so bekommt man $\Delta_{ikj}^2X_if$, in entsprechender Weise erhält man $\Delta_{ikj}^3X_if$ u. s. w., alles infinitesimale Transformationen, die der Gruppe: $X_1f \ldots X_rf$ angehören. Folglich müssen die Δ_{ikj} *constant* sein: $\Delta_{ikj} = C_{ikj}$ und aus der Identität:

$$\begin{vmatrix} X_if & \varphi_i & \chi_i & \psi_i \\ X_kf & \varphi_k & \chi_k & \psi_k \\ X_jf & \varphi_j & \chi_j & \psi_j \\ X_sf & \varphi_s & \chi_s & \psi_s \end{vmatrix} = 0$$

ergiebt sich überdies, dass zwischen je vier der infinitesimalen Transformationen $X_1f \ldots X_rf$ eine Relation von der Form:

$$C_{kjs}X_if - C_{ijs}X_kf + C_{iks}X_jf - C_{ikj}X_sf = 0$$

besteht. Nun können die Δ_{ikj} unmöglich alle verschwinden, weil sonst die Gruppe (6′) nicht dreigliedrig wäre, wir dürfen daher annehmen, dass etwa $\Delta_{123} = C_{123}$ nicht null ist. Bei dieser Annahme zeigt aber die letzte Gleichung sofort, dass sich $X_1f \ldots X_rf$ linear mit *constanten* Coefficienten aus X_1f, X_2f, X_3f ableiten lassen, dass also die Gruppe $X_1f \ldots X_rf$ ebenso wie die zugehörige Gruppe (6′) nur drei unabhängige infinitesimale Transformationen enthält. Die Möglichkeit $r > 3$ ist somit ausgeschlossen und es bleibt nur die: $r = 3$ übrig.

Wir haben also jetzt die dreigliedrige Gruppe:

$$X_kf = (\varphi_k(x) + y\,\chi_k(x) + y^2\psi_k(x))\,q \qquad (k=1,2,3)$$

durch eine Transformation von der Form (5) auf eine möglichst einfache Normalform zu bringen. Zu diesem Zwecke erinnern wir daran, dass unsre Gruppe nach Abschn. I, S. 591, Satz 5 sicher zweigliedrige Untergruppen enthält; der Einfachheit wegen wollen wir annehmen, dass X_1f, X_2f eine solche Untergruppe erzeugen.

Weil nun, wie wir oben gesehen haben, die Determinante $\Sigma \pm \varphi_1\chi_2\psi_3$ nicht verschwindet, so werden offenbar auch die beiden infinitesimalen Transformationen:

$$X_kf = \{\varphi_k(a) + y\,\chi_k(a) + y^2\,\psi_k(a)\}\,q \qquad (k=1,2)$$

von einander unabhängig sein und eine zweigliedrige Gruppe erzeugen. Aber diese Gruppe $X_1 f$, $X_2 f$ ist projectiv und daher innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit y mit der Gruppe q, yq gleichberechtigt (s. Theorem 2, S. 17). Hieraus folgt, dass die Gruppe $X_1 f$, $X_2 f$, wenn man eine geeignete Function von der Form:

$$\frac{\alpha(x)y + \beta(x)}{\gamma(x)y + \delta(x)}$$

als neues y einführt, die Gestalt:

$$X_1 f = \{F_1(x) + yG_1(x)\}\, q, \quad X_2 f = \{F_2(x) + yG_2(x)\}\, q$$

annimmt. Hier erkennt man, wie oben (S. 40), dass G_1 und G_2 constant sind und dass die Gruppe durch geeignete Wahl von y die Form $F_1(x)q$, yq erhalten kann; indem man schliesslich noch $\frac{1}{F_1(x)}y$ als neues y einführt, erreicht man, dass $F_1(x)$ gleich 1 wird. In den neuen Veränderlichen x, y hat nunmehr die Gruppe $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ die Form:

$$q, yq, X_3 f = \{\varphi(x) + y\chi(x) + y^2\psi(x)\}\, q,$$

denn alle von uns angewendeten Transformationen besitzen die Gestalt:

$$x_1 = x, \qquad y_1 = \frac{\lambda(x)y + \mu(x)}{\nu(x)y + \varrho(x)},$$

sie ändern also in dem ursprünglichen Ausdruck für $X_3 f$ nur die Form der Functionen φ_3, ψ_3, χ_3. Es wird demnach:

$$(q, X_3 f) = (\chi(x) + 2y\psi(x))\, q$$
$$(q, (q, X_3 f)) = 2\psi(x)\, q,$$

also müssen $\psi(x)$ und $\chi(x)$ constant sein. Aus der Gleichung:

$$(yq, X_3 f) = -\varphi(x)q + y^2 . \psi(x)q$$

folgt endlich noch, dass auch $\varphi(x)$ eine Constante ist.

Damit ist bewiesen, dass jede Gruppe, die unsrer dritten Klasse angehört, durch eine Transformation (5) auf die Form:

[3] $\boxed{q,\ yq,\ y^2 q}$

gebracht werden kann.

§ 10.

Die Curven: $x = \text{const.}$ werden eingliedrig transformirt.

Nach dem auf S. 38 aufgestellten Programm haben wir nur zu jeder im vorigen Paragraphen gefundenen Gruppe die Transformation $p + \eta(x, y)q$ hinzuzufügen und η in allgemeinster Weise so zu bestimmen, dass eine Gruppe entsteht.

Wir suchen zunächst alle r-gliedrigen Gruppen von der Gestalt:

$$F_1(x)q, \ldots F_{r-1}(x)q, \quad p + \eta(x,y)q$$

auf einfache Normalformen zu bringen.

Ist $r = 1$, so führen wir eine Lösung $\omega(x,y)$ der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} + \eta \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$$

als neues y ein und erhalten die Gruppe:

$$[4] \quad \boxed{p}.$$

Ist $r > 1$, so muss eine Gleichung von der Form:

$$(p + \eta q, F_i q) = \sum_1^{r-1 \, k} c_{ik} F_k \,.\, q$$

bestehen, denn die linke Seite ist von p frei. Folglich haben wir:

$$F_i'(x) - F_i \frac{\partial \eta}{\partial y} = \sum_1^{r-1 \, k} c_{ik} F_k,$$

so dass η in y linear ist:

$$\eta = y\varphi(x) + \chi(x).$$

Setzen wir aber:

$$x_1 = x, \; y_1 = y\alpha(x) + \beta(x),$$

so ergiebt sich:

$$p + \eta q = p_1 + (y\alpha'(x) + \beta'(x) + \alpha \,.\, \eta) q_1;$$

wenn wir daher α und β derart wählen, dass:

$$\alpha' + \alpha\varphi = 0, \qquad \beta' + \alpha\chi = 0$$

wird, was immer möglich ist, so kommt einfach: $p + \eta q = p_1$. Da ausserdem die übrigen infinitesimalen Transformationen der Gruppe bei der gemachten Variabelnänderung im Wesentlichen ihre Form behalten, so erscheint die Gruppe jetzt in der Gestalt:

$$F_1(x)q, \ldots F_{r-1}(x)q, \; p.$$

Endlich zeigt die Gleichung: $(p, F_i q) = F_i' q$ nunmehr, dass die F_i einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen von der Form:

$$\frac{dF_i}{dx} = \sum_1^{r-1 \, k} c_{ik} F_k \qquad (i=1 \ldots r-1)$$

genügen müssen. Dabei sind die Constanten c_{ik} vollkommen willkürlich, denn die Jacobische Identität liefert auf die infinitesimalen Transformationen unsrer Gruppe angewandt, keinerlei Relationen zwischen den c_{ik}.

Nach bekannten Sätzen befriedigen $F_1 \dots F_{r-1}$ sämmtlich eine gewisse lineare homogene Differentialgleichung $(r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit constanten Coefficienten:

$$\frac{d^{r-1}F}{dx^{r-1}} + C_{r-2}\frac{d^{r-2}F}{dx^{r-2}} + \cdots + C_1\frac{dF}{dx} + C_0 F = 0;$$

wir können daher $F_1 \dots F_{r-1}$ durch particuläre Integrale dieser Differentialgleichung ersetzen. Diese particulären Integrale ordnen sich im Allgemeinen in mehrere, etwa in $l > 0$ Systeme von der Form:

$$\begin{array}{llll} e^{\alpha_1 x}, & xe^{\alpha_1 x}, & \dots & x^{m_1}e^{\alpha_1 x} \\ e^{\alpha_2 x}, & xe^{\alpha_2 x}, & \dots & x^{m_2}e^{\alpha_2 x} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ e^{\alpha_l x}, & xe^{\alpha_l x}, & \dots & x^{m_l}e^{\alpha_l x}, \end{array}$$

wo $\alpha_1 \dots \alpha_l$ Constanten bezeichnen, die alle von einander verschieden sind, und wo $m_1 \dots m_l$ ganze Zahlen $\geqq 0$ sind, deren Summe den Werth $r - 1 - l$ besitzt. Unsre Gruppe hat somit die Gestalt:

[5] $$\boxed{e^{\alpha_k x}q,\quad xe^{\alpha_k x}q,\quad x^2e^{\alpha_k x}q, \dots x^{m_k}e^{\alpha_k x}q,\quad p \qquad (k=1,2\dots l;\ l>0)}.$$

Wir wenden uns zu den Gruppen:

$$F_1(x)q, \dots F_r(x)q,\ yq,\ p + \eta(x,y)\,q,$$

wobei wir nach S. 40 die Zahl $r > 0$ annehmen müssen.

Es besteht eine Gleichung von der Form:

$$(p + \eta q, yq) = \left(\eta - y\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)q = cyq + \sum_1^r{}^k c_k F_k q$$

und ebenso wird:

$$(p + \eta q,\ F_i q) = \left(F_i'(x) - F_i\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)q = C_i yq + \sum_1^r{}^k C_{ik}F_k q.$$

Die letzte Gleichung zeigt, dass η die Form: $\alpha(x) + y\beta(x) + y^2\gamma(x)$ besitzt; wird aber dieser Ausdruck in die erste Gleichung eingesetzt, so kommt augenblicklich:

$$\gamma(x) = 0,\quad c = 0,\quad \alpha(x) = \sum_1^r{}^k c_k F_k(x).$$

Infolgedessen ersetzen wir die infinitesimale Transformation: $p + \eta q$ durch:

$$p + \left(\eta - \sum_1^r{}^k c_k F_k\right)q = p + y\beta(x)\,q;$$

sodann führen wir ein neues y ein: $y_1 = y \,.\, \psi(x)$ und bekommen:

$$p + y\beta q = p + \frac{y_1(\psi' + \beta\psi)}{\psi} q_1,$$

also wenn wir: $\psi' + \beta\psi = 0$ machen, einfach: p. Da sich die übrigen infinitesimalen Transformationen bei der gemachten Variabelnänderung nicht wesentlich verändern, hat unsre Gruppe jetzt die Form:

$$F_1(x)q, \ldots F_r(x)q,\ p,\ yq.$$

Die $r + 1$ ersten infinitesimalen Transformationen erzeugen hier offenbar eine Untergruppe, die nach dem Vorhergehenden die Form [5] besitzt; demnach erhalten wir die Gruppe:

[6] $$\boxed{e^{\alpha_k x}q,\ \ xe^{\alpha_k x}q, \ldots x^{m_k}e^{\alpha_k x}q,\ yq,\ p \qquad (k=1,2\ldots l;\ l>0)}$$

Jetzt zu den Gruppen:

$$q,\ yq,\ y^2q,\ p + \eta(x,y)\,q.$$

Es ergiebt sich:

$$(q,\ p + \eta q) = \frac{\partial\eta}{\partial y} q = (a + 2by + 3cy^2)\,q$$

$$(yq,\ p + \eta q) = \left(y\frac{\partial\eta}{\partial y} - \eta\right) q = (\alpha + \beta y + \gamma y^2)\,q,$$

wo $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ Constanten sind. Setzen wir in die zweite Gleichung den aus der ersten folgenden Werth:

$$\eta = \varphi(x) + ay + by^2 + cy^3$$

ein, so kommt: $c = 0$, $\varphi(x) = \text{const.}$, mithin ist unsre Gruppe von den vier unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

[7] $$\boxed{q,\ yq,\ y^2q,\ p}$$

erzeugt.

§ 11.

Die Curven: $x = \text{const.}$ werden zweigliedrig transformirt.

Wir haben hier zu jeder Gruppe des § 10 eine infinitesimale Transformation von der Form: $xp + \eta(x,y)\,q$ hinzuzufügen.

Zuerst betrachten wir die Gruppe:

$$p,\ xp + \eta(x,y)\,q$$

und finden:

$$(p,\ xp + \eta q) = p + \frac{\partial\eta}{\partial x} q,$$

also $\frac{\partial\eta}{\partial x} = 0$ oder: $\eta = \varphi(y)$. Zwei Fälle sind demnach zu unterscheiden; entweder ist $\varphi = 0$, das giebt die Gruppe:

[8] $\boxed{p,\ xp}$.

oder es ist $\varphi \neq 0$. Im letzteren Falle führen wir $y_1 = \psi(y)$ an Stelle von y ein und bekommen:

$$xp + \varphi(y)\, q = xp + \varphi \cdot \psi' \cdot q_1;$$

wählen wir daher ψ so, dass $\varphi \psi' = 1$ wird, so erhalten wir die Gruppe:

[9] $\boxed{p,\ xp + q}$.

Weiter sind die Gruppen:

$$e^{\alpha_k x} q,\ x e^{\alpha_k x} q,\ \ldots\ x^{m_k} e^{\alpha_k x} q,\ p,\ xp + \eta(x, y)\, q \qquad (k = 1, 2 \ldots)$$

oder, wie wir sie zur Abkürzung schreiben wollen, die Gruppen:

$$F_1(x)q, \ldots F_r(x)q,\ p,\ xp + \eta q \quad (r > 0)$$

zu bestimmen.

Die Relationen:

$$(p,\ xp + \eta q) = p + \frac{\partial \eta}{\partial x}\, q = p + \sum_1^r{}^k a_k F_k q$$

$$(xp + \eta q,\ F_i q) = \left(x F_i'(x) - F_i \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) q = \sum_1^r{}^k b_{ik} F_k q$$

ergeben:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \varphi'(x), \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \psi(x)$$

also $\psi'(x) = 0$ und:

$$\eta = cy + \varphi(x), \quad \varphi'(x) = \sum_1^r{}^k a_k F_k(x).$$

Setzen wir aber in die Transformation: $(xF_i' - cF_i)q$ für F_i den Ausdruck: $x^{m_k} e^{\alpha_k x}$ ein, so bekommen wir die Transformation:

$$\alpha_k x^{m_k+1} e^{\alpha_k x} q + (m_k - c)\, x^{m_k} e^{\alpha_k x} q,$$

die nur dann in unsrer Gruppe enthalten sein kann, wenn α_k verschwindet. Die r infinitesimalen Transformationen $F_k q$ haben in Folge dessen die einfache Gestalt:

$$q,\ xq,\ x^2 q, \ldots x^{r-1} q$$

und es ist:

$$\eta = cy + \sum_0^{r-1}{}^k \frac{a_{k+1}}{k+1}\, x^{k+1} + \text{const.}$$

oder, weil wir vermöge der $F_k q$ alle übrigen Glieder wegschaffen können, einfach:

$$\eta = cy + hx^r.$$

Setzen wir nun:

$$x_1 = x, \quad y_1 = y + \alpha x^r,$$

so bleibt der Inbegriff aller aus: $q, xq, \ldots x^{r-1}q, p$ linear ableitbaren infinitesimalen Transformationen ganz ungeändert, aber es wird:

$$\begin{aligned} xp + \eta q &= x p_1 + \{cy + (\alpha r + h)x^r\} q_1 \\ &= x_1 p_1 + \{cy_1 + (h + \alpha r - \alpha c) x_1^r\} q_1. \end{aligned}$$

Ist daher $c \neq r$, so können wir durch geeignete Wahl von α die Gleichung: $h + \alpha(r - c) = 0$ befriedigen und bekommen die Gruppe:

[10] $$\underset{(r>0)}{q, xq, \ldots x^{r-1}q, p, xp + cyq}.$$

Ist dagegen $c = r$, so dürfen wir jedenfalls voraussetzen, dass h nicht verschwindet, weil wir sonst auf die eben gefundene Gruppe zurückkämen; wir führen daher: $x\sqrt[r]{h}$ als neues x ein und finden die Gruppe:

[11] $$\underset{(r>0)}{q, xq, \ldots x^{r-1}q, p, xp + (ry + x^r)q}.$$

Nunmehr die Gruppen:

$$\underset{(k=1,2\ldots)}{e^{\alpha_k x}q, xe^{\alpha_k x}q, \ldots x^{m_k} e^{\alpha_k x}q, yq, p, xp + \eta(x,y)q}$$

oder kürzer geschrieben:

$$F_1(x)q, \ldots F_r(x)q, yq, p, xp + \eta q \quad (r > 0).$$

Man bekommt:

$$(yq, xp + \eta q) = \left(y\frac{\partial \eta}{\partial y} - \eta\right) q = ayq + \sum_1^r{}^k a_k F_k q$$

$$(F_i q, xp + \eta q) = \left(F_i \frac{\partial \eta}{\partial y} - xF_i'(x)\right) q = byq + \sum_1^r{}^k b_{ik} F_k q$$

und daraus ohne Schwierigkeit:

$$a = 0, \qquad \eta = y\alpha(x) - \sum_1^r{}^k a_k F_k(x).$$

Ersetzt man, was offenbar erlaubt ist, $xp + \eta q$ durch die Transformation: $xp + y\alpha(x)q$, so findet man:

$$\begin{aligned} (p, xp + y\alpha q) &= p + y\alpha_x q \\ &= p + cyq + \sum_1^r{}^k c_k F_k(x) q, \end{aligned}$$

mithin verschwinden alle c_k und es wird: $\alpha = cx + \text{const.}$, wo die Integrationsconstante ohne Weiteres weggelassen werden kann. An Stelle von y und x führe man jetzt: $y_1 = ye^{-cx}$ und $x_1 = x$ ein, dann erhält man:

$$p = p_1 - cye^{-cx}q_1 = p_1 - cy_1q_1,$$
$$q = e^{-cx}q_1 = e^{-cx_1}q_1,\ yq = y_1q_1,$$

also behalten die Transformationen F_iq, yq im Wesentlichen ihre Form, während:

$$xp + \eta q = xp + cxyq$$

in x_1p_1 übergeht. Wie im vorigen Falle sieht man nun noch ein, dass $F_1q, \ldots F_rq$ die Form: $q, xq, \ldots x^{r-1}q$ haben müssen, man kommt somit auf die Gruppe:

$$[12]\quad \boxed{q,\ xq,\ \ldots x^{r-1}q,\ yq,\ p,\ xp \quad (r>0)}\ .$$

Schliesslich bleiben noch die Gruppen:

$$q,\ yq,\ y^2q,\ p,\ xp + \eta(x,y)q.$$

Von den Gleichungen:

$$(q,\ xp + \eta q) = \frac{\partial \eta}{\partial y}q = (a + 2by + 3cy^2)q$$

$$(yq, xp + \eta q) = \left(y\frac{\partial \eta}{\partial y} - \eta\right)q = (\alpha + \beta y + \gamma y^2)q$$

ergiebt die erste:

$$\eta = \varphi(x) + ay + by^2 + cy^3$$

und die zweite: $c = 0$, $\varphi = \text{const.}$, folglich kann η gleich Null gesetzt werden und unsre Gruppe hat die Form:

$$[13]\quad \boxed{q,\ yq,\ y^2q,\ p,\ xp}\ .$$

§ 12.

Die Curven: $x = \text{const.}$ werden dreigliedrig transformirt.

Wir haben jetzt zu den in § 11 gefundenen Gruppen eine Transformation von der Form: $x^2p + \eta(x,y)q$ hinzuzufügen.

Bei den Gruppen:

$$p,\ xp,\ x^2p + \eta(x,y)q$$

ergeben sich die Gleichungen:

$$(p,\ x^2p + \eta q) = 2xp + \frac{\partial \eta}{\partial x}q = 2xp,$$

$$(xp,\ x^2p + \eta q) = x^2p + x\frac{\partial \eta}{\partial x}q = x^2p + \eta q,$$

folglich verschwindet sowohl $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ als η selbst, es bleibt also nur die Gruppe:

$$[14] \quad \boxed{p,\ xp,\ x^2p} \ .$$

Für: $p,\ xp+q$ können wir schreiben: $p,\ xp+yq$, indem wir e^y als neues y einführen; es sind daher die Gruppen von der Form:

$$p,\ xp+yq,\quad x^2p+\eta(x,y)q$$

zu bestimmen. Wir finden:

$$(p,\ x^2p+\eta q)=2xp+\frac{\partial \eta}{\partial x}q$$

$$(xp+yq,\ x^2p+\eta q)=x^2p+\left(x\frac{\partial \eta}{\partial x}+y\frac{\partial \eta}{\partial y}-\eta\right)q,$$

also ist:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x}=2y,\quad x\frac{\partial \eta}{\partial x}+y\frac{\partial \eta}{\partial y}=2\eta,$$

das heisst: η muss die Form: $2xy+\varphi(y)$ besitzen und zugleich in x und y homogen vom zweiten Grade sein: $\eta=2xy+cy^2$. Wenn nun c verschwindet, führen wir $\sqrt{y}$ als neues y ein und finden die Gruppe:

$$[15] \quad \boxed{p,\ 2xp+yq,\quad x^2p+xyq} \ .$$

Verschwindet dagegen c nicht, so führen wir by als neues y ein; dabei behält yq seine Form und y^2q geht in $\frac{1}{b}y^2q$ über, also brauchen wir blos $b=c$ zu wählen und bekommen:

$$[16] \quad \boxed{p,\ xp+yq,\quad x^2p+(2xy+y^2)q} \ .$$

Um alle Gruppen von der Form:

$$q,\ xq,\ldots x^{r-1}q,\ p,\ xp+cyq,\ x^2p+\eta(x,y)q \quad (r>0)$$

zu finden, bilden wir die Gleichungen:

$$(q,\ x^2p+\eta q)=\frac{\partial \eta}{\partial y}q=\sum_0^{r-1 k} a_k x^k q$$

$$(p,\ x^2p+\eta q)=2xp+\frac{\partial \eta}{\partial x}q=2xp+\left(2cy+\sum_0^{r-1 k} b_k x^k\right)q,$$

aus denen sich ergiebt:

$$\eta=\varphi(x)+y\sum_0^{r-1 k} a_k x^k$$

$$=\psi(y)+2cxy+\sum_0^{r-1 k}\frac{b_k}{k+1}x^{k+1}.$$

Durch Vergleichung dieser beiden Ausdrücke kommt:

$$\eta = a_0 y + 2cxy + \sum_0^r{}^k g_k x^k$$

oder, da $g_0, g_1 \ldots g_{r-1}$ ohne Weiteres gleich Null gesetzt werden können:

$$\eta = a_0 y + 2cxy + g x^r.$$

Nunmehr wird:

$$(xp + cyq,\ x^2 p + \eta q) = x^2 p + \{2cxy + g(r-c)x^r\} q$$
$$= x^2 p + \eta q + \sum_0^{r-1}{}^k h_k x^k q,$$

mithin:

$$a_0 = 0,\quad g(r-c-1) = 0.$$

Andrerseits aber ist:

$$(x^{r-1} q,\ x^2 p + \eta q) = \{(1-r)x^r + 2cx^r\} q$$
$$= \sum_0^{r-1}{}^k l_k x^k q,$$

folglich: $r - 1 = 2c$, das heisst, sobald $r > 1$ ist, kann $r - c - 1$ nicht verschwinden und es wird $g = 0$. Indem wir nun die beiden Fälle: $r > 1$ und: $r = 1, g = 0$ zusammenfassen, erhalten wir die Gruppe:

[17] $\boxed{q,\ xq, \ldots x^{r-1} q,\ p,\ 2xp + (r-1)yq,\ x^2 p + (r-1)xyq \quad (r > 0)}$.

Im Falle: $r = 1, g \neq 0$ dagegen erhalten wir die Gruppe:

$$q,\ p,\ xp,\ x^2 p + gxq$$

oder, wenn wir $e^{\frac{y}{g}}$ als neues y einführen, die Gruppe:

[18] $\boxed{yq,\ p,\ xp,\ x^2 p + xyq}$.

Zur Bestimmung aller Gruppen:

$$q,\ xq, \ldots x^{r-1} q,\ p,\ xp + (ry + x^r) q,\ x^2 p + \eta(x,y) q \quad (r > 0)$$

stellen wir die Gleichungen auf:

$$(p,\ x^2 p + \eta q) = 2xp + \frac{\partial \eta}{\partial x} q = 2xp + 2(ry + x^r) q + \sum_0^{r-1}{}^k a_k x^k q$$

$$(q,\ x^2 p + \eta q) = \qquad \frac{\partial \eta}{\partial y} q = \sum_0^{r-1}{}^k b_k x^k q.$$

Aus diesen ergiebt sich:

$$\eta = \varphi(x) + y \sum_0^{r-1k} b_k x^k$$

$$= \psi(y) + 2\left(rxy + \frac{x^{r+1}}{r+1}\right) + \sum_0^{r-1k} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$$

oder durch Vergleichung beider Ausdrücke:

$$\eta = b_0 y + 2rxy + ax^r + \frac{2x^{r+1}}{r+1},$$

wo wir der Kürze wegen die überflüssigen Glieder mit $x^0, x^1, \ldots x^{r-1}$ weggeschafft denken. Ferner bilden wir die Gleichung:

$$(xp + \{ry + x^r\} q,\ x^2 p + \eta q) = x^2 p + \left(2rxy + b_0 x^r + \frac{r^2+r+2}{r+1} x^{r+1}\right) q,$$

deren rechte Seite augenscheinlich die Form: $x^2 p + \eta q$ annehmen muss, also kommt:

$$b_0 = a = 0, \quad \frac{r^2+r}{r+1} = r = 0.$$

Das aber ist unmöglich, weil $r > 0$ sein muss, es giebt demnach überhaupt keine Gruppen von der hier verlangten Art.

Jetzt zu den Gruppen:

$$q,\ xq, \ldots x^{r-1}q,\ yq,\ p,\ xp,\ x^2 p + \eta(x, y) q \quad (r > 0).$$

Die Gleichungen:

$$(p,\ x^2 p + \eta q) = 2xp + \frac{\partial \eta}{\partial x} q = 2xp + \sum_0^{r-1k} a_k x^k q + \alpha y q$$

$$(q,\ x^2 p + \eta q) = \frac{\partial \eta}{\partial y} q = \sum_0^{r-1k} b_k x^k q + \beta y q$$

$$(yq,\ x^2 p + \eta q) = \left(y \frac{\partial \eta}{\partial y} - \eta\right) q = \sum_0^{r-1k} c_k x^k q + \gamma y q$$

zeigen, dass η nach Wegschaffung der überflüssigen Glieder von der Form: $\Sigma g_k x^k + hy$ die Gestalt: $\eta = \alpha xy$ annimmt. Weiter findet man:

$$(x^{r-1}q,\ x^2 p + \alpha xy q) = (1 - r)\, x^r q + \alpha x^r q$$

und dieser Ausdruck muss verschwinden, weil die Gruppe keine Transformation $x^r q$ enthält, also ist $\alpha = r - 1$. Wir haben somit die Gruppe:

[19] $$\boxed{q,\ xq, \ldots x^{r-1}q,\ yq,\ p,\ xp,\ x^2 p + (r-1)\, xyq \quad (r > 0)}.$$

Endlich sind noch die Gruppen von der Form:

$$q,\ yq,\ y^2q,\ p,\ xp,\ x^2p + \eta(x,y)\,q$$

zu finden. Wir bekommen:

$$(q,\ x^2p + \eta q) = \frac{\partial \eta}{\partial y}\,q = (a + 2by + 3cy^2)\,q$$

$$(yq,\ x^2p + \eta q) = \left(y\frac{\partial \eta}{\partial y} - \eta\right)q = (\alpha + \beta y + \gamma y^2)\,q.$$

Von diesen Gleichungen zeigt die erste, dass η die Form: $\varphi(x) + ay + by^2 + cy^3$ besitzt, die zweite, dass c verschwindet und $\varphi(x)$ eine Constante ist. Es ergiebt sich also die Gruppe:

[20] $\boxed{q,\ yq,\ y^2q,\ p,\ xp,\ x^2p}$.

Damit sind alle endlichen imprimitiven Transformationsgruppen der Ebene auf gewisse Normalformen zurückgeführt.

§ 13.

Wir haben nunmehr auch die Bestimmung aller imprimitiven Gruppen der Ebene soweit gefördert, dass wir sagen können: jede imprimitive Gruppe der Ebene ist mit einer der in § 9—12 gefundenen Gruppen durch eine Punkttransformation der Ebene ähnlich. Das Ziel aber, das wir uns auf S. 29 gesteckt haben, ist damit für die imprimitiven Gruppen noch nicht erreicht. Es kommt uns ja darauf an, für jeden Typus von imprimitiven Gruppen der Ebene einen aber auch nur einen Repräsentanten zu besitzen, und es ist leicht zu sehen, dass in den §§ 9—12 eine ganze Anzahl Gruppentypen durch mehr als einen Repräsentanten vertreten sind.

So geht z. B. die Gruppe [14] durch die Transformation: $x_1 = x$, $y_1 = y$ in die Gruppe [3] über; beide Gruppen repräsentiren also denselben Typus. Ebenso verwandelt sich die Gruppe [4] bei der genannten Transformation in eine der Gruppen [1], die Gruppe [8] in eine der Gruppen [2] und so weiter.

Ferner lässt sich zeigen, dass die willkürlichen Elemente, die in unsern Gruppen auftreten, zum Theil weggeschafft werden können, dass also die Zahl der verschiedenen Gruppentypen kleiner ist, als es nach der Zahl dieser willkürlichen Elemente den Anschein hat.

Betrachten wir zunächst die Gruppen [1] S. 39 und suchen wir festzustellen, was für verschiedene Gruppentypen darunter enthalten sind.

Zu diesem Zwecke müssen wir vor allen Dingen sämmtliche

Punkttransformationen: $x_1 = \alpha(x, y)$, $y_1 = \beta(x, y)$ bestimmen, bei denen der Inbegriff aller Gruppen [1] invariant bleibt, bei denen also jede r-gliedrige Gruppe von der Form:

(A) $$F_1(x)\,q, \ldots F_r(x)\,q$$

in eine von der Form:

(B) $$\mathfrak{F}_1(x_1)\,q_1, \ldots \mathfrak{F}_r(x_1)\,q_1$$

übergeht. Nun verwandelt sich die Gruppe (A) bei Einführung der neuen Veränderlichen x_1, y_1 in die folgende:

(A′) $$F_k(x)\frac{\partial \alpha}{\partial y}\,p_1 + F_k(x)\frac{\partial \beta}{\partial y}\,q_1 \quad (k=1\ldots r),$$

wo man sich die Coefficienten von p_1 und q_1 durch x_1 und y_1 ausgedrückt zu denken hat. Die Gruppe (A′) aber besitzt dann und nur dann die Form (B), wenn erstens α_y identisch verschwindet und wenn zweitens β_y eine Function von x allein ist. Demnach lautet die allgemeinste Punkttransformation, die den Inbegriff aller Gruppen [1] invariant lässt, folgendermassen:

(C) $$x_1 = \varphi(x), \quad y_1 = y\chi(x) + \psi(x)$$

und zwar erhält die Gruppe (A) bei dieser Transformation die Gestalt:

(A″) $$F_1(x)\,\chi(x)\,q_1, \ldots F_r(x)\,\chi(x)\,q_1,$$

wo noch x vermöge der Gleichung: $x_1 = \varphi(x)$ durch x_1 auszudrücken ist. Man sieht hieraus, dass die Function $\psi(x)$ in der Transformation (C) auf die Gestalt der transformirten Gruppe (A″) gar keinen Einfluss hat. Wir brauchen daher nicht alle Transformationen (C) zu berücksichtigen, sondern nur die, in denen $\psi(x)$ gleich Null ist.

Jetzt denken wir uns zwei beliebige r-gliedrige Gruppen von der Form [1] vorgelegt, etwa (A) und (B). Sollen diese beiden Gruppen demselben Typus angehören, so ist nothwendig und hinreichend, dass die eine mit der andern durch eine Transformation von der Form:

(C′) $$x_1 = \varphi(x), \quad y_1 = y\chi(x)$$

ähnlich ist, dass also die Gruppe (A″), in der man sich natürlich noch x durch x_1 ausgedrückt zu denken hat, durch geeignete Wahl von $\varphi(x)$ und $\chi(x)$ mit der Gruppe (B) zusammenfällt. Das tritt dann und nur dann ein, wenn vermöge (C′) r Relationen von der Form:

$$\mathfrak{F}_k(x_1)\,q_1 = \sum_1^r{}_j\, c_{kj} F_j(x)\,\chi(x)\,q_1 \quad (k=1\ldots r)$$

identisch bestehen, wo die c_{kj} Constanten bezeichnen, deren Determinante nicht verschwindet Die Frage, ob die beiden Gruppen (A) und (B)

demselben Typus angehören, kommt demnach darauf hinaus, zu entscheiden, ob sich die r Gleichungen:

$$\text{(D)} \qquad \mathfrak{F}_k(x_1) = \chi(x) \sum_1^r{}_j \, c_{kj} F_j(x) \quad (k=1 \ldots r)$$

dadurch identisch befriedigen lassen, dass man für x_1 und χ gewisse Functionen von x einsetzt und die Constanten c_{kj} so wählt, dass ihre Determinante nicht verschwindet; dabei muss natürlich x_1 eine wirkliche Function von x werden, während χ sich auch auf eine von Null verschiedene Constante reduciren kann.

Die Erledigung der Frage, ob sich die Gleichungen (D) in der angegebenen Weise befriedigen lassen, bietet zwar theoretisch keine Schwierigkeiten, praktisch aber im Allgemeinen recht grosse, namentlich wegen des Auftretens der r^2 unbekannten Constanten c_{kj}. Es ist daher nicht überflüssig, noch eine andere Methode zu entwickeln, die ebenfalls zu entscheiden gestattet, ob die beiden Gruppen (A) und (B) demselben Typus angehören, die aber ohne Einführung der Constanten c_{kj} zum Ziele kommt.

Wir bemerken zunächst, dass die allgemeine infinitesimale Transformation:

$$\sum_1^r{}_k \, e_k F_k(x) q = F(x) q$$

der Gruppe (A) sich durch eine gewöhnliche Differentialgleichung r^{ter} Ordnung definiren lässt, denn $F(x)$ ist augenscheinlich die allgemeinste Lösung einer linearen homogenen Differentialgleichung von der Form:

$$\text{(E)} \qquad \frac{d^r F}{dx^r} + \alpha_1(x) \frac{d^{r-1} F}{dx^{r-1}} + \cdots + \alpha_{r-1}(x) \frac{dF}{dx} + \alpha_r(x) F = 0.$$

Ebenso ist in der allgemeinen infinitesimalen Transformation:

$$\sum_1^r{}_k \, e_k \mathfrak{F}_k(x_1) q_1 = \mathfrak{F}(x_1) q_1$$

der Gruppe (B) die Function $\mathfrak{F}(x_1)$ die allgemeinste Lösung einer Differentialgleichung von der Form:

$$\text{(G)} \qquad \frac{d^r \mathfrak{F}}{dx_1{}^r} + \mathfrak{a}_1(x_1) \frac{d^{r-1} \mathfrak{F}}{dx_1{}^{r-1}} + \cdots + \mathfrak{a}_{r-1}(x_1) \frac{d\mathfrak{F}}{dx_1} + \mathfrak{a}_r(x_1) \mathfrak{F} = 0.$$

Nun erhält die allgemeine infinitesimale Transformation $F(x)q$ bei Ausführung der Transformation (C′) die Gestalt: $F(x)\chi(x)q_1$ und es kommt alles darauf an, ob das die allgemeine infinitesimale Transformation der Gruppe (B) ist, das heisst, ob: $F(x)\chi(x)$, ausgedrückt als Function von x_1, die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

(G) ist. Demnach werden die beiden Gruppen (A) und (B) stets dann aber auch nur dann demselben Typus angehören, wenn es eine Transformation von der Gestalt:

$$(H) \qquad x_1 = \varphi(x), \quad \mathfrak{F} = F \cdot \chi(x)$$

giebt, vermöge deren die Differentialgleichung (E) in (G) übergeht*). Ob es eine solche Transformation giebt, ist theoretisch nicht schwer zu entscheiden, sobald die Gruppen (E) und (G) vorgelegt sind. Denn führt man die Transformation (H) auf die Differentialgleichung (E) aus und verlangt man, dass die entstehende Gleichung die Form (G) besitzen soll, so erhält man für $\varphi(x)$ und $\chi(x)$ eine Reihe von gewöhnlichen Differentialgleichungen, von denen man stets feststellen kann, ob sie mit einander verträglich sind oder nicht und ob sie befriedigt werden können, ohne dass sich φ auf eine Constante reducirt.

In Folge des Gesagten ist nun auch die Frage nach allen verschiedenen Typen von r-gliedrigen Gruppen von der Form [1] auf ein andres Problem zurückgeführt, nämlich auf das Problem zu untersuchen, was für invariante Eigenschaften die lineare Differentialgleichung r^{ter} Ordnung (E) gegenüber allen Transformationen von der Gestalt (H) besitzt. Wir wollen dieses Problem nicht in Angriff nehmen, da uns das zu weit führen würde, und nur bemerken, dass bei seiner Erledigung die Frage eine grosse Rolle spielt, ob die Differentialgleichung (E) eine infinitesimale Transformation von der Form: $\delta x = \xi(x)\,\delta t$, $\delta F = F \cdot \Omega(x)\,\delta t$ gestattet, in der ξ von Null verschieden ist.

Dagegen wollen wir eine andere Bemerkung nicht unterdrücken. Die allgemeinste r-gliedrige Gruppe von der Form [1] enthält r willkürliche Functionen, dagegen haben wir, um die Gestalt dieser Gruppe zu vereinfachen, in der Transformation (C′) im Ganzen nur zwei willkürliche Functionen zur Verfügung. Es ist daher von vornherein klar, dass wir von den r willkürlichen Functionen der Gruppe:

$$(A) \qquad F_1(x)\,q, \ldots F_r(x)\,q$$

zwei, aber auch nur zwei fortschaffen können. In der That, wenn wir $\frac{1}{F_1(x)}y$ als neues y einführen, so geht die Gruppe (A) über in:

---

*) Der erste, der sich mit der Frage beschäftigt hat, unter welchen Bedingungen die Differentialgleichung (E) durch eine Transformation von der Form (H) in (G) übergeführt werden kann, ist Laguerre. Nach ihm haben mehrere Mathematiker, besonders Halphen, die Invariantentheorie der linearen Differentialgleichung (E) gegenüber allen Transformationen (H) behandelt. Diese Theorie hat viele Berührungspunkte mit der allgemeinen Theorie der endlichen und unendlichen Transformationsgruppen.

$$q, \frac{F_2(x)}{F_1(x)}q, \cdots \frac{F_r(x)}{F_1(x)}q,$$

ist ferner $r > 1$, so können wir $\frac{F_2(x)}{F_1(x)}$, das sicher keine blose Constante ist, als neues x einführen und erhalten eine Gruppe von der Form:

$$q,\ xq,\ \Phi_1(x)q, \ldots \Phi_{r-2}(x)q \quad (r \geqq 2).$$

Wir können daher die Gruppen [1] durch die folgenden ersetzen:

$$[1'] \quad \boxed{q} \qquad \boxed{q,\ xq,\ \Phi_1(x)q, \ldots \Phi_{r-2}(x)q, \quad (r \geqq 2)}.$$

Hier sind die $r-2$ willkürlichen Functionen Φ in gewissem Sinne wesentlich, das heisst, es lässt sich keine von ihnen durch Einführung neuer Veränderlicher fortschaffen.

Die für die Gruppen [1] gewonnenen Ergebnisse lassen sich ohne Weiteres auf die Gruppen [2], S. 40 übertragen, denn der Inbegriff dieser Gruppen bleibt ebenfalls bei allen Transformationen von der Form (C′) invariant. Wir brauchen uns deshalb bei der Frage nach den verschiedenen Typen, die unter den Gruppen [2] vertreten sind, nicht aufzuhalten. Bemerkt sei nur noch, dass wir die Gruppen [2] durch die nachstehenden:

$$[2'] \quad \boxed{q,\ yq} \qquad \boxed{q,\ xq,\ \Phi_1(x)q, \ldots \Phi_{r-2}(x)q,\ yq, \quad (r \geqq 2)}$$

ersetzen können, wo die $r-2$ willkürlichen Functionen Φ in dem oben angegebenen Sinne wesentlich sind.

Auch die Form der Gruppen [6], S. 45 ist noch einer Vereinfachung fähig. Es lässt sich nämlich stets erreichen, dass eine Constante α_k verschwindet. In der That, es seien alle $\alpha_k \neq 0$, dann führen wir $ye^{-\alpha_1 x}$ als neues y ein, dabei gehen:

$$e^{\alpha_1 x}q,\ xe^{\alpha_1 x}q, \ldots x^{m_1}e^{\alpha_1 x}q,\ x^{\nu}e^{\alpha_k x}q$$

über in:

$$q,\ xq, \ldots x^{m_1}q,\ x^{\nu}e^{(\alpha_k-\alpha_1)x}q,$$

während yq unverändert bleibt und p die Form: $p - \alpha_1 yq$ annimmt. Demnach dürfen wir die Gruppen [6] durch diese:

$$[6'] \quad \boxed{q,\ xq, \ldots x^m q,\ e^{\alpha_k x}q,\ xe^{\alpha_k x}q, \ldots x^{m_k}e^{\alpha_k x}q,\ yq,\ p \quad (k=1,2\ldots l;\ l \geqq 0)}$$

ersetzen.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass man in den Gruppen [5], S. 44 und und ebenso in den Gruppen [6′] stets einen der nicht verschwindenden Coefficienten α_k gleich 1 machen kann, denn ist zum Beispiel $\alpha_1 \neq 0$, so braucht man nur $\alpha_1 x$ als neues x einzuführen.

§ 14.

Im nächsten Kapitel werden wir systematisch untersuchen, welche unter den Gruppen der §§ 9—13 verschiedenen Typen angehören und werden dann im Stande sein, eine Tabelle aufzustellen, in der für jeden Gruppentypus ein und nur ein Repräsentant enthalten ist. Für jetzt wollen wir uns damit begnügen, unter Berücksichtigung der in § 13 gemachten Bemerkungen die verschiedenen Typen von ein-, zwei-, drei- und viergliedrigen Gruppen zusammenzustellen. Hier sind sie:

I. *Eingliedrige Gruppen.* q .

II. *Zweigliedrige Gruppen.*

a. transitive: $p,\ q$ $\quad$ $p,\ xp + yq$

b. intransitive: $q,\ xq$ $\quad$ $q,\ yq$.

III. *Dreigliedrige Gruppen.*

a. transitive:

$e^x q,\ e^{\alpha x} q,\ p$ $(\alpha \neq 1, 0)$ $\quad$ $e^x q,\ x e^x q,\ p$ $\quad$ $q,\ e^x q,\ p$ $\quad$ $q,\ xq,\ p$

$q,\ p,\ xp + cyq$ $\quad$ $q,\ p,\ xp + (x + y)q$

$p,\ 2xp + yq,\ x^2 p + xyq$ $\quad$ $p,\ xp + yq,\ x^2 p + (2xy + y^2)q$

b. intransitive:

$q,\ xq,\ F(x)q$ $\quad$ $q,\ xq,\ yq$ $\quad$ $q,\ yq,\ y^2 q$.

IV. *Viergliedrige Gruppen.*

a. transitive:

$e^x q,\ e^{\alpha x} q,\ e^{\beta x} q,\ p$ $(\alpha, \beta \neq 0, 1;\ \alpha \neq \beta)$ $\quad$ $e^x q,\ x e^x q,\ e^{\alpha x} q,\ p$ $(\alpha \neq 0, 1)$. $e^x q,\ x e^x q,\ x^2 e^x q,\ p$

$q,\ e^x q,\ e^{\alpha x} q,\ p$ $(\alpha \neq 0, 1)$ $\quad$ $q,\ e^x q,\ x e^x q,\ p$ $\quad$ $q,\ xq,\ e^x q,\ p$ $\quad$ $q,\ xq,\ x^2 q,\ p$

$$\boxed{q,\ e^x q,\ yq,\ p} \qquad \boxed{q,\ xq,\ yq,\ p} \qquad \boxed{q,\ yq,\ y^2 q,\ p}$$

$$\boxed{q,\ xq,\ p,\ xp + cyq} \qquad \boxed{q,\ xq,\ p,\ xp + (2y + x^2)q}$$

$$\boxed{q,\ yq,\ p,\ xp} \qquad \boxed{yq,\ p,\ xp,\ x^2 p + xyq}$$

b. intransitive:

$$\boxed{q,\ xq,\ F_1(x)q,\ F_2(x)q} \qquad \boxed{q,\ xq,\ F(x)q,\ yq}\ .$$

Die in dieser Tabelle stehen gebliebenen willkürlichen Constanten und willkürlichen Functionen können nicht weggeschafft werden; man kann sich davon in jedem einzelnen Falle leicht überzeugen. Es ist demnach jeder Typus von ein-, zwei-, drei- und viergliedrigen Gruppen der Ebene in unsrer Tabelle im Wesentlichen nur durch einen Repräsentanten vertreten.

Kapitel 4.

Klassification der endlichen continuirlichen Gruppen von Punkttransformationen der Ebene.

Im vorigen Kapitel trennten wir zunächst die primitiven Gruppen der Ebene von den imprimitiven. Wir wiesen nach, dass es blos drei verschiedene Typen von primitiven Gruppen giebt und stellten für jeden dieser Typen einen Repräsentanten auf; dagegen ist uns noch nicht gelungen zu entscheiden, wie viele Typen von imprimitiven Gruppen es giebt, wir wissen nur, dass wir für jeden Typus von imprimitiven Gruppen mindestens einen Repräsentanten besitzen. Es liegt das daran, dass wir im vorigen Kapitel nicht eine wirkliche Klassification der imprimitiven Gruppen benutzt haben, sondern nur eine Eintheilung dieser Gruppen in Kategorien, die so gewählt sind, dass eine imprimitive Gruppe sehr gut zweien unsrer Kategorien gleichzeitig angehören kann.

In der That, wir gingen davon aus, dass jede imprimitive Gruppe der Ebene jedenfalls eine Schaar von ∞^1 Curven invariant lässt. Unter den bei der Gruppe invarianten Schaaren von ∞^1 Curven wählten wir nun irgendeine aus und rechneten die Gruppe zur ersten, zweiten, dritten oder vierten Kategorie, jenachdem sie die Curven der betreffenden Schaar null-, ein-, zwei- oder dreigliedrig transformirte. Wenn nun aber eine imprimitive Gruppe zwei verschiedene Schaaren von je ∞^1

Curven invariant lässt, so kann es sehr gut vorkommen, dass sie zum Beispiel die Curven der einen Schaar eingliedrig, die der andern zweigliedrig transformirt, dass sie also nicht blos der zweiten sondern auch der dritten Kategorie angehört.

Wir müssen uns daher nach einem Eintheilungsgrunde umsehen, der uns gestattet, die imprimitiven Gruppen der Ebene in Klassen einzutheilen derart, dass jede imprimitive Gruppe einer aber auch nur einer dieser Klassen angehört. Ein solcher Eintheilungsgrund bietet sich dar in der Zahl der zur Gruppe gehörigen invarianten Schaaren von je ∞^1 Curven. Untersuchen wir daher zunächst, wieviele Schaaren von je ∞^1 Curven bei einer imprimitiven Gruppe der Ebene invariant bleiben können.

§ 15.

Es sei:

$$X_k f = \xi_k(x, y)p + \eta_k(x, y)q \qquad (k = 1 \ldots r)$$

eine r-gliedrige imprimitive Gruppe und x_0, y_0 sei ein Punkt von allgemeiner Lage. Wir bilden die auf S. 33 definirte lineare homogene Gruppe:

$$\mathfrak{Y}_k f = (\lambda_k x' + \mu_k y')p' + (\nu_k x' + \varrho_k y')q' \qquad (k = 1 \ldots r - m),$$

die angiebt, in welcher Weise die ∞^1 Linienelemente $x' : y'$ durch den Punkt x_0, y_0 transformirt werden, sobald man nur solche Transformationen der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ mitnimmt, die diesen Punkt stehen lassen.

Da wir die Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ als imprimitiv vorausgesetzt haben, so lässt die lineare homogene Gruppe: $\mathfrak{Y}_1 f \ldots \mathfrak{Y}_{r-m} f$ mindestens ein Linienelement $x' : y'$ durch den Punkt x_0, y_0 in Ruhe (vgl. S. 32 f.). Nach den Entwickelungen der SS. 27 f. sind aber noch verschiedene Fälle denkbar. Es kann nämlich die Gruppe: $\mathfrak{Y}_1 f \ldots \mathfrak{Y}_{r-m} f$ entweder nur ein einziges Linienelement stehen lassen, oder sie kann deren zwei getrennte oder sie kann endlich jedes der ∞^1 Linienelemente durch den Punkt x_0, y_0 stehen lassen; giebt es nur ein einziges invariantes Linienelement, so kann insbesondere noch der Fall eintreten, dass dieses Linienelement doppelt zählend ist, dass es also aus zwei zusammenfallenden Linienelementen besteht.

Indem wir diese verschiedenen bei der Gruppe: $\mathfrak{Y}_1 f \ldots \mathfrak{Y}_{r-m} f$ denkbaren Möglichkeiten auf die Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ übertragen, erhalten wir Folgendes:

Lässt die Gruppe: $\mathfrak{Y}_1 f \ldots \mathfrak{Y}_{r-m} f$ blos ein Linienelement durch den Punkt x_0, y_0 stehen, so lässt die Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ blos eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\alpha(x, y)dy - \beta(x, y)dx = 0$$

invariant und demnach auch blos eine einzige Schaar von ∞^1 Curven: $\varphi(x, y) = \text{const.}$ Ist insbesondre jenes invariante Linienelement doppelt zählend, so muss auch die invariante Differentialgleichung und die invariante Curvenschaar als doppelt zählend gerechnet werden; die Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ lässt dann zwei zusammenfallende oder, wenn man will, zwei unendlich benachbarte Schaaren von je ∞^1 Curven in Ruhe.

Wenn die Gruppe: $\mathfrak{Y}_1 f \ldots \mathfrak{Y}_{r-m} f$ zwei und nur zwei getrennte Linienelemente durch den Punkt: x_0, y_0 festhält, so lässt die Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ gerade zwei verschiedene gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung invariant und also auch gerade zwei verschiedene Schaaren von je ∞^1 Curven.

Lässt endlich die Gruppe: $\mathfrak{Y}_1 f \ldots \mathfrak{Y}_{r-m} f$ jedes einzelne Linienelement stehen, das durch den Punkt x_0, y_0 geht, so sind zwei Fälle zu unterscheiden jenachdem die Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ transitiv ist oder nicht. Im ersten Falle nimmt jedes der ∞^1 invarianten Linienelemente bei der erweiterten Gruppe: $X_1' f \ldots X_r' f$ (s. S. 31) gerade ∞^2 Lagen an, deren Inbegriff augenscheinlich eine bei der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ invariante Differentialgleichung erster Ordnung: $\alpha(x, y) dy - \beta(x, y) dx = 0$ bestimmt, es giebt daher bei der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ im Ganzen ∞^1 invariante Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\Phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = \text{const.},$$

und in Folge dessen auch gerade ∞^1 verschiedene invariante Schaaren von je ∞^1 Curven. Im zweiten Falle dagegen nimmt jedes der ∞^1 invarianten Linienelemente bei der Gruppe: $X_1' f \ldots X_r' f$ blos ∞^1 verschiedene Lagen an, die ∞^3 Linienelemente der Ebene ordnen sich daher in ∞^2 invariante Schaaren, die durch zwei Gleichungen von der Form:

$$\chi\left(x, y, \frac{y'}{x'}\right) = \text{const.}, \qquad \psi\left(x, y, \frac{y'}{x'}\right) = \text{const.}$$

dargestellt werden; dabei sind die Functionen χ und ψ sicher nicht beide von $\frac{y'}{x'}$ frei, weil sonst die Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ jeden Punkt der Ebene stehen lassen müsste. In diesem Falle giebt es ∞^∞ verschiedene bei der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ invariante Differentialgleichungen erster Ordnung und also auch ∞^∞ verschiedene invariante Schaaren von je ∞^1 Curven; die betreffenden invarianten Differentialgleichungen werden, wie man leicht sieht, durch eine Gleichung von der Form:

$$\Omega\left(\chi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right), \quad \psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)\right) = 0$$

dargestellt, wo die Function Ω vollkommen willkürlich und nur so zu wählen ist, dass sie von $\frac{dy}{dx}$ nicht frei wird.

Hiermit sind alle möglichen Fälle erschöpft. Es giebt demnach vier verschiedene Klassen von imprimitiven Gruppen der Ebene und von diesen vier zerfällt die erste noch in zwei Unterklassen. Es sind die nachstehenden:

I) Eine einzige invariante Schaar von ∞^1 Curven.
   a. Diese Curvenschaar ist einfach zählend.
   b. Diese Curvenschaar ist doppelt zählend.
II) Zwei verschiedene invariante Schaaren von je ∞^1 Curven.
III) ∞^1 verschiedene invariante Schaaren von je ∞^1 Curven.
IV) ∞^∞ verschiedene invariante Schaaren von je ∞^1 Curven.

Wir wollen jetzt noch nicht gleich dazu übergehen, die gewonnene Klassification der imprimitiven Gruppen der Ebene auf die im vorigen Kapitel gefundenen Gruppen anzuwenden. Wir wollen vielmehr die Frage nach den Schaaren von je ∞^1 Curven, die bei einer Gruppe der Ebene invariant bleiben können, noch einmal und zwar rein analytisch erledigen. Wir thun dies, weil die im Vorstehenden gegebene Erledigung dieser Frage auf begrifflichen Ueberlegungen beruhte, die vielleicht manchem Leser zu kurz gefasst sind, dann aber auch, weil wir auf dem neuen Wege die Differentialgleichungen erster Ordnung, denen diese Curvenschaaren genügen, wirklich hinschreiben können und das ist an und für sich wünschenswerth.

§ 16.

Wir denken uns eine r-gliedrige Gruppe:

$$X_k f = \xi_k(x, y)p + \eta_k(x, y)q \qquad (k = 1 \ldots r)$$

der Ebene vorgelegt und fragen nach allen bei dieser Gruppe invarianten Schaaren von je ∞^1 Curven oder, was auf dasselbe hinauskommt (s. S. 30) nach allen Gleichungen von der Form: $\alpha(x, y)y' - \beta(x, y)x' = 0$, die bei der erweiterten Gruppe:

$$X_k' f = \xi_k p + \eta_k q + \xi_k' p' + \eta_k' q' \qquad (k = 1 \ldots r)$$

invariant bleiben.

Jede der gesuchten Gleichungen gestattet ausser den infinitesimalen Transformationen $X_k' f$ offenbar auch noch diese:

$$Uf = x'p' + y'q'.$$

Nun verschwinden, wie man sich leicht überzeugt, die Ausdrücke: $(X_k' U)$ alle identisch, andrerseits lässt sich Uf sicher nicht aus $X_1' f \ldots$

$X_r'f$ linear ableiten, denn sonst müsste es aus einer infinitesimalen Punkttransformation: $\xi(x, y)p + \eta(x, y)q$ durch Erweiterung entstanden sein, was augenscheinlich nicht der Fall ist. Demnach sind die $r + 1$ infinitesimalen Transformationen:

$$X_1'f \ldots X_r'f, \; Uf \tag{1}$$

von einander unabhängig und erzeugen eine $(r + 1)$-gliedrige Gruppe in den Veränderlichen x, y, x', y'. Unsre Aufgabe aber, alle Gleichungen von der Form: $\alpha(x, y)y' - \beta(x, y)x' = 0$ zu bestimmen, die bei der Gruppe: $X_1'f \ldots X_r'f$ invariant bleiben, kann nunmehr auch so ausgesprochen werden: es sollen in den Veränderlichen x, y, x', y' alle nicht von x' und y' freien Gleichungen bestimmt werden, welche die Gruppe (1) gestatten. In dieser neuen Form kann unsre Aufgabe auf Grund der Entwickelungen des Kap. 14 in Abschn. I ohne Schwierigkeit erledigt werden.

Wir beginnen mit der Betrachtung des Falles, dass die $(r + 1)$-gliedrige Gruppe (1) in den Veränderlichen x, y, x', y' transitiv ist. Nach den Regeln des angeführten Kapitels haben wir da zu untersuchen, ob alle vierreihigen Determinanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \xi_1' & \eta_1' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_r & \eta_r & \xi_r' & \eta_r' \\ 0 & 0 & x' & y' \end{vmatrix} \tag{2}$$

vermöge einer von x' und y' nicht freien Gleichung zwischen x, y, x', y' verschwinden können. Nun sind die betreffenden vierreihigen Determinanten sämmtlich ganze homogene Functionen zweiten Grades von x' und y', es kommt daher blos darauf an, festzustellen, ob diese ganzen homogenen Functionen einen von x' und y' nicht freien gemeinsamen Faktor besitzen. Ist ein solcher gemeinsamer Faktor nicht vorhanden, so lässt die Gruppe: $X_1f \ldots X_rf$ gar keine Schaar von ∞^1 Curven invariant, sie ist primitiv. Giebt es dagegen einen solchen gemeinsamen Faktor, so sind verschiedene Fälle zu unterscheiden. Erstens nämlich kann es vorkommen, dass dieser gemeinsame Faktor in x' und y' blos linear ist, dann lässt die Gruppe: $X_1f \ldots X_rf$ nur eine einzige, einfach zählende Schaar von ∞^1 Curven invariant. Zweitens aber kann der gemeinsame Faktor vom zweiten Grade in x' und y' sein; ist er dann durch das Quadrat einer linearen homogenen Function von x' und y' theilbar, so lässt die Gruppe: $X_1f \ldots X_rf$ blos eine, aber eine doppelt zählende Schaar von ∞^1 Curven invariant; ist er

dagegen nicht durch ein solches Quadrat theilbar, so lässt die Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ zwei verschiedene Schaaren von je ∞^1 Curven invariant.

Um diese Entwickelungen durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir sie auf die Gruppe [15], S. 49:

$$p,\ 2xp + yq,\ x^2 p + xyq \tag{3}$$

anwenden. Die Matrix (2) geht für diese Gruppe in die Determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2x & y & 2x' & y' \\ x^2 & xy & 2xx' & xy' + x'y \\ 0 & 0 & x' & y' \end{vmatrix} = -y^2 x'^2$$

über, also ist: $x' = 0$ die einzige invariante Gleichung von der verlangten Beschaffenheit und $x = \text{const.}$ die einzige bei der Gruppe (3) invariante Schaar von ∞^1 Curven, aber diese Curvenschaar ist offenbar doppelt zählend.

Wir kommen zu dem Falle, dass die Gruppe (1) in den Veränderlichen x, y, x', y' intransitiv ist, dass also die $r+1$ Gleichungen:

$$X_1' f = 0, \ \ldots\ X_r' f = 0,\ Uf = 0 \tag{4}$$

wenigstens eine gemeinsame Lösung besitzen.

Es sei erstens wenigstens die Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ in den Veränderlichen x, y transitiv; dann lassen sich die Gleichungen: $X_1' f = 0, \ldots, X_r' f = 0$ nach p und q auflösen, die Gleichungen (4) sind mithin nach dreien der Differentialquotienten: p, q, p', q' auflösbar und besitzen nur eine gemeinsame Lösung, welche nothwendig die Form: $\chi\left(x, y, \frac{y'}{x'}\right)$ hat und von $\frac{y'}{x'}$ nicht frei sein kann. Die ∞^1 Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\chi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = \text{const.}$$

bleiben demnach sämmtlich bei der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ invariant, sie sind aber zugleich die einzigen, die invariant bleiben.

Zweitens sei zwar die Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ in den Veränderlichen x, y intransitiv, aber die Zahl r sei grösser als 1. Dann bestehen Relationen von der Form:

$$X_k f = \varrho_k(x, y) \,.\, X_1 f \qquad (k = 2, 3 \ldots r),$$

also ergiebt sich:

$$X_k' f = \varrho_k X_1' f + \left(x' \frac{\partial \varrho_k}{\partial x} + y' \frac{\partial \varrho_k}{\partial y}\right)(\xi_1 p' + \eta_1 q')$$
$$(k = 2, 3 \ldots r).$$

Da nun keiner der Ausdrücke:

$$x' \frac{\partial \varrho_k}{\partial x} + y' \frac{\partial \varrho_k}{\partial y} \qquad (k = 2 \ldots r)$$

identisch verschwinden kann — sonst wären ja die infinitesimalen Transformationen: $X_1 f \ldots X_r f$ gar nicht von einander unabhängig — so können die $r + 1$ Gleichungen (4) durch die drei von einander unabhängigen Gleichungen:

$$X_1' f = 0, \quad \xi_1 p' + \eta_1 q' = 0, \quad x' p' + y' q' = 0$$

ersetzt werden; diese ihrerseits sind, weil der Ausdruck: $\xi_1 y' - \eta_1 x'$ nicht identisch null ist, mit den Gleichungen:

$$X_1 f = 0, \quad p' = 0, \quad q' = 0$$

äquivalent. Mit andern Worten: die Gleichungen (4) haben unter den gemachten Voraussetzungen blos eine, aber eine von x' und y' freie Lösung: $\varphi(x, y)$ gemein, die nichts andres ist als die Invariante der intransitiven Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ in x, y. Hieraus folgt, dass jede von x' und y' nicht freie Gleichung, welche die Gruppe: $X_1' f \ldots X_r' f$, Uf gestattet, durch Nullsetzen aller dreireihigen Determinanten der Matrix (2) erhalten werden muss. Bedenkt man ferner, dass unter den gemachten Voraussetzungen Relationen von der Form:

$$\xi_k = \varrho_k \cdot \xi_1, \quad \xi_k' = \varrho_k \xi_1' + \xi_1 \left(x' \frac{\partial \varrho_k}{\partial x} + y' \frac{\partial \varrho_k}{\partial y} \right)$$

$$\eta_k = \varrho_k \cdot \eta_1, \quad \eta_k' = \varrho_k \eta_1' + \eta_1 \left(x' \frac{\partial \varrho_k}{\partial x} + y' \frac{\partial \varrho_k}{\partial y} \right)$$

$$(k = 2 \ldots r)$$

bestehen, so erkennt man, dass sich durch Nullsetzen der dreireihigen Determinanten der Matrix (2) die folgenden Gleichungen ergeben:

$$(\xi_1 y' - \eta_1 x') \left(x' \frac{\partial \varrho_k}{\partial x} + y' \frac{\partial \varrho_k}{\partial y} \right) = 0 \qquad (k = 2, 3 \ldots r);$$

dabei sind solche nicht verschwindende Faktoren, die nur von x und y abhängen, bereits weggelassen. Eine bei der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ invariante Differentialgleichung erster Ordnung ist demnach:

$$\xi_1 dy - \eta_1 dx = 0;$$

die ∞^1 Integralcurven dieser Differentialgleichung werden offenbar durch die Gleichung: $\varphi(x, y) = \text{const.}$ dargestellt und bleiben sämmtlich invariant. Ob es nun noch eine zweite invariante Differentialgleichung giebt, das hängt von dem Verhalten der Matrix:

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial \varrho_2}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial \varrho_r}{\partial x} \\ \frac{\partial \varrho_2}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial \varrho_r}{\partial y} \end{vmatrix}$$

ab. Verschwinden nicht alle zweireihigen Determinanten dieser Matrix identisch, so ist: $\xi_1 dy - \eta_1 dx = 0$ die einzige bei der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ invariante Differentialgleichung und zwar ist diese Differentialgleichung einfach zu zählen. Verschwinden dagegen die bewussten zweireihigen Determinanten sämmtlich, so können zwei Fälle eintreten. Entweder nämlich giebt es ausser: $\xi_1 dy - \eta_1 dx = 0$ noch eine zweite, davon verschiedene invariante Differentialgleichung erster Ordnung, nämlich diese:

$$\frac{\partial \varrho_2}{\partial x} dx + \frac{\partial \varrho_2}{\partial y} dy = 0,$$

oder die invariante Differentialgleichung: $\xi_1 dy - \eta_1 dx = 0$ ist doppelt zu zählen.

Endlich ist noch der Fall $r = 1$ zu erledigen. Da haben die Gleichungen (4) augenscheinlich zwei unabhängige Lösungen gemein, als deren eine wir die Invariante $\varphi(x, y)$ der eingliedrigen Gruppe: $X_1 f$ selbst wählen dürfen, während die andere nicht von x' und y' frei sein kann und daher die Form: $\chi\left(x, y, \frac{y'}{x'}\right)$ besitzt. Alle bei der eingliedrigen Gruppe: $X_1 f$ invarianten Differentialgleichungen erster Ordnung werden daher durch eine Gleichung von der Form:

$$\chi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = \Omega(\varphi(x, y))$$

dargestellt, wo Ω eine willkürliche Function bezeichnet.

Hiermit sind alle Ergebnisse, die wir im vorigen Paragraphen durch begriffliche Ueberlegungen gewonnen haben, analytisch abgeleitet und zugleich nicht unwesentlich vervollständigt.

§ 17.

Wir gehen nunmehr dazu über, für jede der im vorigen Kapitel gefundenen imprimitiven Gruppen die bei ihr invariant bleibenden Schaaren von je ∞^1 Curven zu bestimmen. Dabei könnten wir uns der soeben entwickelten allgemeinen Methode bedienen, denn die liefert alle bei einer vorgelegten Gruppe invarianten Differentialgleichungen erster Ordnung und demnach durch Integration auch alle invarianten Schaaren von je ∞^1 Curven. Da aber alle Gruppen, die wir zu betrachten haben, in einfachen Normalformen vorliegen, so ziehen wir es vor, einen andern etwas kürzern Weg einzuschlagen.

Gestattet die Curvenschaar: $\varphi(x, y) = \text{const.}$ eine infinitesimale Transformation Xf, so kann das in zwei wesentlich verschiedenen Weisen geschehen. Entweder bleibt jede einzelne Curve der Schaar invariant, der Ausdruck: $X\varphi$ verschwindet also identisch, oder die

Curven der Schaar werden unter einander vertauscht, es ist also: $Xf = \Omega(f)$, wo die Function ω nicht identisch null ist. Im zweiten Falle kann man, indem man:

$$\int \frac{df}{\Omega(f)}$$

als neues f einführt, erreichen, dass Xf den Werth 1 erhält.

Hieraus folgt, dass jede Curvenschaar: $f(x, y) = \text{const.}$, die bei der infinitesimalen Transformation: q invariant bleibt, entweder der Gleichung: $f'(y) = 0$ oder der Gleichung: $f'(y) = 1$ genügt; ausser der Schaar: $x = \text{const.}$ gestattet also auch jede Schaar von der Form: $y + \omega(x) = \text{const.}$ die infinitesimale Transformation q, unter $\omega(x)$ eine willkürliche Function von x verstanden. Damit sind aber alle bei q invarianten Schaaren von je ∞^1 Curven gefunden.

Soll eine von der Schaar: $x = \text{const.}$ verschiedene Curvenschaar ausser q auch eine Transformation von der Form: $F(x)q$ zulassen, so muss sie die Form: $y + \omega(x) = \text{const.}$ haben und überdies muss der Ausdruck:

$$F(x) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(y + \omega(x)) = F(x)$$

eine Function von: $y + \omega(x)$ allein sein. Da das nicht angeht, so ist: $x = \text{const.}$ die einzige Schaar von ∞^1 Curven, die gleichzeitig die beiden infinitesimalen Transformationen: q, $F(x)q$ zulässt und überhaupt die einzige, die zwei unabhängige infinitesimale Transformationen von der Form: $F_1(x)q$, $F_2(x)q$ gestattet.

Die infinitesimalen Transformationen: q und yq lassen beide die Curvenschaar: $x = \text{const.}$ invariant. Jede andere bei beiden invariante Schaar muss die Form: $y + \omega(x) = \text{const.}$ besitzen und ausserdem muss:

$$y \cdot \frac{\partial}{\partial y}(y + \omega(x)) = y$$

eine Function von $y + \omega(x)$ allein sein. Demnach ist $\omega(x)$ eine Constante und es sind: $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ die einzigen gleichzeitig bei q und yq invarianten Schaaren von je ∞^1 Curven. Ebenso bleibt bei den beiden Transformationen: $F(x)q$, yq ausser: $x = \text{const.}$ nur noch die Schaar: $\frac{y}{F(x)} = \text{const.}$ invariant.

Soll die Schaar: $y + \omega(x) = \text{const.}$ die infinitesimale Transformation p gestatten, so muss $\omega'(x)$ eine Function von $y + \omega(x)$ allein und also eine Constante sein. Die Gleichung:

$$ax + by = \text{const.}$$

mit dem willkürlichen Parameter: $a : b$ stellt demnach alle bei p und q invarianten Schaaren von je ∞^1 Curven dar.

Schliesslich ist noch ein Punkt zu erledigen. Alle imprimitiven Gruppen des vorigen Kapitels lassen die Curvenschaar: $x = \text{const.}$ invariant. Giebt es nun bei einer vorgelegten Gruppe: $X_1 f \dots X_r f$ ausser der Schaar: $x = \text{const.}$ keine andre invariante Curvenschaar, so bleibt immer noch die Frage offen, ob die Schaar: $x = \text{const.}$ einfach oder doppelt zählend ist. Wie entscheidet man darüber?

Es sei also: $x = \text{const.}$ die einzige Schaar von ∞^1 Curven, die bei der vorgelegten r-gliedrigen Gruppe: $X_1 f \dots X_r f$ invariant bleibt; dann werden alle Transformationen dieser Gruppe, die einen Punkt x_0, y_0 von allgemeiner Lage invariant lassen, die ∞^1 Linienelemente durch diesen Punkt derart transformiren, dass nur das Linienelement: $x' = 0$ aber kein anderes invariant bleibt. Soll nun insbesondre die Curvenschaar: $x = \text{const.}$ doppelt zählend invariant bleiben, so ist nothwendig und hinreichend, dass das Linienelement: $x' = 0$ doppelt zählend invariant bleibt, das aber tritt (ygl. Kap. 2, S. 28) dann und nur dann ein, wenn die auf S. 33 definirte lineare homogene Gruppe:

$$(\lambda_k x' + \mu_k y')p' + (\nu_k x' + \varrho_k y')q' \qquad (k = 1 \dots r - m),$$

die zur Gruppe: $X_1 f \dots X_r f$ gehört, eine der beiden Formen hat:

$$x'q' + \alpha(x'p' + y'q'); \qquad x'q',\ x'p' + y'q',$$

wo α eine beliebige endliche Constante bezeichnet. Demnach wird die Gruppe: $X_1 f \dots X_r f$ die Schaar: $x = \text{const.}$ stets dann aber auch nur dann doppelt zählend invariant lassen, wenn alle ihre infinitesimalen Transformationen, deren Reihenentwickelungen nach Potenzen von $x - x_0$ und $y - y_0$ mit Gliedern erster Ordnung beginnen, entweder aus einer von der Form:

$$(x - x_0)q + \alpha\{(x - x_0)p + (y - y_0)q\} + \cdots$$

oder aus zwei von der Form:

$$(x - x_0)q + \cdots, \quad (x - x_0)p + (y - y_0)q + \cdots$$

linear abgeleitet werden können; dabei wird von der Form der Glieder zweiter und höherer Ordnung, die in diesen infinitesimalen Transformationen auftreten, ganz abgesehen.

Nach diesen Vorbemerkungen wollen wir die im vorigen Kapitel gefundenen imprimitiven Gruppen einzeln durchgehen und die bei ihnen invarianten Schaaren von ∞^1 Curven bestimmen. Wir machen dabei auch von den in § 13 eingeführten Vereinfachungen Gebrauch.

Was zunächst die Gruppen [1′], S. 56 anbetrifft, so lässt die eingliedrige:

$$q$$

∞^∞ verschiedene Curvenschaaren invariant, nämlich ausser der Schaar:

$x =$ const. noch jede von der Form: $y + \omega(x) =$ const., dagegen lassen die Gruppen:

$$q,\ xq,\ F_1(x)q,\ \ldots\ F_r(x)q \qquad (r \gtrless 0)$$

nur die eine Schaar: $x =$ const. invariant, diese aber, wie man leicht sieht, doppeltzählend.

Unter den Gruppen [2′], S. 56 lässt die zweigliedrige:

$$q,\ yq$$

zwei Schaaren invariant, nämlich: $x =$ const. und: $y =$ const.; die übrigen Gruppen aber:

$$q,\ xq,\ F_1(x)q,\ \ldots F_r(x)q,\ yq \qquad (r \gtrless 0)$$

lassen nur die Schaar: $x =$ const. invariant und zwar einfach zählend.

Bei der Gruppe [3], S. 42:

$$q,\ yq,\ y^2q$$

treten nur die beiden invarianten Curvenschaaren:

$$x = \text{const.} \quad \text{und} \quad y = \text{const.}$$

auf.

Die eingliedrige Gruppe p S. 43 ist mit der Gruppe q ähnlich und braucht daher nicht besonders berücksichtigt zu werden.

Wir kommen zu den Gruppen [5], S. 44, welche die Form haben:

$$e^{\alpha_k x}q,\ xe^{\alpha_k x}q,\ \ldots\ x^{m_k}e^{\alpha_k x}q,\ p$$
$$(k = 1, 2 \ldots l).$$

Hat eine solche Gruppe mehr als zwei Parameter, so lässt sie nur die Schaar: $x =$ const. invariant, diese aber doppeltzählend. Hat sie dagegen blos zwei Parameter, so verhält sich die Sache anders. Die Gruppe hat dann nämlich die Form: $e^{\alpha x}q,\ p$, wo α entweder verschwindet oder gleich 1 gesetzt werden kann (vgl. S. 57). Im ersten Falle haben wir die Gruppe:

$$p,\ q$$

mit den ∞^1 invarianten Curvenschaaren: $ax + by =$ const. Im zweiten Falle haben wir die Gruppe: $e^x q,\ p$; diese bringen wir zunächst, indem wir ye^{-x} als neues y einführen, auf die Form: $q,\ p - yq$, endlich führen wir e^{-x} als neues x ein und bekommen die Gruppe:

$$q,\ xp + yq.$$

Bei dieser neuen Gruppe tritt zunächst die invariante Curvenschaar: $x =$ const. auf; jede andere invariante Schaar muss die Form: $y + \omega(x) =$ const. haben und zwar muss:

$$x\frac{\partial}{\partial x}(y + \omega) + y\frac{\partial}{\partial y}(y + \omega) = y + x\omega'(x)$$

eine Function von: $y + \omega(x)$ allein sein, demnach hat $\omega(x)$ die Form:

$\omega(x) = ax + c$ und es bleibt also auch hier jede der ∞^1 Curvenschaaren: $ax + by =$ const. invariant.

Hat die Gruppe [6′], S. 56:

$$q,\ xq,\ \ldots\ x^m q,\ e^{\alpha_k x} q,\ xe^{\alpha_k x} q,\ \ldots\ x^{m_k} e^{\alpha_k x} q,\ yq,\ p$$
$$(k = 1, 2 \ldots l;\ l \geqq 0)$$

mehr als drei Parameter, so giebt es nur die eine invariante Schaar: $x =$ const., die überdies blos einfach zählt; hat sie dagegen nur drei Parameter, so besitzt sie die Form:

$$q,\ yq,\ p$$

und lässt die beiden Schaaren: $x =$ const., $y =$ const. invariant.

Die Gruppe [7], S. 45:

$$q,\ yq,\ y^2 q,\ p$$

lässt nur die beiden Schaaren: $x =$ const. und: $y =$ const. invariant.

Die Gruppen: p, xp und: $p, xp + q$ ([8] und [9] auf S. 46) können unberücksichtigt bleiben, denn die erste ist mit der Gruppe: q, yq, die zweite mit der Gruppe: $q, xp + yq$ ähnlich.

Wenn $r > 0$ ist, giebt es ausser: $x =$ const. keine Curvenschaar, die bei der Gruppe [10], S. 47:

$$q,\ xq,\ \ldots\ x^r q,\ p,\ xp + cyq$$

invariant bleibt und zwar ist die Schaar: $x =$ const. einfach zu zählen, wenn $c \neq 1$ ist, dagegen doppelt zu zählen im Falle: $c = 1$. Ist $r = 0$ so haben wir die Gruppe:

$$q,\ p,\ xp + cyq,$$

bei der wegen des Vorhandenseins von p und q nur invariante Schaaren von der Form: $ax + by =$ const. auftreten können. Welche von diesen Schaaren wirklich invariant bleiben, das ergiebt sich aus der Bedingung, dass:

$$x \frac{\partial}{\partial x}(ax + by) + cy \frac{\partial}{\partial y}(ax + by) = ax + cby$$

eine Function von $ax + by$ allein werden muss. Man erkennt sofort, dass im Falle: $c = 1$ jede der ∞^1 Schaaren: $ax + by =$ const. invariant bleibt, während es im Falle: $c \neq 1$ nur die beiden invarianten Schaaren: $x =$ const, und: $y =$ const. giebt.

Bei der Gruppe [11], S. 47:

$$q,\ xq,\ \ldots\ x^{r-1} q,\ p,\ xp + (ry + x^r) q \qquad (r > 0)$$

bleibt nur die Schaar: $x =$ const. invariant und zwar doppeltzählend, wenn $r = 1$, sonst blos einfach zählend.

Die Gruppe [12], S. 48:

$$q,\ xq,\ \ldots\ x^r q,\ yq,\ p,\ xp$$

lässt, wenn $r > 0$ ist, nur die Schaar $x =$ const. invariant, wenn aber $r = 0$ ist, so haben wir die Gruppe:

$$q,\ yq,\ p,\ xp,$$

bei der ausserdem noch die Schaar: $y =$ const. invariant bleibt.

Die Gruppe [13], S. 48:

$$q,\ yq,\ y^2 q,\ p,\ xp$$

ergiebt nur die beiden Schaaren: $x =$ const. und $y =$ const.

Die Gruppe [14]: $p,\ xp,\ x^2 p$ ist mit der Gruppe: $q,\ yq,\ y^2 q$ ähnlich und kommt daher in Wegfall.

Von der Gruppe [15], S. 49:

$$p,\ 2xp + yq,\ x^2 p + xyq$$

sahen wir schon auf S. 63, dass sie blos die Schaar: $x =$ const. invariant lässt, diese aber doppeltzählend.

Bei der Gruppe [16], S. 49:

$$p,\ xp + yq,\ x^2 p + (2xy + y^2) q$$

können nur Curvenschaaren von der Form: $ax + by =$ const. invariant bleiben, denn die Untergruppe: $p,\ xp + yq$ lässt alle diese Curvenschaaren, aber nur sie invariant (vgl. S. 68). Es muss ferner der Ausdruck:

$$x^2 \frac{\partial}{\partial x}(ax + by) + (2xy + y^2) \frac{\partial}{\partial y}(ax + by) = ax^2 + 2bxy + by^2$$

eine Function von $ax + by$ allein werden, was nur eintritt, wenn entweder $b = 0$ ist oder $a = b$. Die beiden einzigen bei unsrer Gruppe invarianten Curvenschaaren sind demnach: $x =$ const. und: $x + y =$ const. Indem wir noch $x + y$ als neues y einführen, erhalten wir aus unsrer Gruppe diese:

$$p + q,\ xp + yq,\ x^2 p + y^2 q,$$

mit den beiden invarianten Curvenschaaren: $x =$ const. und: $y =$ const.

Die Gruppe [17], S. 50:

$$q,\ xq,\ \ldots\ x^r q,\ p,\ 2xp + ryq,\ x^2 p + rxyq$$

ergiebt, wenn $r > 0$, nur die Schaar: $x =$ const. und zwar im Falle $r = 2$ doppelt zählend, sonst einfach zählend. Ist dagegen $r = 0$, so ist die Gruppe mit der Gruppe: $q,\ yq,\ y^2 q,\ p$ ähnlich und kommt daher in Wegfall.

Zu der Gruppe [18], S. 50:

$$yq,\ p,\ xp,\ x^2 p + xyq$$

gehört nur die eine invariante Schaar: $x = \text{const.}$, denn wegen des Vorhandenseins von p und xp könnte nur noch die Schaar: $y = \text{const.}$ in Frage kommen, die aber gestattet die infinitesimale Transformation: $x^2p + xyq$ nicht. Die einzige invariante Schaar: $x = \text{const.}$ ist einfach zählend.

Die Gruppe [19], S. 51:

$$q,\ xq,\ \ldots\ x^rq,\ yq,\ p,\ xp,\ x^2p + rxyq$$

ergiebt, wenn $r > 0$, nur die eine invariante Schaar: $x = \text{const.}$, die einfach zählt. Ist $r = 0$, so haben wir die Gruppe: $q,\ yq,\ p,\ xp,\ x^2p$, die mit der Gruppe: $q,\ yq,\ y^2q,\ p,\ xp$ ähnlich und also nicht zu berücksichtigen ist.

Zu der Gruppe [20], S. 52:

$$q,\ yq,\ y^2q,\ p,\ xp,\ x^2p$$

gehören endlich die beiden invarianten Schaaren: $x = \text{const.}$ und: $y = \text{const.}$

§ 18.

Nunmehr können wir endlich dazu übergehen, die Tabelle für die einzelnen Gruppen der Ebene aufzustellen. Auf die imprimitiven Gruppen wenden wir dabei natürlich die in § 15 aufgestellte Klassification an. So erhalten wir das

Theorem 6. *Jede endliche continuirliche Gruppe von Punkttransformationen der Ebene x, y ist durch eine Punkttransformation mit einer und im Allgemeinen nur mit einer der nachstehend aufgeführten Gruppen ähnlich:*

A) Primitive Gruppen:

$$p,\ q,\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq,\ x^2p + xyq,\ xyp + y^2q$$

$$p,\ q,\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq$$

$$p,\ q,\ xq,\ xp - yq,\ yp$$

B) Imprimitive Gruppen:

I) Gruppen mit einer einzigen invarianten Schaar von ∞^1 Curven.

a) Die invariante Schaar zählt blos einfach.

$$q,\ xq,\ p,\ 2xp + yq,\ x^2p + xyq$$

$q,\ xq,\ \ldots\ x^r q,\ p,\ 2xp + ryq,\ x^2 p + rxyq$
$(r > 2)$

$q,\ xq,\ \ldots\ x^r q,\ yq,\ p,\ xp,\ x^2 p + rxyq$
$(r > 0)$

$yq,\ p,\ xp,\ x^2 p + xyq$

$q,\ xq,\ \ldots\ x^r q,\ yq,\ p,\ xp$
$(r > 0)$

$q,\ xq,\ \ldots\ x^r q,\ p,\ xp + cyq$
$(r > 0;\ c \neq 1)$

$q,\ xq,\ \ldots\ x^{r-1} q,\ p,\ xp + (ry + x^r)q$
$(r > 1)$

$q,\ xq,\ \ldots\ x^m q,\ e^{\alpha_k x} q,\ xe^{\alpha_k x} q,\ \ldots\ x^{m_k} e^{\alpha_k x} q,\ yq,\ p$
$(k = 1, 2 \ldots l;\ l \gtreqless 0;\ l + m + m_1 + \cdots + m_l > 0;\ \alpha_1 = 1)$

$q,\ xq,\ F_1(x)q,\ \ldots\ F_r(x)q,\ yq$
$(r \gtreqless 0)$

b) Die invariante Schaar zählt doppelt.

$q,\ xq,\ x^2 q,\ p,\ xp + yq,\ x^2 p + 2xyq$

$p,\ 2xp + yq,\ x^2 p + xyq$

$q,\ xq,\ \ldots\ x^r q,\ p,\ xp + yq$
$(r > 0)$

$q,\ p,\ xp + (x + y)q$

$$e^{\alpha_k x} q,\ x e^{\alpha_k x} q,\ \ldots\ x^{m_k} e^{\alpha_k x} q,\ p$$
$$(\alpha_1(\alpha_1-1)=0,\ k=1,2\ldots l;\ l>0;\ l+m_1+\cdots+m_l>1)$$

$$q,\ xq,\ F_1(x)q,\ \ldots\ F_r(x)q$$
$$(r \gtreqless 0)$$

II) Gruppen mit zwei invarianten Schaaren von je ∞^1 Curven.

$$q,\ yq,\ y^2q,\ p,\ xp,\ x^2p \qquad p+q,\ xp+yq,\ x^2p+y^2q$$

$$q,\ yq,\ y^2q,\ p,\ xp \qquad q,\ yq,\ y^2q,\ p \qquad q,\ yq,\ y^2q$$

$$q,\ yq,\ p,\ xp \qquad q,\ p,\ xp+cyq \quad (c\neq 0,1) \qquad q,\ yq,\ p \qquad q,\ yq$$

III) Gruppen mit ∞^1 invarianten Schaaren von je ∞^1 Curven.

$$p,\ q,\ xp+yq \qquad q,\ xp+yq \qquad p,\ q$$

IV) Gruppen mit ∞^∞ invarianten Schaaren von je ∞^1 Curven.

$$q\ .$$

In dieser Tabelle sind die Gruppen, die nur eine Curvenschaar invariant lassen, so geordnet, dass zuerst alle Gruppen stehen, welche die invariante Curvenschaar dreigliedrig transformiren, dann folgen die, welche diese Schaar zweigliedrig transformiren und so weiter. Aehnlich ist die Anordnung der Gruppen, die zwei Curvenschaaren invariant lassen.

Von den willkürlichen Parametern, die in unsrer Tabelle vorkommen, lässt sich keiner fortschaffen, denn man überzeugt sich leicht, dass in jedem einzelnen Falle schon die Zusammensetzung der betreffenden Gruppe diese Parameter enthält und dass sie aus der Zusammensetzung nicht entfernt werden können. Ebenso lässt sich von den auftretenden willkürlichen Functionen keine beseitigen. Demnach ist in unsrer Tabelle jeder Typus von Gruppen der Ebene im Wesentlichen nur durch einen Repräsentanten vertreten.

§ 19.

Jede endliche continuirliche Gruppe von Punkttransformationen der Ebene x, y lässt sich auch als eine Gruppe von Berührungstransformationen dieser Ebene auffassen und zwar ist sie eine reducible Gruppe von Berührungstransformationen. Umgekehrt kann jede reducible Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene x, y stets durch eine Berührungstransformation in eine Gruppe von Punkttransformationen dieser Ebene übergeführt werden (vgl. Abschn. II, S. 390). Durch unsre Aufstellung aller endlichen continuirlichen Gruppen von Punkttransformationen der Ebene x, y ist demnach zugleich die Bestimmung aller endlichen continuirlichen reducibeln Gruppen von Berührungstransformationen dieser Ebene geleistet. Erinnern wir uns schliesslich, dass wir die irreducibeln Gruppen von Berührungstransformationen der Ebene bereits im Abschnitt II aufgestellt haben (s. dort das Theor. 69, S. 433), so bemerken wir, dass uns nunmehr überhaupt alle endlichen continuirlichen Gruppen von Berührungstransformationen der Ebene bekannt sind. Immerhin bleibt noch einiges zu thun.

Unsre Tabelle der Gruppen von Punkttransformationen der Ebene enthält zwar für jeden Typus von reducibeln Berührungstransformationsgruppen dieser Ebene sicher einen Repräsentanten, aber es ist denkbar, dass ein und derselbe Typus von Berührungstransformationsgruppen in unsrer Tabelle durch zwei oder noch mehr Repräsentanten vertreten ist, mit andern Worten: es können sehr gut noch gewisse unter den Gruppen, die unsre Tabelle aufzählt, durch Berührungstransformationen mit einander ähnlich sein, während sie doch durch Punkttransformationen sicher nicht mit einander ähnlich sind.

Wann können nun überhaupt zwei Gruppen von Punkttransformationen einer Ebene, die durch Punkttransformation nicht mit einander ähnlich sind, doch durch eine Berührungstransformation ähnlich sein? Offenbar nur dann, wenn jede von ihnen mindestens eine Schaar von ∞^2 Curven der Ebene invariant lässt. Bei jeder wirklichen Berührungstransformation der Ebene geht nämlich die Schaar der ∞^2 Punkte dieser Ebene in eine Schaar von ∞^2 Curven über und umgekehrt kann man jede Schaar von ∞^2 Curven der Ebene stets durch eine Berührungstransformation in die Schaar der ∞^2 Punkte überführen (s. Abschn. II, S. 33 f.).

Demnach müssen wir zunächst unter den auf S. 71 ff. zusammengestellten Gruppen alle die aufsuchen, bei denen eine Schaar von ∞^2 Curven invariant bleibt; diese Gruppen sind die einzigen, unter denen

sich möglicherweise solche befinden, die durch Berührungstransformationen mit einander ähnlich sind.

Wir bemerken zuvörderst, dass eine Gruppe von Punkttransformationen, die drei unabhängige infinitesimale Transformationen von der Form:

$$F_1(x)\,q, \quad F_2(x)\,q, \quad F_3(x)\,q$$

enthält, niemals eine Schaar von ∞^2 Curven invariant lässt; bei der dreigliedrigen Untergruppe, die von diesen drei infinitesimalen Transformationen erzeugt wird, erhält nämlich jede beliebige Curve: $y = f(x)$ die ∞^3 verschiedenen Lagen:

$$y + a_1 F_1(x) + a_2 F_2(x) + a_3 F_3(x) = f(x).$$

Entsprechendes gilt von allen Gruppen, die drei infinitesimale Transformationen von der Form: $q,\ yq,\ y^2 q$ enthalten, denn bei der dreigliedrigen Gruppe: $q,\ yq,\ y^2 q$ wird jede Curve: $y = f(x)$ in die ∞^3 verschiedenen Lagen:

$$\frac{b_1 y + b_2}{y + b_3} = f(x)$$

übergeführt. Endlich machen wir darauf aufmerksam, dass alle Gruppen, die Untergruppen der allgemeinen projectiven Gruppe:

$$p,\ q,\ xp,\ yp,\ xq,\ yq,\ x^2 p + xyq,\ xyp + y^2 q$$

sind, die Schaar der ∞^2 Geraden invariant lassen.

Auf Grund der eben gemachten Bemerkungen kann man fast bei allen Gruppen der SS. 71—73 entscheiden, ob sie eine Schaar von ∞^2 Curven invariant lassen oder nicht. Zweifelhaft bleibt das nur bei den sechs Gruppen:

$$(6)\quad \begin{cases} q,\ xq,\ p,\ xp + (2y + x^2)q & \text{(B, I, a, 7 für } r = 2) \\ q,\ e^x q,\ yq,\ p & \text{(B, I, a, 8 für } l = 1;\ m = m_1 = 0) \\ q,\ e^x q,\ p;\ e^x q,\ xe^x q,\ p & \text{(B, I, b, 5 für } l = 1, 2) \\ e^x q,\ e^{\alpha x} q,\ p \quad (\alpha \neq 0, 1) & \\ p + q,\ xp + yq,\ x^2 p + y^2 q, & \end{cases}$$

weil die nicht in projectiver Form vorliegen.

Unter diesen Gruppen lässt die erste keine Schaar von ∞^2 Curven invariant. Jede bei der dreigliedrigen Untergruppe: $q,\ xq,\ p$ invariante Schaar von ∞^2 Curven hat nämlich die Form:

$$y = a + bx + Cx^2,$$

wo a und b die beiden Parameter der Schaar sind, während der Werth des Parameters C die einzelne invariante Schaar bestimmt; von diesen ∞^1 Schaaren bleibt aber, wie man sich leicht überzeugt (vgl. Abschn. I, S. 467), keine einzige bei der infinitesimalen Transformation:

$$xp + (2y + x^2)q$$

invariant.

Dagegen lässt jede von den fünf übrigen Gruppen (6) mindestens eine Schaar von ∞^2 Curven invariant, denn alle diese Gruppen können in projective Gruppen übergeführt werden.

In der That, die Gruppe: $q,\ e^x q,\ yq,\ p$ verwandelt sich, wenn man e^x als neues x einführt, in die projective Gruppe: $q,\ xq,\ yq,\ xp$, bei derselben Transformation geht zugleich die Gruppe: $q,\ e^x q,\ p$ in die projective Gruppe: $q,\ xq,\ xp$ über. Ferner erhält die Gruppe: $e^x q,\ xe^x q,\ p$ bei der Transformation: $x_1 = -x,\ y_1 = y \cdot e^{-x}$ die projective Form: $q_1,\ x_1 q_1,\ p_1 + y_1 q_1$, ebenso die Gruppe: $e^x q,\ e^{\alpha x} q,\ p$ $(\alpha \neq 0, 1)$ bei der Transformation:

$$x_1 = e^{(\alpha-1)x},\quad y_1 = e^{-x} \cdot y$$

die projective Form:

$$q_1,\ x_1 q_1,\quad (\alpha - 1) x_1 p_1 - y_1 q_1 \quad (\alpha \neq 0, 1).$$

Endlich ist die Gruppe: $p + q,\ xp + yq,\ x^2 p + y^2 q$ durch die Transformation:

$$x_1 = \frac{x+y}{2},\quad y_1 = \frac{xy}{2}$$

mit der projectiven Gruppe:

$$p_1 + x_1 q_1,\quad x_1 p_1 + 2y_1 q_1,\quad (x_1^2 - y_1) p_1 + x_1 y_1 q_1$$

ähnlich.

Wir sprechen zunächst den folgenden bemerkenswerthen Satz aus, der aus den bisherigen Entwickelungen folgt:

Satz 1. *Jede endliche continuirliche Gruppe von Punkttransformationen der Ebene x, y, die eine Schaar von ∞^2 Curven dieser Ebene invariant lässt, kann durch geeignete Wahl der Veränderlichen x, y in eine projective Gruppe übergeführt werden.*

Sodann stellen wir alle Gruppen der Ebene zusammen, die eine Schaar von ∞^2 Curven invariant lassen. Nach der Gliederzahl geordnet sind es die folgenden:

$(\mathfrak{A})$ $\quad p,\ q,\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq,\ x^2 p + xyq,\ xyp + y^2 q$

$(\mathfrak{B})$
$$\begin{cases} p,\ q,\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq \\ q,\ xq,\ yq,\ p,\ xp,\ x^2 p + xyq \end{cases}$$

$(\mathfrak{C})$
$$\begin{cases} p,\ q,\ xq,\ xp - yq,\ yp \\ q,\ xq,\ p,\ 2xp + yq,\ x^2 p + xyq \\ q,\ xq,\ yq,\ p,\ xp \end{cases}$$

$$
(\mathfrak{D})\quad \begin{cases} yq,\ p,\ xp,\ x^2p + xyq \\ q,\ xq,\ p,\ xp + cyq \\ q,\ xq,\ yq,\ p \\ q,\ e^x q,\ yq,\ p \equiv q,\ xq,\ yq,\ xp \\ q,\ yq,\ p,\ xp \end{cases}
$$

$$
(\mathfrak{E})\quad \begin{cases} p,\ 2xp + yq,\ x^2p + xyq \\ p + q,\ xp + yq,\ x^2p + y^2q \equiv \\ \qquad \equiv p + xq,\ xp + 2yq,\ (x^2 - y)\,p + xyq \\ q,\ p,\ xp + (x + y)\,q \\ q,\ p,\ xp + cyq \qquad (c \neq 0, 1) \\ q,\ p,\ yq \\ q,\ p,\ xp + yq \\ q,\ xq,\ p \\ q,\ e^x q,\ p \equiv q,\ xq,\ xp \\ e^x q,\ xe^x q,\ p \equiv q,\ xq,\ p + yq \\ e^x q,\ e^{\alpha x} q,\ p \equiv q,\ xq,\ (\alpha - 1)\,xp - yq \qquad (\alpha \neq 0, 1) \\ q,\ xq,\ yq \end{cases}
$$

$$
(\mathfrak{F})\quad \begin{cases} q,\ p;\ q,\ xq \\ q,\ xp + yq;\ q,\ yq \end{cases}
$$

$$
(\mathfrak{G})\quad q.
$$

Bei den nicht projectiven Gruppen sind hier jedesmal projective Gruppen hinzugefügt, mit denen sie ähnlich sind.

Nunmehr können wir endlich die Aufgabe erledigen, von der wir ausgegangen sind. Nach dem auf S. 74 Gesagten ist nämlich klar, dass irgend zwei der in Theorem 6 aufgezählten Gruppen nur dann durch eine Berührungstransformation mit einander ähnlich sein können, wenn sie zu den Gruppen (𝔄) bis (𝔊) gehören. Es bleibt daher nur noch zu untersuchen, ob zwei unter diesen Gruppen durch Berührungstransformation mit einander ähnlich sein können.

Wir wollen diese Untersuchung nicht im Einzelnen durchführen, da das bei Benutzung des Theorems 52 auf S. 311 von Abschnitt II keine Schwierigkeit hat. Wir theilen nur ihr Ergebniss mit.

Die beiden Gruppen 𝔅, 1 und 𝔅, 2 sind durch eine Berührungstransformation mit einander ähnlich und zwar durch eine dualistische Transformation, ebenso ist die Gruppe 𝔈, 1 mit der Gruppe 𝔈, 2 durch eine dualistische Transformation ähnlich, ferner die Gruppe 𝔇, 4 mit der Gruppe 𝔇, 5, die Gruppen 𝔈, 4 mit den Gruppen 𝔈, 10,

sowie $\mathfrak{E}, 5$ mit $\mathfrak{E}, 8$ und $\mathfrak{E}, 6$ mit $\mathfrak{E}, 11$, ausserdem die Gruppen $\mathfrak{E}, 3$ mit $\mathfrak{E}, 9$ und endlich $\mathfrak{F}, 1$ mit $\mathfrak{F}, 2$ und $\mathfrak{F}, 3$ mit $\mathfrak{F}, 4$. Hierzu kommt noch, dass die Gruppe $\mathfrak{E}, 1$ mit der Gruppe $\mathfrak{E}, 2$ durch eine nicht dualistische Berührungstransformation ähnlich ist (s. Abschn. II, S. 312).

Unsre Tabelle auf S. 71 ff. liefert demnach für jeden Typus von reducibeln Berührungstransformationsgruppen der Ebene x, y einen und im Allgemeinen auch nur einen Repräsentanten, wenn man die Gruppen $\mathfrak{B}, 2$; $\mathfrak{C}, 2$; $\mathfrak{D}, 4$; $\mathfrak{E}, 2, 3, 8, 10, 11$; $\mathfrak{F}, 2, 4$ weglässt.

Damit ist auch die Bestimmung aller endlichen continuirlichen Berührungstransformationsgruppen einer Ebene zum Abschluss gebracht.

Kapitel 5.

Bestimmung und Klassificirung aller projectiven Gruppen der Ebene.

Die projectiven Gruppen der Ebene x, y sind die Untergruppen der allgemeinen projectiven Gruppe:

(1) $$p,\ q,\ xp,\ yp,\ xq,\ yq,\ x^2p + xyq,\ xyp + y^2q$$

dieser Ebene. Wie überhaupt alle endlichen continuirlichen Gruppen der Ebene, so theilen wir auch die projectiven Gruppen in Typen ein, aber wir rechnen zwei projective Gruppen nur dann zu demselben Typus, wenn sie durch eine projective Transformation mit einander ähnlich, wenn sie also innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe mit einander gleichberechtigt sind. Da nun jeder Typus von projectiven Gruppen durch eine einzige ihm angehörige Gruppe vollständig bestimmt ist und durch diese Gruppe repräsentirt wird, so können wir die in der Ueberschrift bezeichnete Aufgabe schärfer so aussprechen:

Es soll für jeden Typus von projectiven Gruppen der Ebene ein aber auch nur ein Repräsentant angegeben werden.

Bei der Lösung dieser Aufgabe ist es nöthig und zugleich in mancher Beziehung vortheilhaft, auch auf die dualistischen Transformationen der Ebene Rücksicht zu nehmen. Die allgemeine projective Gruppe der Ebene geht nämlich bei jeder dualistischen Transformation der Ebene in sich über, sie ist, wie man es auszudrücken pflegt, mit sich dualistisch. Hieraus folgt zunächst, dass jede r-gliedrige projective Gruppe der Ebene bei Ausführung einer dualistischen Transformation sich stets wieder in eine r-gliedrige projective Gruppe verwandelt. Bedenkt man ferner, dass die allgemeinste dualistische Trans-

formation der Ebene erhalten wird, wenn man zuerst die allgemeinste projective Transformation ausführt und sodann irgend eine dualistische Transformation, so erkennt man, dass die Typen von projectiven Gruppen der Ebene in zwei verschiedene Arten zerfallen. Jeder Typus der ersten Art bleibt bei allen dualistischen Transformationen der Ebene invariant, während die ihm angehörigen Gruppen unter einander vertauscht werden. Dagegen ordnen sich die Typen der zweiten Art in Paare von je zweien derart, dass die beiden Typen, die ein Paar bilden, bei jeder dualistischen Transformation unter einander vertauscht werden. Gehört eine projective Gruppe einem Typus der ersten Art an, so lässt sich augenscheinlich immer eine dualistische Transformation angeben, bei der die Gruppe in sich übergeht, die Gruppe ist also mit sich dualistisch. Die Gruppen, die Typen der zweiten Art angehören, sind natürlich nicht mit sich selbst dualistisch, aber ihre Bestimmung vereinfacht sich nicht unwesentlich; man braucht nämlich bei jedem Paare zusammengehöriger Typen der zweiten Art nur für einen der beiden Typen einen Repräsentanten aufzusuchen, einen Repräsentanten des andern Typus erhält man dann durch eine beliebige dualistische Transformation.

Für das Folgende ist es nützlich, eine dualistische Transformation zu kennen und zu wissen, wie bei ihr die infinitesimalen projectiven Transformationen sich ändern. Wir wollen deshalb die betreffenden Formeln für die dualistische Transformation aufstellen, welche durch die Gleichung:

$$x x_1 + y y_1 + 1 = 0$$

definirt ist, welche also jeden Punkt in seine Polare in Bezug auf den Kegelschnitt: $x^2 + y^2 + 1 = 0$ verwandelt und jede Gerade in ihren Pol in Bezug auf diesen Kegelschnitt.

Die in Rede stehende dualistische Transformation ist eine Berührungstransformation der Ebene; denken wir sie uns als homogene Berührungstransformation geschrieben, so werden ihre Gleichungen nach Abschn. II, Theor. 15, S. 150 aus:

$$\Omega = x x_1 + y y_1 + 1 = 0$$

$$p - \lambda \frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0, \quad q - \lambda \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0$$

$$p_1 + \lambda \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} = 0, \quad q_1 + \lambda \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} = 0$$

durch Fortschaffung von λ und Auflösung nach x_1, y_1, p_1, q_1 erhalten die Transformation lautet daher:

$$(2)\qquad \begin{cases} x_1 = -\dfrac{p}{xp+yq}, & y_1 = -\dfrac{q}{xp+yq} \\ p_1 = x(xp+yq), & q_1 = y(xp+yq). \end{cases}$$

Um nun die neue Form zu finden, welche die infinitesimalen projectiven Transformationen (1) bei unsrer Berührungstransformation erhalten, müssen wir bedenken, dass die Ausdrücke (1) auch als die charakteristischen Functionen gewisser homogener infinitesimaler Berührungstransformationen aufgefasst werden können (a. a. O. S. 265). Demnach brauchen wir blos in die Ausdrücke (1) vermöge (2) die neuen Veränderlichen x_1, y_1, p_1, q_1 an Stelle von x, y, p, q einzuführen (a. a. O. S. 267, Satz 2). Auf diese Weise ergiebt sich die Tabelle:

$$(3)\qquad \begin{cases} p = x_1^2 p_1 + x_1 y_1 q_1, \quad q = x_1 y_1 p_1 + y_1^2 q_1 \\ xp = -x_1 p_1, \quad yp = -x_1 q_1, \quad xq = -y_1 p_1, \quad yq = -y_1 q_1 \\ x^2 p + xyq = p_1, \quad xyp + y^2 q = q_1 \end{cases}$$

mit Hülfe deren man zu jeder projectiven Gruppe der Ebene sofort die dualistische Gruppe hinschreiben kann, in die sie bei unsrer dualistischen Transformation übergeht.

Zu bemerken ist noch, dass die allgemeine projective Gruppe (1) durch unsre dualistische Transformation isomorph auf sich selbst bezogen wird und zwar genau in der Weise, die uns schon in Abschn. I auf S. 555 begegnet ist.

Die Wichtigkeit der Aufgabe, deren Erledigung das gegenwärtige Kapitel gewidmet ist, lässt es wünschenswerth erscheinen, die Behandlung dieser Aufgabe von dem Früheren möglichst unabhängig zu halten. Deshalb werden wir hier von der in Kap. 3 und 4 durchgeführten Bestimmung aller endlichen continuirlichen Gruppen von Punkttransformationen der Ebene keinen Gebrauch machen.

Dass es möglich ist, davon Gebrauch zu machen, zeigt die folgende Ueberlegung: Die projectiven Gruppen der Ebene lassen sich auch definiren als die continuirlichen Gruppen der Ebene, bei denen die Schaar aller ∞^2 Geraden, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung: $y'' = 0$ invariant bleibt. Kennt man daher alle Typen von endlichen continuirlichen Gruppen der Ebene, so wird man unter diesen zunächst alle die auswählen, deren Repräsentanten wenigstens eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung invariant lassen, denn nur solche Gruppen können möglicherweise in projective Gruppen übergeführt werden. Ist G der Repräsentant eines der ausgewählten Typen, so bestimme man alle bei G invarianten Differentialgleichungen zweiter Ordnung und bestimme für jede dieser Differentialgleichungen eine Punkttransformation der Ebene, bei der sie in die Gleichung $y'' = 0$ übergeht, vor-

ausgesetzt natürlich, dass es eine solche Transformation giebt. Dadurch erhält man eine Reihe von Punkttransformationen, vermöge deren G in projective Gruppen übergeht und, wenn man diese projectiven Gruppen aufstellt, bekommt man Repräsentanten für alle Typen von projectiven Gruppen, die mit G durch Punkttransformation ähnlich sind. Indem man die angedeutete Rechnung für alle jene ausgewählten Typen von Gruppen der Ebene durchführt, gelangt man zu allen Typen von projectiven Gruppen der Ebene.

Lie hat durch Anwendung der beschriebenen Methode alle Typen von projectiven Gruppen mit mehr als zwei Parametern wirklich aufgestellt (in seinem Archiv Bd. X, S. 90—101, Kristiania 1885). Bei den zwei- und eingliedrigen projectiven Gruppen ist die Methode nicht gut anwendbar. Die in § 20 ff. benutzte Methode steht im Wesentlichen a. a. O. S. 102 ff.

§ 20.

Es ist zweckmässig, zuerst die verschiedenen Typen von eingliedrigen projectiven Gruppen aufzustellen, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die verschiedenen Typen von infinitesimalen projectiven Transformationen.

Nach Abschn. I, S. 585, Satz 2 lässt jede infinitesimale projective Transformation der Ebene mindestens einen Punkt und eine hindurchgehende Gerade invariant. Denken wir uns nun die invariante Gerade durch eine projective Transformation ins Unendliche verlegt, so wird die betreffende infinitesimale projective Transformation linear, sie erhält also die Form:

$$(\alpha x + \beta y + \gamma)\, p + (\alpha' x + \beta' y + \gamma')\, q .$$

Denken wir uns ferner durch eine lineare Transformation den invarianten Punkt auf der unendlich fernen Geraden in den unendlich fernen Punkt der y-Axe verlegt, so erhalten wir eine infinitesimale projective Transformation, welche die Schaar der Geraden: $x = \text{const.}$ invariant lässt und welche daher die Gestalt:

$$(\alpha x + \gamma)\, p + (\alpha' x + \beta' y + \gamma')\, q \tag{4}$$

besitzt. Wir brauchen daher nur die infinitesimalen projectiven Transformationen von der Form (4) zu untersuchen und festzustellen, was für verschiedene Typen von derartigen Transformationen es in der allgemeinen projectiven Gruppe (1) giebt.

Zunächst seien α und γ beide gleich Null. Verschwinden dann auch noch α' und β', so haben wir einfach die infinitesimale Transformation: q, sonst führen wir durch eine lineare Transformation von der Form:

$$x = x_1 + a, \quad y = y_1 + b x_1 + c$$

neue Veränderliche ein und erhalten so die Transformation:

$$\{(\alpha' + b\beta')x_1 + \beta' y_1 + (a\alpha' + c\beta' + \gamma')\}\, q_1,$$

die durch geeignete Wahl von a, b und c stets auf eine der beiden Formen: $x_1 q_1$, $y_1 q_1$ gebracht werden kann. Nun aber geht $x_1 q_1$ durch die projective Transformation:

$$x_2 = \frac{1}{x_1}, \quad y_2 = \frac{y_1}{x_1}$$

in q_2 über, also kommen in dem gegenwärtigen Falle nur die beiden infinitesimalen Transformationen:

$$\boxed{q} \qquad \boxed{yq}$$

in Betracht. Die repräsentiren auch wirklich zwei verschiedene Typen; denn q ist eine infinitesimale Translation und lässt alle Punkte der unendlich fernen Geraden, sowie alle Geraden durch den unendlich fernen Punkt der y-Axe in Ruhe, dagegen ist yq eine infinitesimale perspective Transformation, bei der alle Punkte der Geraden: $y = 0$ und alle Geraden durch den unendlich fernen Punkt der y-Axe in Ruhe bleiben; da nun der unendlich ferne Punkt der y-Axe nicht auf der Geraden: $y = 0$ liegt, so leuchtet ein, dass die beiden infinitesimalen Transformationen q und yq innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe nicht mit einander gleichberechtigt sind.

Zweitens sei in der infinitesimalen Transformation (4) zwar $\alpha = 0$, nicht aber γ, so dass wir also $\gamma = 1$ wählen können. Wir führen jetzt durch die lineare Transformation:

$$x_1 = \lambda x, \quad y_1 = y + \mu x + \nu$$

neue Veränderliche ein, dann erhält unsre Transformation:

$$p + (\alpha' x + \beta' y + \gamma')\, q$$

die Form:

$$\lambda p_1 + \left\{\frac{\alpha' - \mu\beta'}{\lambda} x_1 + \beta' y_1 + \gamma' + \mu - \nu\beta'\right\} q_1.$$

Verschwindet β' nicht, so wählen wir:

$$\alpha' - \mu\beta' = 0, \quad \gamma' + \mu - \nu\beta' = 0, \quad \lambda = \beta'$$

und finden die Transformation: $p_1 + y_1 q_1$. Ist dagegen $\beta' = 0$, so können wir durch geeignete Wahl von λ und μ stets eine der beiden Formen: $p_1 + x_1 q_1$, p_1 erreichen. Von den gefundenen Transformationen ist die letzte: p_1 mit q gleichberechtigt und daher nicht zu berücksichtigen, dafür repräsentiren aber die beiden Transformationen:

$$\boxed{p + yq} \qquad \boxed{p + xq}$$

zwei neue von den oben erhaltenen verschiedene Typen. Die Transformation: $p + yq$ lässt nämlich von Punkten nur die beiden unend-

lich fernen Punkte auf den Coordinatenaxen invariant und von Geraden ausser der unendlich fernen nur noch die Gerade: $y = 0$. Dagegen lässt: $p + xq$ keine andre Gerade stehen als die unendlich ferne und keinen andern Punkt als den unendlich fernen Punkt der y-Axe.

Es sei endlich drittens in der infinitesimalen Transformation (4) das α von Null verschieden oder, wie wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen dürfen, es sei: $\alpha = 1$. Durch Einführung eines neuen x können wir dann zunächst γ gleich Null machen. In die Transformation: $xp + (\alpha' x + \beta' y + \gamma') q$ führen wir sodann die neuen Veränderlichen:

$$x_1 = x, \quad y_1 = \mu x + \nu y + \varrho$$

ein und bekommen:

$$x_1 p_1 + \{(\mu + \nu\alpha' - \mu\beta') x_1 + \beta' y_1 + \nu\gamma' - \varrho\beta'\} q_1.$$

Ist β' weder gleich Null noch gleich 1, so wählen wir:

$$\mu(1 - \beta') + \nu\alpha' = 0, \quad \nu\gamma' - \varrho\beta' = 0,$$

was die Transformation: $x_1 p_1 + \beta' y_1 q_1$ liefert. Ist $\beta' = 1$, so machen wir: $\nu\gamma' - \varrho = 0$ und ausserdem, falls α' nicht verschwindet, auch noch: $\nu\alpha' = 1$, also finden wir die zwei Transformationen: $x_1 p_1 + (x_1 + y_1) q_1$, $x_1 p_1 + y_1 q_1$. Ist $\beta' = 0$, so machen wir: $\mu + \nu\alpha' = 0$ und, sobald γ' nicht verschwindet, noch $\nu\gamma' = 1$, wodurch wir auf die beiden Transformationen: $x_1 p_1 + q_1$, $x_1 p_1$ geführt werden.

Von den so gefundenen fünf Transformationen sind nun die beiden letzten bezüglich mit: $p + yq$ und yq gleichberechtigt und liefern daher keine neuen Typen. Das Gleiche ist mit der zweiten und dritten dieser fünf Transformationen der Fall, denn bei Ausführung der projectiven Transformation:

$$x_2 = \frac{1}{x_1}, \quad y_2 = -\frac{y_1}{x_1}$$

erhält man:

$$x_1 p_1 + (x_1 + y_1) q_1 = -(x_2 p_2 + q_2), \quad x_1 p_1 + y_1 q_1 = -x_2 p_2.$$

Demnach sind die Transformationen von der Gestalt:

$$(5) \qquad \boxed{xp + cyq \quad (c \neq 0, 1)}$$

die einzigen, die möglicherweise neue, von den bisher erhaltenen verschiedene Typen repräsentiren.

Jede Transformation von der Form (5) lässt drei Punkte stehen, nämlich den Coordinatenanfang und die beiden unendlich fernen Punkte der Coordinatenaxen, zu gleicher Zeit lässt sie natürlich die Seiten des durch diese Punkte bestimmten Dreiecks in Ruhe. Hieraus folgt zunächst, dass die Transformationen (5) ganz neue, von den bisher

gefundenen verschiedene Typen repräsentiren. Es muss aber jetzt noch untersucht werden, ob nicht etwa der Parameter c fortgeschafft werden kann.

Sollen zwei infinitesimale Transformationen von der Form (5) innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe gleichberechtigt sein, so kann das augenscheinlich nur vermöge einer projectiven Transformation geschehen, die das vorhin beschriebene Dreieck invariant lässt. Die projectiven Transformationen von dieser Beschaffenheit sind aber leicht angebbar, sie bilden nämlich eine Gruppe, die aus mehreren getrennten Schaaren von Transformationen besteht (vgl. Abschn. I, S. 310 ff.). Eine dieser Schaaren wird von allen Transformationen gebildet, die jede einzelne Seite des Dreiecks stehen lassen, sie hat offenbar die Form:

$$x_1 = \lambda x, \quad y_1 = \mu y, \tag{6}$$

wo λ und μ willkürliche Parameter sind. Die Transformationen der übrigen Schaaren vertauschen die Dreiecksseiten unter einander; sie werden, wie man sich leicht überzeugt, erhalten, indem man zuerst die allgemeine Transformation der Schaar (6) und sodann die beiden Transformationen:

$$x_1 = y, \quad y_1 = x; \quad x_1 = \frac{1}{x}, \quad y_1 = \frac{y}{x} \tag{7}$$

ein oder mehrmals in geeigneter Reihenfolge ausführt. Nun bleibt bei den Transformationen (6) jede einzelne der Transformationen (5) invariant, während bei den Transformationen (7) die infinitesimale Transformation $xp + cyq$ bezüglich in: $xp + \frac{1}{c} yq$ und: $xp + (1-c)\,yq$ übergeht. Demnach werden zwei infinitesimale Transformationen von der Form (5), die bezüglich die Parameter c und c_1 haben, nur dann innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe gleichberechtigt sein, wenn c_1 einen der sechs Werthe:

$$c, \quad \frac{1}{c}, \quad 1-c, \quad \frac{1}{1-c}, \quad \frac{c-1}{c}, \quad \frac{c}{c-1}$$

besitzt, oder, wie aus der Theorie des Doppelverhältnisses von vier Punkten bekannt ist, wenn die Gleichung besteht:

$$\frac{(c_1^2 - c_1 + 1)^3}{c_1^2\,(c_1 - 1)^2} = \frac{(c^2 - c + 1)^3}{c^2\,(c-1)^2}.$$

Hiermit ist bewiesen, dass zwei infinitesimale Transformationen von der Form (5) nur ausnahmsweise mit einander gleichberechtigt sind, dass also der Parameter c nicht beseitigt werden kann, dass er wesentlich ist. Die Transformationen (5) repräsentiren in Folge dessen unendlich viele verschiedene Typen.

Im Ganzen giebt es also innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe der Ebene die folgenden verschiedenen Typen von infinitesimalen Transformationen:

$$(8)\quad \left\{ \begin{array}{cccc} & \boxed{xp + cyq \quad (c \neq 0, 1)} & & \\ \boxed{p + yq} & \boxed{p + xq} & \boxed{yq} & \boxed{q} \end{array} \right. .$$

Die Punkte und Geraden, die bei diesen infinitesimalen Transformationen in Ruhe bleiben, bilden der Reihe nach die folgenden Figuren:

Hier ist die unendlich ferne Gerade immer ins Endliche verlegt, überdies ist zu beachten, dass jedesmal, wenn drei verschiedene Punkte auf einer Geraden oder drei verschiedene Gerade durch einen Punkt invariant bleiben, stets überhaupt alle Punkte der betreffenden Geraden und alle Geraden durch den betreffenden Punkt ihre Lage behalten.

Wie man sieht, gehört zu jedem Typus von infinitesimalen projectiven Transformationen der Ebene eine ganz bestimmte Figur, die von den invarianten Punkten und Geraden gebildet wird. Ist daher eine beliebige infinitesimale projective Transformation Xf vorgelegt und kennt man alle bei Xf invarianten Punkte und Geraden, so kann man sofort angeben, welchem Typus Xf angehört; nur wenn Xf ein nicht ausgeartetes Dreieck invariant lässt, kann der Typus nicht mit solcher Bestimmtheit angegeben werden, denn man weiss dann nur, dass Xf mit einer infinitesimalen projectiven Transformation von der Form:

$$xp + cyq \quad (c \neq 0, 1)$$

gleichberechtigt ist, es muss daher noch besonders untersucht werden, welchen Werth der Parameter c für die vorgelegte Transformation Xf besitzt.

Denkt man sich zu den oben gezeichneten Figuren die dualistisch entsprechenden, so erhält man in jedem einzelnen Falle Figuren mit genau derselben Vertheilung der Punkte und Geraden. Hieraus folgt sofort, dass die vier Typen, deren Repräsentanten:

$$p + yq, \; p + xq, \; yq, \; q$$

sind, bei jeder dualistischen Transformation in sich übergehen; demnach ist jede infinitesimale projective Transformation, die einem dieser Typen angehört, mit sich selbst dualistisch (vgl. S. 79). Andrerseits

geht die infinitesimale Transformation: $xp + cyq$ bei der dualistischen Transformation (2) über in: $-(x_1 p_1 + c y_1 q_1)$, sie ist also ebenfalls mit sich selbst dualistisch. Wir haben daher den

Satz 1. *Jede infinitesimale projective Transformation der Ebene ist mit sich selbst dualistisch, das heisst, es giebt stets dualistische Transformationen, bei denen die betreffende infinitesimale Transformation in sich übergeht.*

§ 21.

Wir wollen die gewonnenen Ergebnisse benutzen, um alle Curven der Ebene zu bestimmen, die eine oder mehrere infinitesimale projective Transformationen zulassen*). Die Kenntniss dieser Curven wird uns nachher von grossem Nutzen sein.

Gestattet eine Curve der Ebene eine infinitesimale projective Transformation, so muss sie durch eine projective Transformation in eine Curve übergeführt werden können, die bei einer der infinitesimalen Transformationen (8) invariant bleibt. Demnach genügt es, wenn wir alle Curven von dieser letzteren Beschaffenheit angeben.

Bei den infinitesimalen Transformationen (8) bleiben zunächst invariant die jedesmaligen Bahncurven, die der Reihe nach durch die folgenden Gleichungen dargestellt werden:

$$y = a \,.\, x^c; \quad y = a \,.\, e^x; \quad y - \tfrac{1}{2} x^2 = a; \quad x = a; \quad x = a,$$

in denen a eine willkürliche Constante bezeichnet. Allerdings muss hinzugefügt werden, dass zu den Bahncurven im ersten Falle auch noch die Gerade: $x = 0$ und in den vier ersten Fällen auch noch die unendlich ferne Gerade gehört. Jede Curve, die bei einer der infinitesimalen Transformationen (8) invariant bleibt und die keine Bahncurve ist, muss nach Abschn. I, Theor. 15, S. 117 in der Weise invariant bleiben, dass jeder ihrer Punkte seine Lage behält. Dieser Fall tritt aber nur bei den infinitesimalen Transformationen yq und q ein, von denen die erste alle Punkte der Geraden $y = 0$, die zweite alle Punkte der unendlich fernen Geraden stehen lässt.

Nun kann man die Curve: $y - \frac{1}{2} x^2 = a$ stets durch eine projective Transformation in die Curve: $y = \frac{1}{2} x^2$ überführen, die zu den Curven von der Form: $y = ax^c$ gehört. Ferner kann man in den Gleichungen:

$$y = ax^c; \quad y = ae^x$$

*) Die Frage nach allen Curven von dieser Beschaffenheit ist zum ersten Male erledigt in einer Abhandlung von Klein und Lie in den Mathematischen Annalen, Bd. 4, S. 50 ff., vgl. auch die Comptes Rendus von 1870, Bd. 70, S. 1222 ff.

die Constante a, wenn sie von Null verschieden ist, stets durch eine projective Transformation gleich 1 machen, also können wir sagen:

Gestattet eine ebene Curve eine infinitesimale projective Transformation, so ist sie entweder eine gerade Linie oder sie kann durch projective Transformation auf eine der beiden Formen:

$$y = x^c; \quad y = e^x$$

gebracht werden, wo der Parameter c einen von 0 und 1 verschiedenen Werth besitzt.

Es fragt sich jetzt, ob es Curven giebt, die mehr als eine infinitesimale projective Transformation gestatten.

Zunächst ist klar, dass jede Gerade genau sechs unabhängige infinitesimale projective Transformationen zulässt, denn wir können jede Gerade durch projective Transformation ins Unendliche verlegen, die unendlich ferne Gerade aber gestattet die sechs infinitesimalen Transformationen:

$$p,\ q,\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ xq + yq,$$

welche die allgemeine lineare Gruppe erzeugen, dagegen keine von diesen sechs unabhängige infinitesimale projective Transformation.

Soll ferner die Curve: $y = x^c$ die infinitesimale projective Transformation:

$$Xf = e_1 p + e_2 q + e_3 xp + e_4 yp + e_5 xq + e_6 yq + e_7 (x^2 p + xyq) + \\ + e_8 (xyp + y^2 q)$$

gestatten, so ist nach Abschn. I, S. 109 nothwendig und hinreichend, dass der Ausdruck $X(y - x^c)$ bei der Substitution: $y = x^c$ identisch verschwindet, es müssen also die Constanten $e_1 \ldots e_8$ so beschaffen sein, dass die Gleichung:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{c} e_2 + e_5 x - c e_1 x^{c-1} + (e_6 - c e_3) x^c + (1 - c) e_7 x^{c+1} - \\ - c e_4 x^{2c-1} + (1 - c) e_8 x^{2c} = 0 \end{array} \right.$$

für alle Werthe von x identisch besteht. Da die Werthe $c = 0$ und $c = 1$ ausgeschlossen sind, so kommen in dieser Gleichung sieben Potenzen von x vor, deren Exponenten folgendermassen lauten:

$$(9') \qquad 0,\ 1,\ c - 1,\ c,\ c + 1,\ 2c - 1,\ 2c.$$

Im Allgemeinen sind diese Exponenten alle von einander verschieden, im Allgemeinen kann also die Gleichung (9) nur dann bestehen, wenn $e_2, e_5, e_1, e_7, e_4, e_8$ verschwinden und $e_6 = c e_3$ ist, das heisst, wenn die infinitesimale Transformation Xf die bekannte Form: $xp + cyq$ hat. Es giebt aber auch Werthe von c, für welche die sieben Exponenten (9′) nicht mehr von einander verschieden sind; die

einzigen von 0 und 1 verschiedenen Werthe von c, für die dieser Fall eintritt, sind:

$$c = 2, \quad c = \tfrac{1}{2}, \quad c = -1$$

und zwar giebt es für diese Werthe von c jedesmal unter den Exponenten (9′) nur fünf von einander verschiedene, so dass die Gleichung (9) nur fünf unabhängige Relationen zwischen $e_1 \ldots e_8$ liefert.

Hiermit ist bewiesen, dass es unter den Curven von der Form:

$$y = x^c \qquad (c \neq 0, 1)$$

nur drei giebt, die mehr als eine infinitesimale projective Transformation zulassen, es sind dies die drei Kegelschnitte:

$$y = x^2, \quad y = x^{\frac{1}{2}}, \quad y = \frac{1}{x},$$

von denen jeder gerade drei unabhängige infinitesimale projective Transformationen zulässt. Da übrigens die beiden letzten dieser Kegelschnitte durch die projectiven Transformationen (7) auf S. 84 in den ersten übergehen, so ist hiermit, wenn man das früher Gesagte berücksichtigt, zugleich der bekannte Satz bewiesen, dass jeder nicht ausgeartete Kegelschnitt durch projective Transformation in jeden andern übergehen kann.

In ganz ähnlicher Weise erkennt man, dass die Curve: $y = e^x$ keine andre infinitesimale projective Transformation zulässt als die schon bekannte: $p + yq$; die Rechnung braucht wohl nicht erst durchgeführt zu werden.

Demnach gilt der

Satz 2. *Gestattet eine Curve der Ebene mehr als eine infinitesimale projective Transformation dieser Ebene, so gestattet sie entweder sechs oder drei unabhängige infinitesimale Transformationen dieser Art; im ersten Falle ist sie eine Gerade, im zweiten ein nicht ausgearteter Kegelschnitt. Gestattet eine Curve blos eine infinitesimale projective Transformation, so kann ihre Gleichung durch projective Transformation entweder die Form: $y = x^c$ oder die Form: $y = e^x$ annehmen und zwar hat im ersten Falle die Constante c einen von $0, \frac{1}{2}, 1, 2$ und -1 verschiedenen Werth.*

Die drei unabhängigen infinitesimalen projectiven Transformationen, die einen nicht ausgearteten Kegelschnitt invariant lassen, erzeugen selbstverständlich eine dreigliedrige projective Gruppe, die wir auch wohl kurz als die Gruppe des betreffenden Kegelschnitts bezeichnen. Da nun jeder nicht ausgeartete Kegelschnitt durch projective Transformation in jeden andern übergeführt werden kann, so gehören die Gruppen aller nicht ausgearteten Kegelschnitte einem und demselben

Typus an. Als Repräsentanten dieses Typus wählen wir die Gruppe des Kegelschnitts: $y - \frac{1}{2}x^2 = 0$, die folgendermassen lautet (vgl. S. 76):

$$(10) \qquad \boxed{p + xq,\ xp + 2yq,\ (x^2 - y)p + xyq} \ .$$

Da jeder nicht ausgeartete Kegelschnitt mit sich dualistisch ist, ist es auch diese Gruppe.

§ 22.

Unter allen infinitesimalen projectiven Transformationen sind am einfachsten und zugleich für das Folgende am wichtigsten die, welche mit der infinitesimalen Translation: q gleichberechtigt sind.

Die infinitesimale Translation: q lässt alle Punkte der unendlich fernen Geraden sowie alle Geraden: $x = \text{const.}$, also alle Geraden durch den unendlich fernen Punkt der y-Axe in Ruhe, sie ist überdies, wie man sich leicht überzeugt, die einzige infinitesimale projective Transformation, die das thut, sie ist mithin durch die bei ihr invarianten Punkte und Geraden vollständig definirt. Für die mit q gleichberechtigten infinitesimalen projectiven Transformationen muss natürlich entsprechendes gelten: jede solche Transformation lässt alle Punkte einer bestimmten Geraden und alle Geraden durch einen bestimmten Punkt dieser Geraden in Ruhe, und sie ist durch diese invarianten Punkte und Geraden vollständig definirt. Erinnern wir uns daher des in Abschn. II auf S. 4 eingeführten Begriffs „Linienelement" — als Linienelement bezeichneten wir ja den Inbegriff eines Punktes und einer hindurchgehenden Geraden — so können wir sagen:

Zu jeder infinitesimalen projectiven Transformation, die mit einer infinitesimalen Translation gleichberechtigt ist, gehört ein ganz bestimmtes Linienelement der Ebene und umgekehrt gehört zu jedem Linienelement der Ebene eine ganz bestimmte infinitesimale projective Transformation, die mit einer infinitesimalen Translation gleichberechtigt ist.

Es giebt demnach im Ganzen ∞^3 infinitesimale projective Transformationen, die mit einer infinitesimalen Translation gleichberechtigt sind.

Um zu einer analytischen Darstellung dieser ∞^3 Transformationen zu gelangen, betrachten wir irgend ein Linienelement; sein Punkt möge durch die Gleichungen:

$$(11) \qquad cx - a = 0, \quad cy - b = 0$$

dargestellt sein, seine Gerade durch die Gleichung:

$$(12) \qquad \lambda x + \mu y + \nu = 0.$$

Zwischen den homogenen Parametern a, b, c, λ, μ, ν muss hier die Relation:

$$\lambda a + \mu b + \nu c = 0 \tag{13}$$

bestehen, weil ja die Gerade des Linienelements durch seinen Punkt geht. Soll nun eine infinitesimale projective Transformation:

$$\begin{cases} e_1 p + e_2 q + e_3 x p + e_4 y p + e_5 x q + e_6 y q + e_7 (x^2 p + xyq) + \\ + e_8 (xyp + y^2 q) \end{cases} \tag{14}$$

alle Punkte der Geraden (12) stehen lassen, so müssen die Coefficienten von p und q durch: $\lambda x + \mu y + \nu$ theilbar sein, die Transformation muss also die Form haben:

$$(\lambda x + \mu y + \nu)\,((\alpha x + \beta) p + (\alpha y + \gamma) q),$$

sollen ferner alle Geraden durch den Punkt (11) ihre Lage behalten, so müssen sich $\alpha : \beta : \gamma$ verhalten wie $c : -a : -b$, demnach lautet die allgemeinste infinitesimale projective Transformation, die mit einer Translation gleichberechtigt ist, folgendermassen:

$$(\lambda x + \mu y + \nu)\,\{(cx - a) p + (cy - b) q\}, \quad \lambda a + \mu b + \nu c = 0, \tag{15}$$

sie hängt also von sechs homogenen Parametern ab, die durch die Relation zweiten Grades (13) verknüpft sind.

Vergleicht man den Ausdruck (15) mit der allgemeinen Form (14) einer infinitesimalen projectiven Transformation, so erhält man die Parameter $e_1 \ldots e_8$, die zu der allgemeinsten infinitesimalen Transformation (15) gehören, als bilineare Functionen der sechs homogenen Parameter a, b, c, λ, μ, ν dargestellt:

$$\begin{cases} e_1 = -\nu a, \; e_2 = -\nu b \\ e_3 = \nu c - \lambda a, \; e_4 = -\mu a, \; e_5 = -\lambda b, \; e_6 = \nu c - \mu b \\ e_7 = \lambda c, \; e_8 = \mu c \\ \lambda a + \mu b + \nu c = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Schafft man endlich aus diesen Gleichungen die Parameter λ, μ, ν, a, b, c fort, so erhält man ein System von vier unabhängigen, homogenen, algebraischen Gleichungen:

$$\Omega_i \left(\frac{e_1}{e_8}, \ldots \frac{e_7}{e_8} \right) = 0 \qquad (i = 1 \ldots 4) \tag{17}$$

zwischen $e_1 \ldots e_8$ allein, das seinerseits ebenfalls den Inbegriff aller der infinitesimalen projectiven Transformationen definirt, die mit infinitesimalen Translationen gleichberechtigt sind.

Genau genommen ist es nicht möglich das Gleichungensystem (16) durch ein System von blos vier Gleichungen zwischen $e_1 \ldots e_8$ allein zu ersetzen, ebensowenig wie es zum Beispiel möglich ist eine Curve dritter Ordnung des gewöhnlichen Raumes durch blos zwei Gleichungen zweiten

Grades zwischen vier homogenen Coordinaten darzustellen. Denkt man sich die Gleichungen (16) nach den neun Grössen:

$$\lambda a,\ \lambda b,\ \lambda c,\ \mu a,\ \mu b,\ \mu c,\ \nu a,\ \nu b,\ \nu c$$

aufgelöst und schafft man dann λ, μ, ν, a, b, c fort, so erhält man die folgenden neun Gleichungen zweiten Grades:

$$(18)\quad \begin{cases} 3e_1e_5 - 2e_2e_3 + e_2e_6 = 0, & 3e_2e_4 - 2e_1e_6 + e_1e_3 = 0 \\ 9e_1e_7 - 2e_3^2 - e_3e_6 + e_6^2 = 0, & 9e_2e_8 + e_3^2 - e_3e_6 - 2e_6^2 = 0 \\ 3e_1e_8 - e_3e_4 - e_4e_6 = 0, & 3e_2e_7 - e_3e_5 - e_5e_6 = 0 \\ 3e_4e_7 - 2e_3e_8 + e_6e_8 = 0, & 3e_5e_8 + e_3e_7 - 2e_6e_7 = 0 \\ \multicolumn{2}{c}{9e_4e_5 + 2e_3^2 - 5e_3e_6 + 2e_6^2 = 0,} \end{cases}$$

unter denen sich allerdings nur vier von einander unabhängige befinden. Ob die Gleichungen (18) in ihrer Gesammtheit das System der Gleichungen (16) vollständig ersetzen, soll hier unerörtert bleiben.

Von grosser Wichtigkeit ist es, dass sich aus den Gleichungen (16) keine lineare homogene Relation zwischen $e_1 \ldots e_8$ allein ableiten lässt. Man überzeugt sich davon sehr leicht. Uebrigens kann man das auch daraus erkennen, dass es möglich ist, acht infinitesimale Transformationen von der Form (15) anzugeben, die von einander unabhängig sind. Solche infinitesimale Transformationen sind zum Beispiel:

$$p,\ q,\ xq,\ yp,\ x^2p + xyq,\ xyp + y^2q,$$
$$(x+1)^2p + (x+1)yq,\ x(y+1)p + (y+1)^2q.$$

§ 23.

Nach Abschn. I, S. 211, Satz 6 lässt sich jede $(8-m)$-gliedrige projective Gruppe der Ebene durch m unabhängige lineare homogene Relationen:

$$(19)\qquad \sum_1^8{}_k\, c_{ik}e_k = 0 \qquad (i=1,2\ldots m)$$

zwischen $e_1 \ldots e_8$ definiren; diese Relationen bestimmen die allgemeinste in der Gruppe enthaltene infinitesimale projective Transformation (14). Wünscht man nun zu wissen, ob es in der Gruppe infinitesimale Transformationen von der Form (15) giebt, so braucht man nur zu untersuchen, ob das bei Vereinigung von (19) und (17) entstehende Gleichungensystem befriedigt werden kann, ohne dass $e_1 \ldots e_8$ sämmtlich verschwinden. Demnach ergiebt sich ohne Weiteres der

Satz 3. *Hat eine projective Gruppe der Ebene fünf oder mehr Parameter, so enthält sie mindestens eine infinitesimale Transformation, die in*

der allgemeinen projectiven Gruppe der Ebene mit einer infinitesimalen Translation gleichberechtigt ist.

Bei einer projectiven Gruppe mit weniger als fünf Parametern kann es dagegen sehr gut vorkommen, dass sie keine infinitesimale Transformation von der Form (15) enthält, zum Beispiel tritt dieser Fall bei der dreigliedrigen projectiven Gruppe (s. S. 89):

$$p + xq,\ xp + 2yq,\ (x^2 - y)p + xyq$$

des Kegelschnitts: $y - \frac{1}{2}x^2 = 0$ ein.

Giebt es in einer projectiven Gruppe g eine Anzahl infinitesimaler Transformationen von der Form (15), so muss der Inbegriff dieser infinitesimalen Transformationen bei allen Transformationen der Gruppe invariant bleiben, denn eine infinitesimale Transformation von der Form (15) muss bei jeder Transformation der Gruppe wieder in eine von der Form (15) übergehen. Denken wir uns daher zu jeder in g enthaltenen infinitesimalen Transformation von der Form (15) das Linienelement gezeichnet, das nach S. 89 zu ihr gehört, so erhalten wir eine Figur von Linienelementen, die ebenfalls bei g invariant bleibt. Hieraus ergiebt sich Folgendes:

Enthält die Gruppe g blos eine Anzahl von isolirten infinitesimalen Transformationen (15), so lässt sie jedenfalls ein Linienelement in Ruhe.

Enthält g ∞^1 verschiedene Transformationen (15), so sind zwei Fälle zu unterscheiden, denn entweder bilden die zugehörigen ∞^1 Linienelemente eine Elementmannigfaltigkeit (s. Abschn. II, S. 14) oder sie thun das nicht. Im ersten Falle umhüllen die ∞^1 Linienelemente entweder eine bei g invariante Curve oder einen invarianten Punkt. Im zweiten Falle bilden die Punkte der ∞^1 Linienelemente eine invariante Curve und ihre Geraden umhüllen eine invariante Curve oder einen invarianten Punkt.

Kommen in g ∞^2 infinitesimale Transformationen (15) vor, so bestimmen die zugehörigen ∞^2 Linienelemente eine invariante Schaar von ∞^1 Elementmannigfaltigkeiten (s. Abschn. II, S. 31), also entweder eine invariante Schaar von ∞^1 Curven oder eine invariante Schaar von ∞^1 Punkten, das heisst eine invariante Curve.

Enthält endlich die Gruppe g alle ∞^3 infinitesimalen Transformationen (15), so ist sie die allgemeine projective Gruppe selbst, denn, wie wir auf S. 91 gesehen haben, lassen sich acht unabhängige infinitesimale projective Transformationen angeben, welche die Form (15) besitzen. Dasselbe ergiebt sich übrigens auch aus dem Umstande, dass die infinitesimalen Transformationen:

$$p,\ q,\ x^2p + xyq,\ xyp + y^2q,$$

die der Schaar (15) angehören, durch paarweise Combination die Transformationen:

$$(p,\ x^2p + xyq) = 2xp + yq, \quad (q,\ x^2p + xyq) = xq$$
$$(p,\ xyp + y^2p) = yp, \quad (q,\ xyp + y^2q) = xp + 2yq.$$

liefern.

Die entwickelten Betrachtungen erlauben uns, zunächst die grössten Untergruppen der allgemeinen projectiven Gruppe zu bestimmen und sodann einen allgemeinen Satz aufzustellen, der die Bestimmung aller projectiven Gruppen der Ebene wesentlich erleichtert.

Eine siebengliedrige projective Gruppe g_7 müsste nothwendig ∞^2 infinitesimale Transformationen (15) enthalten; die zu diesen Transformationen gehörigen ∞^2 Linienelemente würden also entweder eine bei g_7 invariante Schaar von ∞^1 Curven oder eine einzelne invariante Curve bestimmen. Der zweite Fall ist ausgeschlossen, da nach Satz 2, S. 88 keine Curve der Ebene mehr als sechs infinitesimale projective Transformationen zulässt. Im ersten Falle müsste jede Curve der Schaar eine sechsgliedrige projective Gruppe gestatten, die Schaar bestände mithin aus lauter Geraden, die eine bei g_7 invariante Curve oder einen invarianten Punkt umhüllten. Auch das ist unmöglich, *demnach enthält die allgemeine projective Gruppe der Ebene überhaupt keine siebengliedrige Untergruppe.*

Eine sechsgliedrige projective Gruppe enthält entweder ∞^2 oder ∞^1, mindestens aber ∞^1 infinitesimale Transformationen (15). Im ersten Falle bestimmen die zugehörigen ∞^2 Linienelemente entweder eine invariante Curve — natürlich eine Gerade — oder eine invariante Curvenschaar, die nothwendig aus Geraden bestehen und einen invarianten Punkt umhüllen muss. Im zweiten Falle ergiebt sich ebenso, dass entweder eine invariante Gerade oder ein invarianter Punkt vorhanden sein muss. *Folglich besteht jede sechsgliedrige projective Gruppe der Ebene entweder aus den ∞^6 projectiven Transformationen, die eine bestimmte Gerade, oder aus den ∞^6, die einen bestimmten Punkt invariant lassen.*

Hat eine projective Gruppe der Ebene fünf Parameter, so enthält sie entweder nur eine endliche Anzahl von isolirten Transformationen (15) und lässt dann jedenfalls ein Linienelement in Ruhe, oder sie enthält ∞^1 oder ∞^2 Transformationen (15). Genau wie vorhin sieht man dann ein, dass die Gruppe entweder einen Punkt oder eine Gerade invariant lässt.

Eine projective Gruppe mit vier oder drei Parametern ist immer imprimitiv (s. S. 34) und lässt daher eine Schaar von ∞^1 Curven invariant; die einzelnen Curven dieser Schaar gestatten jede mindestens zwei unabhängige infinitesimale Transformationen und sind daher entweder gerade Linien oder Kegelschnitte. Das invariante Umhüllungsgebilde der Schaar ist demzufolge entweder ein Punkt oder eine Gerade oder ein Kegelschnitt; ein Kegelschnitt kann es jedoch nur dann sein, wenn die Gruppe blos dreigliedrig ist.

Endlich lässt jede zwei- oder eingliedrige projective Gruppe der Ebene mindestens einen Punkt und eine hindurchgehende Gerade invariant; bei den eingliedrigen folgt das aus Abschn. I, S. 585, Satz 2; bei den zweigliedrigen aus dem Satze 4, S. 589 ebenda, denn jede zweigliedrige projective Gruppe enthält zwei unabhängige infinitesimale Transformationen: $X_1 f$ und $X_2 f$, die in der Beziehung:

$$(X_1 X_2) = \varepsilon \, . \, X_1 f$$

stehen, sie hat also die besondere Zusammensetzung, von der in dem zuletzt angeführten Satze gesprochen wird.

Fassen wir jetzt alles Gesagte zusammen, so erhalten wir das

Theorem 7. *Jede Untergruppe der allgemeinen projectiven Gruppe der Ebene lässt entweder einen Punkt oder eine Gerade invariant, oder sie ist die dreigliedrige projective Gruppe eines nicht ausgearteten Kegelschnitts.*

§ 24.

Durch die Untersuchungen des vorigen Paragraphen ist die Bestimmung aller projectiven Gruppen der Ebene wesentlich vereinfacht, denn es handelt sich jetzt nur noch darum, alle projectiven Gruppen der Ebene zu finden, die jedenfalls entweder eine Gerade oder einen Punkt invariant lassen; ausser diesen giebt es ja nur noch zwei Arten von projectiven Gruppen, nämlich erstens die allgemeine projective Gruppe selbst und zweitens den Typus, dessen Repräsentant die dreigliedrige projective Gruppe irgend eines nicht ausgearteten Kegelschnitts ist.

Wir suchen zunächst alle projectiven Gruppen der Ebene, die eine Gerade, aber keinen darauf gelegenen Punkt invariant lassen. Aus diesen Gruppen finden wir dann durch dualistische Transformation alle die, welche einen Punkt, aber keine hindurchgehende Gerade invariant lassen. Ist beides ausgeführt, so brauchen wir nur noch alle projectiven Gruppen zu bestimmen, bei denen ein Punkt und eine hindurchgehende Gerade, mit andern Worten ein Linienelement invariant bleibt.

Lässt eine projective Gruppe eine Gerade invariant, so denken wir uns diese Gerade ins Unendliche verlegt und erhalten eine Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe:

$$[1] \quad \boxed{p,\ q,\ xp,\ yp,\ xq,\ yq}\ .$$

Nach dem vorhin aufgestellten Programm haben wir daher jetzt alle linearen Gruppen aufzusuchen, bei denen kein Punkt der unendlich fernen Geraden in Ruhe bleibt, oder was auf dasselbe hinauskommt, alle linearen Gruppen, bei denen die Punkte der unendlich fernen Geraden dreigliedrig transformirt werden, denn würden die Punkte dieser Geraden zwei- oder wenigergliedrig transformirt, so bliebe nach S. 17 mindestens einer von ihnen invariant. Alle Gruppen von der verlangten Beschaffenheit können wir aber auf Grund von Abschn. I, S. 572—574 sofort hinschreiben; es giebt ihrer blos vier Arten und zwar sind das erstens die allgemeine lineare Gruppe [1] selbst, zweitens ihre fünfgliedrige invariante Untergruppe:

$$[2] \quad \boxed{p,\ q,\ xq,\ xp - yq,\ yp}$$

und ausserdem alle Untergruppen von [1], die innerhalb [1] mit einer der beiden Gruppen:

$$[3] \quad \boxed{xp,\ yp,\ xq,\ yq} \qquad [4] \quad \boxed{xq,\ xp - yq,\ yp}$$

gleichberechtigt sind.

Da von den Gruppen [1] ... [4] offenbar keine zwei innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe gleichberechtigt sind, so werden durch sie auch vier verschiedene Typen von projectiven Gruppen repräsentirt. Jede projective Gruppe, die eine Gerade, aber keinen darauf gelegenen Punkt invariant lässt, ist innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe mit einer der Gruppen [1] ... [4] gleichberechtigt.

Wir sind übrigens nunmehr auch im Stande anzugeben, was für Typen von primitiven projectiven Gruppen es in der Ebene giebt. Nach Theorem 7, S. 94 lässt nämlich jede projective Gruppe der Ebene, wenn sie nicht mit der allgemeinen projectiven Gruppe zusammenfällt, entweder eine Gerade oder einen Punkt invariant, oder sie ist die dreigliedrige projective Gruppe eines Kegelschnitts. Nun ist jede dreigliedrige Gruppe der Ebene sicher imprimitiv, ebenso ist jede projective Gruppe, die einen Punkt invariant lässt, imprimitiv, primitiv können daher ausser der allgemeinen projectiven nur solche projective Gruppen sein, die eine Gerade, aber keinen Punkt invariant lassen.

Die beiden einzigen Gruppen von dieser Beschaffenheit sind [1] und [2] und die sind nach Theorem 5, S. 35 auch wirklich primitiv, also:

Theorem 8. *Ist eine Untergruppe der allgemeinen projectiven Gruppe der Ebene primitiv, so ist sie innerhalb dieser Gruppe entweder mit der allgemeinen linearen:*

$$p,\ q,\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq$$

oder mit der speciellen linearen:

$$p,\ q,\ xq,\ xp - yq,\ yp$$

gleichberechtigt.

Jetzt müssen wir zu [1] ... [4] die dualistischen Gruppen aufstellen, dabei brauchen wir aber nur die Gruppen [1] und [2] zu berücksichtigen, denn [3] und [4] liefern bei Ausführung einer dualistischen Transformation keine Repräsentanten neuer Typen, sie sind nämlich beide mit sich selbst dualistisch; es folgt das daraus, dass diese beiden Gruppen ausser der unendlich fernen Geraden auch noch den im Endlichen gelegenen Punkt: $x = y = 0$ invariant lassen, man erkennt es aber auch sofort durch Anwendung der dualistischen Transformation (2), S. 80. Die Gruppen nun, die mit [1] und [2] dualistisch sind, lassen jede einen Punkt invariant. Wählen wir als invarianten Punkt den unendlich fernen Punkt der y-Axe und berücksichtigen wir, dass mit diesem Punkte zugleich die Geradenschaar: $x = \text{const.}$ invariant bleibt, so erhalten wir die zu [1] dualistische Gruppe in der Form:

$$[5] \qquad \boxed{p,\ q,\ xq,\ xp,\ yq,\ x^2p + xyq}\ ;$$

die zu [2] dualistische wird die fünfgliedrige invariante Untergruppe von [5], nämlich:

$$[6] \qquad \boxed{p,\ q,\ xq,\ 2xp + yq,\ x^2p + xyq}\ .$$

Damit sind alle projectiven Gruppen gefunden, die einen Punkt, aber keine hindurchgehende Gerade invariant lassen; jede solche Gruppe ist innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe mit einer der Gruppen: [5], [6], [3], [4] gleichberechtigt.

Nunmehr sind blos noch die projectiven Gruppen zu bestimmen, die ein Linienelement invariant lassen. Wir denken uns natürlich die Gerade dieses Linienelements ins Unendliche und seinen Punkt in den unendlich fernen Punkt der y-Axe verlegt, so dass unsre Aufgabe darauf hinauskommt, alle Untergruppen der fünfgliedrigen Gruppe:

$$[7] \qquad \boxed{p,\ q,\ xq,\ xp,\ yq}$$

aufzusuchen. Diese Gruppe ist augenscheinlich mit sich dualistisch, denn sie ist ja die allgemeinste projective Gruppe, die ein bestimmtes Linienelement invariant lässt. Wir wollen sie kurz die G_5 nennen.

Die Untergruppen der G_5 bestimmen wir in der Weise, dass wir jede solche Untergruppe durch eine geeignete endliche Transformation:

$$(20) \qquad x_1 = \lambda x + \mu, \quad y_1 = \nu x + \mu y + \varrho$$

der G_5 auf eine einfache Normalform bringen und dabei für alle Untergruppen, die innerhalb der G_5 mit einander gleichberechtigt sind, stets nur eine Normalform aufstellen. Ist das geschehen, so müssen wir noch feststellen, ob es unter den gefundenen Gruppen solche giebt, die, obwohl sie innerhalb der G_5 nicht gleichberechtigt sind, es doch innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe sind. Von zwei oder mehreren innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe mit einander gleichberechtigten Gruppen ist natürlich jedesmal nur eine beizubehalten. Haben wir so alle überflüssigen Gruppen beseitigt, so sind wir sicher, für jeden Typus solcher projectiver Gruppen, die ein Linienelement invariant lassen, einen aber auch nur einen Repräsentanten zu haben.

Was nun die Untergruppen der G_5 anlangt, so müssen wir drei Fälle unterscheiden; eine solche Untergruppe kann nämlich die Geraden: $x =$ const. entweder nullgliedrig oder eingliedrig oder zweigliedrig transformiren. In § 25 behandeln wir diese Fälle der Reihe nach.

§ 25.

I) Die Geraden: $x =$ const. werden nullgliedrig transformirt.

Die allgemeinste Untergruppe von dieser Beschaffenheit ist die in der G_5 invariante G_3:

$$[8] \qquad \boxed{q,\ xq,\ yq}$$

jede andre hierher gehörige Gruppe ist in dieser G_3 enthalten.

Wenn eine *zweigliedrige* Untergruppe der G_3 die Transformation q enthält, hat sie die Form:

$$q,\ (\gamma x + \delta y)\, q.$$

Verschwindet hier δ nicht, so führen wir $\gamma x + \delta y$ als neues y ein; wir erhalten somit die beiden Normalformen:

$$[9] \quad \boxed{q,\ xq} \qquad [10] \quad \boxed{q,\ yq}.$$

Jede zweigliedrige Untergruppe der G_3, in der q nicht vorkommt, hat die Gestalt:

$$(x + \alpha) q, \quad (y + \beta) q$$

oder bei geeigneter Wahl von x und y:

$$[11] \quad \boxed{xq, \; yq} .$$

Eine *eingliedrige* Untergruppe: $(\gamma x + \delta y + \varepsilon) q$ der G_3 lässt sich stets auf eine der drei Formen:

$$[12] \quad \boxed{q} \qquad \boxed{xq} \qquad \boxed{yq}$$

bringen, wie wir schon auf S. 81 f. gesehen haben.

II) Die Geraden: $x =$ const. werden eingliedrig transformirt.

Jede hierher gehörige r-gliedrige Untergruppe der G_5 enthält, wenn $r > 1$ ist, eine $(r - 1)$-gliedrige Untergruppe, welche die Geraden: $x =$ const. nullgliedrig transformirt und welche daher auf eine der unter I) gefundenen Formen gebracht werden kann. Wir haben demnach zu jeder von den Gruppen [8] ... [12] in allgemeinster Weise eine infinitesimale Transformation:

$$(\alpha x + \beta) p + (\gamma x + \delta y + \varepsilon) q$$

hinzuzufügen, *in der α und β nicht beide verschwinden*, haben die Constanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ in jedem einzelnen Falle so zu bestimmen, dass eine Gruppe entsteht und sodann die gefundenen Gruppen durch geeignete Transformationen (20) auf Normalformen zu bringen.

Wir finden zunächst *viergliedrige* Gruppen von der Form:

$$q, \; xq, \; yq, \; (\alpha x + \beta) p .$$

Ist hier α nicht gleich Null, so führen wir $\alpha x + \beta$ als neues x ein, mithin ergeben sich im Ganzen zwei Gruppenformen:

$$[13] \quad \boxed{q, \; xq, \; yq, \; p} \qquad [14] \quad \boxed{q, \; xq, \; yq, \; xp} .$$

Jetzt zu den *dreigliedrigen* Gruppen:

$$q, \; xq, \; (\alpha x + \beta) p + \delta yq .$$

Verschwindet α, nicht aber δ, so führen wir $\frac{\delta x}{\beta}$ als neues x ein; wir bekommen daher, wenn α gleich Null ist, die beiden Gruppen:

$$[15] \quad \boxed{q, \; xq, \; p} \qquad [16] \quad \boxed{q, \; xq, \; p + yq} .$$

Ist dagegen $\alpha \neq 0$, so können wir β gleich Null machen; das liefert die Gruppe:

$$[17] \quad \boxed{q, \; xq, \; xp + cyq} .$$

Der darin vorkommende willkürliche Parameter c lässt sich durch die endlichen Transformationen (20) der G_5 nicht fortschaffen.

Bei den dreigliedrigen Gruppen von der Form:

$$q,\ yq,\ (\alpha x + \beta)p + \gamma xq$$

zeigt die Relation:

$$(yq,\ (\alpha x + \beta)p + \gamma xq) = -\gamma xq,$$

dass γ verschwindet, also finden wir in der bekannten Weise die beiden Normalformen:

[18] $\boxed{q,\ yq,\ p}$ [19] $\boxed{q,\ yq,\ xp}$.

Endlich kommen wir zu den Gruppen:

$$xq,\ yq,\ (\alpha x + \beta)p + \varepsilon q.$$

Hier ergiebt sich aus den Relationen:

$$((\alpha x + \beta)p + \varepsilon q,\ yq) = \varepsilon q,\ ((\alpha x + \beta)p + \varepsilon q,\ xq) = (\alpha x + \beta)q,$$

dass $\varepsilon = \beta = 0$ sein muss, es bleibt daher nur die Gruppe:

[20] $\boxed{xq,\ yq,\ xp}$.

Wir wenden uns zu den *zweigliedrigen* Untergruppen unsrer G_5, bei denen die Geraden $x = \text{const.}$ eingliedrig transformirt werden.

In den Gruppen:

$$q,\ (\alpha x + \beta)p + (\gamma x + \delta y)q$$

können wir β stets gleich Null machen, wenn α nicht verschwindet, wir haben daher zwei Hauptformen zu unterscheiden:

(21) $$q,\ p + (\gamma x + \delta y)q;\quad q,\ xp + (\gamma x + \delta y)q.$$

Wird: $\lambda x + \mu y$ als neues y eingeführt, so erhalten wir im ersten Falle:

$$q,\ p + \{(\mu\gamma - \lambda\delta)x + \delta y + \lambda\}\, q.$$

Ist hier $\delta \neq 0$, so machen wir $\mu\gamma - \lambda\delta = 0$ und führen ausserdem noch δx als neues x ein, das giebt die Gruppe:

[21] $\boxed{q,\ p + yq}$.

Verschwindet δ, aber γ nicht, so machen wir $\mu\gamma = 1$; es kommen demnach noch die beiden Gruppen hinzu:

[22] $\boxed{q,\ p + xq}$ [23] $\boxed{q,\ p}$.

Im zweiten der beiden Fälle (21) ergiebt sich bei der vorhin angewendeten Variabelnänderung:

$$q,\ xp + \{(\mu\gamma - \lambda\delta + \lambda)x + \delta y\}\, q.$$

Hat daher δ einen von 1 verschiedenen Werth, so machen wir: $\lambda(\delta - 1) = \mu\gamma$. Ist $\delta = 1$ und $\gamma \neq 0$, so machen wir $\mu\gamma = 1$; endlich kann auch noch der Fall: $\delta = 1$, $\gamma = 0$ eintreten. Also bekommen wir zwei Gruppenformen:

[24] $\boxed{q,\ xp + cyq}$ [25] $\boxed{q,\ xp + (x+y)q}$

wo nunmehr der Parameter c auch den Werth 1 annehmen kann. Dieser Parameter kann übrigens durch Transformationen von der Form (20) nicht beseitigt werden.

Bei den zweigliedrigen Gruppen von der Form:

$$xq,\ (\alpha x + \beta)p + (\delta y + \varepsilon)q$$

erhalten wir durch Combination: $(\delta - \alpha)xq - \beta q$, also verschwindet β und α darf gleich 1 gesetzt werden. Ist $\delta \neq 0$, so führen wir $\delta y + \varepsilon$ als neues y ein, ist dagegen $\delta = 0$, so machen wir $\varepsilon = 1$, wenn es nicht verschwindet. Es ergeben sich also die zwei Gruppenformen:

[26] $\boxed{xq,\ xp + cyq}$ [27] $\boxed{xq,\ xp + q}$.

Endlich bleiben noch die zweigliedrigen Gruppen:

$$yq,\ (\alpha x + \beta)p + (\gamma x + \varepsilon)q$$

zu behandeln. Durch Combination ergiebt sich hier: $(\gamma x + \varepsilon)q$, also verschwinden γ und ε beide und wir finden in bekannter Weise die Gruppen:

[28] $\boxed{yq,\ p}$ [29] $\boxed{yq,\ xp}$.

Die *eingliedrigen* Gruppen:

$$(\alpha x + \beta)p + (\gamma x + \delta y + \varepsilon)q,$$

welche die Geraden: $x =$ const. eingliedrig transformiren, können nach S. 82 f. stets eine der sechs Formen:

[30] $\boxed{p}$ $\boxed{p + yq}$ $\boxed{p + xq}$ $\boxed{xp + q}$ $\boxed{xp + (x+y)q}$ $\boxed{xp + cyq}$

erhalten, von denen keine zwei innerhalb der G_5 gleichberechtigt sind.

III) Die Geraden: $x =$ const. werden zweigliedrig transformirt.

Jede hierher gehörige r-gliedrige Untergruppe g der G_5 enthält zwei unabhängige infinitesimale Transformationen von der Form:

$$p + (\gamma x + \delta y + \varepsilon) q, \quad xp + (\gamma' x + \delta' y + \varepsilon') q.$$

Es liegt daher auf der Hand, dass die Transformation:

(22) $$p + (\gamma x + \delta y + \varepsilon) q$$

zusammen mit den in g enthaltenen infinitesimalen Transformationen von der Form: $(\gamma'' x + \delta'' y + \varepsilon'') q$ eine $(r - 1)$-gliedrige invariante Untergruppe von g erzeugt, bei der x eingliedrig transformirt wird. Wir brauchen daher von den unter II) bestimmten Gruppen nur die auszuwählen, die eine Transformation von der Form (22) enthalten und müssen dann zu jeder solchen Gruppe in allgemeinster Weise eine Transformation:

$$xp + (\gamma' x + \delta' y + \varepsilon') q$$

so hinzuzufügen, dass wieder eine Gruppe entsteht.

Ausser der G_5 selbst erhalten wir so zunächst aus der Gruppe [15] die *viergliedrige:*

[31] $$\boxed{q,\ xq,\ p,\ xp + cyq}$$

aus der der Parameter c nicht fortgeschafft werden kann.

Eine viergliedrige Gruppe von der Form:

$$q,\ xq,\ p + yq,\ xp + \delta yq$$

giebt es nicht, denn die müsste auch noch die infinitesimale Transformation:

$$(p + yq,\ xp + \delta yq) = p$$

enthalten, was nicht angeht. Auf diesen Widerspruch würden wir im Folgenden überall stossen, wenn die Transformation: $p + yq$ auftritt, ohne dass p und yq einzeln vorhanden sind. Demnach brauchen wir die Gruppe [21] und die zweite der Gruppen [30] gar nicht zu berücksichtigen.

Die Gruppe [18] liefert uns viergliedrige Gruppen von der Form:

$$q,\ yq,\ p,\ xp + \gamma xq,$$

weil sich aber durch Combination ergiebt:

$$(yq,\ xp + \gamma xq) = -\gamma xq,$$

so verschwindet γ und es bleibt nur die Gruppe:

[32] $$\boxed{q,\ yq,\ p,\ xp}.$$

Zu *dreigliedrigen* Gruppen führen die Gruppen [22], [23] und [28]. Im ersten Falle erhalten wir Gruppen von der Form:

$$q,\ p + xq,\ xp + (\gamma x + \delta y) q,$$

durch Combination der beiden letzten Transformationen ergiebt sich aber:

$$p + \gamma q + (\delta - 1)xq,$$

also muss δ den Werth 2 haben. Führen wir noch $y + \gamma x$ als neues y ein, so bekommen wir:

[33] $\boxed{q,\ p + xq,\ xp + 2yq}$.

Im zweiten Falle haben wir es mit Gruppen zu thun von der Form:

$$q,\ p,\ xp + (\gamma x + \delta y)q;$$

indem wir hier $\lambda x + \mu y$ als neues y einführen, erkennen wir wie auf S. 99 f., dass sich diese Gruppen auf die beiden Formen:

[34] $\boxed{q,\ p,\ xp + cyq}$ [35] $\boxed{q,\ p,\ xp + (x + y)q}$

zurückführen lassen. Im dritten Falle, bei den Gruppen von der Form:

$$yq,\ p,\ xp + (\gamma x + \varepsilon)q$$

ergiebt sich durch Combination der ersten Transformation mit der letzten: $(\gamma x + \varepsilon)q$, also müssen γ und ε beide verschwinden und es bleibt nur die Gruppe:

[36] $\boxed{yq,\ p,\ xp}$.

Noch sind alle *zweigliedrigen* Untergruppen der G_5 zu bestimmen, die x zweigliedrig transformiren.

Hier kommen nur die beiden Möglichkeiten:

$$p,\ xp + (\gamma x + \delta y + \varepsilon)q;\ p + xq,\ xp + (\gamma x + \delta y + \varepsilon)q$$

in Betracht. Im ersten Falle ergiebt sich durch Combination, dass γ verschwinden muss; ist δ von Null verschieden, so kann ε gleich Null gemacht werden; ist endlich $\delta = 0$, aber $\varepsilon \neq 0$, so kann ε gleich 1 gemacht werden. Im zweiten Falle ergiebt sich durch Combination:

$$p + \{(\delta - 1)x + \gamma\}q,$$

also muss $\delta = 2$ sein und γ verschwinden; ε wird gleich Null, wenn man $y + \frac{1}{2}\varepsilon$ als neues y einführt. Wir erhalten demnach nur drei zweigliedrige Gruppen:

[37] $\boxed{p,\ xp + cyq}$ [38] $\boxed{p,\ xp + q}$

[39] $\boxed{p + xq,\ xp + 2yq}$.

Hiermit sind alle Untergruppen der G_5 gefunden, das heisst jede Untergruppe der G_5 ist innerhalb der G_5 mit einer der Gruppen [8] ... [39] gleichberechtigt. Dagegen giebt es unter diesen Gruppen keine solchen, die mit einander innerhalb der G_5 gleichberechtigt

wären. Denn dass von den Gruppen unter I) keine mit einer der Gruppen unter II) oder III) gleichberechtigt sein kann, ist an und für sich klar, dass andrerseits in keiner der Abtheilungen I), II), III) zwei mit einander innerhalb der G_5 gleichberechtigte vorhanden sind, sieht man in jedem einzelnen Falle sehr leicht ein.

Es bleibt uns jetzt noch zweierlei zu thun. Erstens müssen wir untersuchen, welche von den Gruppen [8] ... [39] innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe gleichberechtigt sind und zweitens müssen wir feststellen, welche unter diesen Gruppen mit einander dualistisch sind. Der Erledigung dieser beiden Aufgaben ist der nächste Paragraph gewidmet. Dabei brauchen wir natürlich die eingliedrigen Gruppen nicht noch einmal zu behandeln.

§ 26.

Die G_5:

$$p,\ q,\ xq,\ xp,\ yq$$

ist die grösste projective Gruppe, bei der ein gewisses Linienelement invariant bleibt, nämlich das Linienelement L, das aus der unendlich fernen Geraden und dem unendlich fernen Punkte der y-Axe besteht. Sollen daher zwei Untergruppen g_1 und g_2 der G_5, die innerhalb der G_5 nicht gleichberechtigt sind, es doch innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe sein, so müssen sie durch eine projective Transformation mit einander ähnlich sein, bei der das Linienelement L nicht invariant bleibt; dieser Fall kann aber nur dann eintreten, wenn jede der beiden Gruppen g_1 und g_2 ausser dem Linienelemente L mindestens noch ein andres Linienelement invariant lässt. Hieraus ergiebt sich, wie man zu verfahren hat, um festzustellen, welche unter den Gruppen [8] ... [39] innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe mit einander gleichberechtigt sind.

Ist g irgend eine der Gruppen [8] ... [39], so bestimme man alle Punkte und alle Geraden, die bei g invariant bleiben, dann kann man sofort auch alle bei g invarianten Linienelemente: L_1, L_2 ... angeben. Man bestimme ferner für jedes dieser Linienelemente eine solche projective Transformation, bei der es in das oben besprochene Linienelement L übergeht, und führe die erhaltenen projectiven Transformationen auf die Gruppe g aus. Auf diese Weise erhält man eine Anzahl Untergruppen: g_1, g_2, ... der G_5, die alle innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe mit g gleichberechtigt sind. Sucht man nun endlich diejenigen unter den Gruppen [8] ... [39] auf, die innerhalb der G_5 mit einer der Gruppen g_1, g_2 ... gleichberechtigt sind, so erhält man zugleich alle in der Reihe [8] ... [39] enthaltenen

Gruppen, die innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe mit g gleichberechtigt sind.

Unter den Gruppen [8] ... [39] giebt es eine Anzahl, die kein andres Linienelement als das oben besprochene L invariant lassen. Es sind das von einer eingliedrigen abgesehen die folgenden:

[13], [15], [16], [22], [31], [33], [35], [39].

Von diesen Gruppen ist augenscheinlich keine innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe mit einer der übrigen Gruppen [8] ... [39] gleichberechtigt.

Nunmehr müssten wir eigentlich die andern Gruppen alle der Reihe nach durchgehen und für jede einzelne die oben angedeutete Untersuchung ausführen; da aber das zu viel Raum beanspruchen würde, wollen wir für die noch übrigen Gruppen nur die Ergebnisse der betreffenden Untersuchungen zusammenstellen.

Von den Gruppen: [8], [9], [14], [23], [29], [32] ist keine innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe mit einer andern der Gruppen: [8] ... [39] gleichberechtigt.

Jede der Gruppen: [10], [11], [24], [26], [28], [37] ist mit einer von den ∞^1 Gruppen:

$$[40] \quad \boxed{q,\ axp + cyq}$$

gleichberechtigt, dagegen giebt es unter den Gruppen [40] keine zwei, die innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe mit einander gleichberechtigt sind.

Nimmt man zu den Gruppen [17] noch die Gruppe [8] hinzu, so erhält man die folgende Schaar von ∞^1 Gruppen:

$$[41] \quad \boxed{q,\ xq,\ axp + cyq}\ .$$

Diese Gruppen sind aber paarweise mit einander gleichberechtigt, denn durch Ausführung der projectiven Transformation:

$$x_1 = \frac{1}{x},\quad y_1 = \frac{y}{x}$$

erhält man aus (41) die Gruppe:

$$q_1,\ x_1 q_1,\ ax_1 p_1 + (a - c) y_1 q_1\ .$$

Aehnliches gilt von der Schaar der ∞^1 Gruppen:

$$[42] \quad \boxed{q,\ p,\ axp + cyq}\ ,$$

die man durch Hinzunahme der Gruppe [18] zu den Gruppen [34] erhält: auch die Gruppen [42] ordnen sich in ∞^1 Paare von gleich-

berechtigten Gruppen; man sieht das, wenn man in [42] die Veränderlichen x und y mit einander vertauscht.

Die Gruppe [19] ist innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe mit den beiden Gruppen [20] und [36] gleichberechtigt, ebenso die Gruppe [21] mit [38], und [25] mit [27].

Jetzt wissen wir ganz genau, welche unter den Gruppen [8] . . . [39] dieselben Typen von projectiven Gruppen repräsentiren, wir sind daher im Stande, für jeden Typus von solchen projectiven Gruppen, die ein Linienelement invariant lassen, einen aber auch nur einen Repräsentanten anzugeben. Uebrig bleibt nur noch eins: wir müssen noch feststellen, welche unter den gefundenen Gruppen durch dualistische Transformation in einander übergeführt werden können.

Zu diesem Zwecke ist es wünschenswerth eine dualistische Transformation zu besitzen, bei der die Gruppe [7] in sich übergeht oder, was auf dasselbe hinauskommt, eine dualistische Transformation, bei der das auf S. 103 definirte Linienelement L invariant bleibt. Eine solche dualistische Transformation ist aber durch die Gleichung:

$$y + y_1 - xx_1 = 0$$

definirt, denn bei dieser Transformation geht jeder Punkt in seine Polare in Bezug auf den Kegelschnitt: $y - \frac{1}{2}x^2 = 0$ über und jede Gerade in ihren Pol in Bezug auf diesen Kegelschnitt; das Linienelement L bleibt daher wirklich invariant. Die Gleichungen der betreffenden Transformation lauten (vgl. S. 79):

$$(23) \qquad x_1 = -\frac{p}{q}, \quad y_1 = -\frac{xp}{q} - y, \quad p_1 = xq, \quad q_1 = -q.$$

Bei der dualistischen Transformation (23) gehen nun die infinitesimalen Transformationen q, p, xq, xp, yq über in:

$$q = -q_1, \; p = x_1 q_1, \; xq = p_1, \; xp = -x_1 p_1, \; yq = x_1 p_1 + y_1 q_1,$$

man kann demnach sofort jede der gefundenen Gruppen in eine mit ihr dualistische überführen und insbesondere feststellen, ob die Gruppe mit sich selbst dualistisch ist.

Die Ausführung dieser Betrachtungen im Einzelnen unterdrücken wir.

§ 27.

Endlich sind wir soweit, dass wir eine Tabelle aufstellen können, in der für jeden Typus von projectiven Gruppen ein und nur ein Repräsentant enthalten ist. Wir schliessen in dieser Tabelle jede projective Gruppe, die mit sich dualistisch ist, in einen starken Rahmen

ein; zwei Gruppen, die mit einander dualistisch sind, stellen wir neben einander, indem wir sie durch das Zeichen $\sim$ verbinden.

Die Tabelle lautet folgendermassen:

Tabelle aller projectiven Gruppen der Ebene.

I) Achtgliedrige Gruppen.

$$\boxed{p,\ q,\ xp,\ yp,\ xq,\ yq,\ x^2p + xyq,\ xyp + y^2q}.$$

II) Sechsgliedrige Gruppen.

$$\boxed{p,\ q,\ xp,\ yp,\ xq,\ yq} \sim \boxed{p,\ q,\ xq,\ xp,\ yq,\ x^2p + xyq}.$$

III) Fünfgliedrige Gruppen.

$$\boxed{p,\ q,\ xq,\ xp - yq,\ yp} \sim \boxed{p,\ q,\ xq,\ 2xp + yq,\ x^2p + xyq}$$

$$\boxed{p,\ q,\ xq,\ xp,\ yq}.$$

IV) Viergliedrige Gruppen.

$$\boxed{q,\ yq,\ p,\ xp} \sim \boxed{q,\ xq,\ xp,\ yq}$$

$$\boxed{q,\ p,\ xq,\ axp + cyq} \sim \boxed{q,\ xq,\ p,\ (c - a)xp + cyq}$$

$$\boxed{xp,\ yp,\ xq,\ yq}.$$

V) Dreigliedrige Gruppen.

$$\boxed{p + xq,\ xp + 2yq,\ (x^2 - y)p + xyq} \qquad \boxed{xq,\ xp - yq,\ yp}$$

$$\boxed{q,\ p,\ axp + cyq} \sim \boxed{q,\ xq,\ (c - a)xp + cyq}$$

$$\boxed{q,\ yq,\ xp} \qquad \boxed{q,\ xq,\ p} \qquad \boxed{q,\ p + xq,\ xp + 2yq}$$

$$\boxed{q,\ xq,\ p + yq} \sim \boxed{q,\ p,\ xp + (x + y)q}.$$

VI) Zweigliedrige Gruppen.

A) Mit nicht vertauschbaren infinitesimalen Transformationen.

$$\boxed{q,\ axp + cyq \quad (c \neq 0)} \sim \boxed{q,\ (c-a)\,xp + cyq \quad (c \neq 0)}$$

$$\boxed{q,\ p + yq} \sim \boxed{q,\ xp + (x+y)\,q}$$

$$\boxed{p + xq,\ xp + 2yq}.$$

B) Mit vertauschbaren infinitesimalen Transformationen.

$$\boxed{q,\ p} \sim \boxed{q,\ xq} \qquad \boxed{q,\ p + xq} \qquad \boxed{q,\ xp} \qquad \boxed{xp,\ yq}.$$

VII) Eingliedrige Gruppen.

$$\boxed{xp + cyq \quad (c \neq 0, 1)} \qquad \boxed{p + yq} \qquad \boxed{p + xq} \qquad \boxed{yq} \qquad \boxed{q}.$$

In dieser Tabelle sind die Gruppen von der Form:

$$q,\ p,\ xq,\ axp + cyq$$

und die von der Form:

$$q,\ axp + cyq$$

zweimal aufgeführt, weil die Gruppen dieser beiden Schaaren sich paarweise als dualistisch zusammenordnen. Ferner ist zu bemerken, dass in den Fällen, wo ein willkürlicher Parameter: $a : c$ auftritt, zwei verschiedenen Werthen dieses Parameters doch zwei mit einander gleichberechtigte Gruppen entsprechen können. Wann dies der Fall ist, kann aus der nachstehenden Ergänzungstabelle entnommen werden:

$$\boxed{q,\ p,\ axp + cyq} \equiv \boxed{p,\ q,\ cxp + ayq}$$

$$\boxed{q,\ xq,\ (c-a)\,xp + cyq} \equiv \boxed{q,\ xq,\ (a-c)\,xp + ayq}$$

$$\boxed{xp + cyq} \equiv \boxed{cxp + yq} \equiv \boxed{xp + (1-c)\,yq} \equiv$$

$$\equiv \boxed{(1-c)\,xp + yq} \equiv \boxed{cxp + (c-1)\,yq} \equiv \boxed{(c-1)\,xp + cyq}.$$

Hier bedeutet das Zeichen $\equiv$, dass die beiden Gruppen, zwischen denen es steht, innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe mit einander gleichberechtigt sind.

§ 28.

Nicht selten kommt man in die Lage, dass eine projective Gruppe g der Ebene vorgelegt ist und dass man die grösste projective Gruppe braucht, in der g als invariante Untergruppe enthalten ist. Handelt es sich dabei blos um die grösste *continuirliche* projective Gruppe, in der g invariant ist, so gelangt man mit Hülfe des folgenden Satzes leicht zum Ziel:

Satz 4. *Lässt eine endliche continuirliche Gruppe eine isolirte Punktfigur invariant, so behält diese Figur ihre Lage überhaupt bei jeder endlichen continuirlichen Gruppe, in der die betreffende Gruppe als invariante Untergruppe enthalten ist.*

Der Beweis dieses Satzes folgt unmittelbar aus dem Satze 3 auf S. 586 von Abschn. I; wenn nämlich die dort betrachtete, bei der Gruppe G_{r-m} invariante Punktfigur M isolirt ist, wenn sie also keiner continuirlichen Schaar von solchen Punktfiguren angehört, die sämmtlich bei der G_{r-m} invariant bleiben, so kann sie bei den Transformationen der G_r keine neuen Lagen annehmen, sondern sie muss auch bei der G_r invariant bleiben.

Um unsern Satz auf den vorliegenden Fall anzuwenden, denken wir uns alle bei der Gruppe g invarianten Punkte und Geraden bestimmt, die isolirt liegen. Diese Punkte und Geraden bilden eine bei g invariante isolirte Punktfigur F. Wir haben also nur noch die grösste continuirliche projective Gruppe G aufzusuchen, bei der F seine Lage behält, und dann die grösste continuirliche Untergruppe $\mathfrak{G}$ von G zu bestimmen, in der g als invariante Untergruppe enthalten ist. $\mathfrak{G}$ ist dann die grösste continuirliche projective Gruppe, in der g invariant ist.

Ein Beispiel wird die Brauchbarkeit dieser Methode darthun.

Bei der eingliedrigen Gruppe: $p + xq$ bleibt nur eine Gerade und nur ein Punkt invariant, nämlich die unendlich ferne Gerade und der unendlich ferne Punkt der y-Axe. Das auf S. 103 beschriebene Linienelement L ist demnach die einzige bei der Gruppe: $p + xq$ invariante Punktfigur, die aus isolirten Punkten und Geraden besteht. Die grösste continuirliche projective Gruppe, bei der L invariant bleibt, ist die bekannte G_5:

$$p,\ q,\ xq,\ xp,\ yq,$$

wir haben daher noch die grösste Untergruppe der G_5 aufzusuchen, in der $p + xq$ als invariante Untergruppe enthalten ist.

Zu diesem Zwecke suchen wir die allgemeinste infinitesimale Transformation:

$$Xf = e_1 p + e_2 q + e_3 xq + e_4 xp + e_5 yq,$$

die so beschaffen ist, dass der Ausdruck:

$$(p + xq,\ Xf) = (e_3 - e_1)q + e_4 p + (e_5 - e_4)xq$$

die Form: $\lambda(p + xq)$ erhält. Wir finden, dass $e_3 = e_1$ und $e_4 = e_5 - e_4$ sein muss, demnach ist:

$$p + xq,\ q,\ xp + 2yq$$

die grösste continuirliche projective Gruppe, in der $p + xq$ als invariante Untergruppe enthalten ist, es ist das die Gruppe, die unter V an siebenter Stelle steht.

In dieser Weise kann man leicht für jede der im vorigen Paragraphen aufgezählten Gruppen die grösste continuirliche projective Gruppe aufstellen, in der sie invariant ist. Beispielsweise ergiebt sich, dass die nachstehenden Gruppen:

I, 1; II, 1 und II, 2; III, 3; IV, 1, 2, 5; V, 1, 5, 7; VI, A 5 und B 5

die einzigen sind, die nicht in grösseren continuirlichen projectiven Gruppen als invariante Untergruppen enthalten sind.

Hat man einmal die grösste continuirliche projective Gruppe G, in der eine vorgelegte projective Gruppe g als invariante Untergruppe enthalten ist, so kann man ohne Schwierigkeit auch die grösste nicht-continuirliche projective Gruppe angeben, in der g invariant ist — wenn es überhaupt eine nicht-continuirliche Gruppe von dieser Beschaffenheit giebt. Wir wollen jedoch auf die hierzu nöthigen Ueberlegungen nicht eingehen.

Kapitel 6.

Bestimmung aller linearen homogenen Gruppen in drei Veränderlichen.

Die allgemeine lineare homogene Gruppe in den drei Veränderlichen x, y, z ist neungliedrig und soll deshalb im Folgenden kurz „die G_9“ genannt werden. Sie hat die Form:

$$(1)\qquad \begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, & y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ & z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{cases}$$

und ist von den neun unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

$$(2)\qquad xp,\ yp,\ zp,\ xq,\ yq,\ zq,\ xr,\ yr,\ zr$$

erzeugt, wo, unsrer sonstigen Schreibweise entsprechend, r für $\frac{\partial f}{\partial z}$ geschrieben ist.

Wir wollen alle Untergruppen der G_9 bestimmen. Zu diesem Zwecke theilen wir, wie gewöhnlich, die Untergruppen der G_9 in Typen

ein, indem wir zwei Untergruppen stets dann aber auch nur dann zu demselben Typus rechnen, wenn sie innerhalb der G_9 gleichberechtigt sind. Dann kommt unsre Aufgabe darauf hinaus, dass für jeden Typus von Untergruppen der G_9 eine einzige ihm angehörige Gruppe, also *ein* Repräsentant aufgestellt werden soll.

Die Erledigung dieser Aufgabe ist nach Abschn. I, Kap. 28 von grosser Wichtigkeit für die Klassification und die Bestimmung aller Gruppen von Punkttransformationen des dreifach ausgedehnten Raumes.

§ 29.

Unsre G_9 enthält nach Abschn. I, Theor. 98, S. 561 blos zwei invariante Untergruppen, nämlich erstens die achtgliedrige specielle lineare homogene:

$$(3) \qquad zp,\ zq,\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp - zr,\ xr,\ yr$$

und zweitens eine eingliedrige, die von der ausgezeichneten infinitesimalen Transformation:

$$xp + yq + zr = U$$

der G_9 erzeugt ist.

Die erste dieser beiden invarianten Untergruppen ist mit der allgemeinen projectiven Gruppe der Ebene holoedrisch isomorph (a. a. O. S. 558, Theor. 96), ja sie ist geradezu die allgemeine projective Gruppe der Ebene, nur geschrieben in drei homogenen Veränderlichen x, y, z. Deutet man nämlich x, y, z als rechtwinklige Coordinaten im dreifach ausgedehnten Raume, so kann man sie zugleich als homogene Coordinaten der ∞^2 Geraden durch den Punkt: $x = y = z = 0$ auffassen; diese ∞^2 Geraden werden offenbar von der Gruppe (3) unter einander vertauscht und zwar durch die allgemeine projective Gruppe der zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit. Will man den Zusammenhang zwischen der Gruppe (3) und der allgemeinen projectiven Gruppe der Ebene genauer verfolgen, so braucht man nur:

$$\frac{x}{z} = \mathfrak{x},\quad \frac{y}{z} = \mathfrak{y}$$

zu setzen und zu berechnen, wie $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ bei den infinitesimalen Transformationen (3) transformirt werden, man erhält auf diese Weise (a. a. O. S. 579) die folgende Tabelle:

$$(4) \quad \begin{cases} zp \equiv \mathfrak{p},\ zq \equiv \mathfrak{q},\ xq \equiv \mathfrak{x}\mathfrak{q},\ yp \equiv \mathfrak{y}\mathfrak{p} \\ xp - yq \equiv \mathfrak{x}\mathfrak{p} - \mathfrak{y}\mathfrak{q},\ xp - zr \equiv 2\mathfrak{x}\mathfrak{p} + \mathfrak{y}\mathfrak{q},\ yq - zr \equiv \mathfrak{x}\mathfrak{p} + 2\mathfrak{y}\mathfrak{q} \\ 3xp - (xp + yq + zr) = 3\mathfrak{x}\mathfrak{p},\ 3yq - (xp + yq + zr) = 3\mathfrak{y}\mathfrak{q} \\ xr \equiv -(\mathfrak{x}^2\mathfrak{p} + \mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{q}),\ yr \equiv -(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{p} + \mathfrak{y}^2\mathfrak{q}), \end{cases}$$

mit Hülfe deren man jede infinitesimale projective Transformation der Ebene, die in den nicht homogenen Veränderlichen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ vorliegt, sofort in den homogenen Veränderlichen x, y, z schreiben kann und umgekehrt.

Wie die Gruppe (3) mit der allgemeinen projectiven Gruppe:

(5) $$\mathfrak{p},\ \mathfrak{q},\ \mathfrak{x}\mathfrak{p},\ \mathfrak{y}\mathfrak{p},\ \mathfrak{x}\mathfrak{q},\ \mathfrak{y}\mathfrak{q},\ \mathfrak{x}^2\mathfrak{p}+\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{q},\ \mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{p}+\mathfrak{y}^2\mathfrak{q}$$

der Ebene gleichzusammengesetzt ist, so ist die G_9 augenscheinlich mit der neungliedrigen Gruppe:

(6) $$\mathfrak{p},\ \mathfrak{q},\ \mathfrak{x}\mathfrak{p},\ \mathfrak{y}\mathfrak{p},\ \mathfrak{x}\mathfrak{q},\ \mathfrak{y}\mathfrak{q},\ \mathfrak{x}^2\mathfrak{p}+\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{q},\ \mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{p}+\mathfrak{y}^2\mathfrak{q},\ \mathfrak{r}$$

in den drei Veränderlichen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ gleichzusammengesetzt. Wir können daher zunächst alle Untergruppen der Gruppe (6) bestimmen, was gar keine Schwierigkeiten hat, da wir im vorigen Kapitel alle Untergruppen der Gruppe (5) gefunden haben. Kennen wir aber erst alle Untergruppen von (6), so kennen wir zugleich auch alle Untergruppen der G_9; um sie zu erhalten brauchen wir ja nur in den Untergruppen von (6) mit Hülfe der Tabelle (4) jede infinitesimale Transformation in $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ durch die entsprechende in x, y, z zu ersetzen und ausserdem noch für $\mathfrak{r}$ zu schreiben: $xp+yq+zr$.

Die Untergruppen der Gruppe (6) zerfallen in zwei getrennte Kategorien, nämlich in solche Untergruppen, die die infinitesimale Transformation $\mathfrak{r}$ enthalten und in solche, die $\mathfrak{r}$ nicht enthalten. Jede der ersten Kategorie angehörige Untergruppe hat die Form:

(7) $$\mathfrak{X}_1 f \ldots \mathfrak{X}_m f,\ \mathfrak{r},$$

jede der zweiten angehörige hat die Form:

(8) $$\mathfrak{X}_1 f+\alpha_1\mathfrak{r},\ \ldots,\ \mathfrak{X}_m f+\alpha_m\mathfrak{r},$$

wo beide Male: $\mathfrak{X}_1 f \ldots \mathfrak{X}_m f$ eine m-gliedrige Untergruppe der Gruppe (5) ist, während $\alpha_1 \ldots \alpha_r$ Constanten bezeichnen.

Nun enthält die Gruppe (6) eine ausgezeichnete infinitesimale Transformation, nämlich $\mathfrak{r}$, ihre adjungirte Gruppe ist daher blos achtgliedrig und fällt mit der adjungirten Gruppe von (5) zusammen. Hieraus folgt, dass zwei Untergruppen g_1 und g_2 von (6) stets dann aber auch nur dann innerhalb dieser Gruppe gleichberechtigt sind, wenn die eine durch eine Transformation der Gruppe (5) in die andre übergehen kann; zugleich ergiebt sich, dass g_1 und g_2 jedenfalls nur dann innerhalb der Gruppe (6) gleichberechtigt sein können, wenn sie erstens entweder beide die Form (7) oder beide die Form (8) besitzen und wenn zweitens die zu g_1 gehörige Gruppe: $\mathfrak{X}_1 f \ldots \mathfrak{X}_m f$ mit der zu g_2 gehörigen Gruppe: $\mathfrak{X}_1 f \ldots \mathfrak{X}_m f$ innerhalb der Gruppe (5) gleichberechtigt ist.

Durch diesen Umstand wird die Bestimmung aller Untergruppen von (6) ganz wesentlich erleichtert. Wir können nämlich in (7) und (8) die Gruppe: $\mathfrak{X}_1 f \ldots \mathfrak{X}_m f$ von vornherein durch eine Transformation der Gruppe (5) auf eine der in § 27 angegebenen Formen bringen. Sind nun $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ zwei verschiedene unter den Gruppen des § 27 und wählen wir als Gruppe: $\mathfrak{X}_1 f \ldots \mathfrak{X}_m f$ einmal $\mathfrak{g}_1$, das andere Mal $\mathfrak{g}_2$, so erhalten wir zwei Gruppen von der Form (7), die sicher innerhalb (6) nicht gleichberechtigt sind und ebenso zwei nicht mit einander gleichberechtigte Gruppen von der Form (8). Um alle Untergruppen von (6) zu finden, haben wir demnach folgendermassen zu verfahren.

Wir setzen in (7) und (8) für: $\mathfrak{X}_1 f \ldots \mathfrak{X}_m f$ der Reihe nach die Gruppen des § 27 ein. Die Gruppen von der Form:

$$\mathfrak{X}_1 f \ldots \mathfrak{X}_m f, \ \mathfrak{r} \tag{7}$$

sind dann sicher keiner Vereinfachung mehr fähig. Dagegen müssen wir bei jeder Gruppe von der Form:

$$\mathfrak{X}_1 f + \alpha_1 \mathfrak{r}, \ \ldots, \ \mathfrak{X}_m f + \alpha_m \mathfrak{r} \tag{8}$$

noch besonders untersuchen, welche Werthe die Parameter $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ haben können und ob es nicht möglich ist, die willkürlich bleibenden unter diesen Parametern fortzuschaffen; dabei brauchen zur Fortschaffung dieser Parameter nur solche Transformationen benutzt zu werden, die der Gruppe (5) angehören und ausserdem die Gruppe: $\mathfrak{X}_1 f \ldots \mathfrak{X}_m f$ invariant lassen.

Es sei also: $\mathfrak{X}_1 f \ldots \mathfrak{X}_m f$ eine der Gruppen des § 27. Dann bestehen Relationen von der Form:

$$(\mathfrak{X}_i \mathfrak{X}_k) = \sum_1^m{}^{\mu} c_{ik\mu} \mathfrak{X}_\mu f \qquad (i, k = 1 \ldots m).$$

Andrerseits ergiebt sich:

$$(\mathfrak{X}_i f + \alpha_i \mathfrak{r}, \ \mathfrak{X}_k f + \alpha_k \mathfrak{r}) = (\mathfrak{X}_i \mathfrak{X}_k),$$

demnach werden die infinitesimalen Transformationen (8) stets dann aber auch nur dann ebenfalls eine m-gliedrige Gruppe erzeugen, wenn $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ den Bedingungen:

$$\sum_1^m{}^{\mu} c_{ik\mu} \alpha_\mu = 0 \qquad (i, k = 1 \ldots m) \tag{9}$$

genügen. Ist daher l die Zahl der von einander unabhängigen unter den Gleichungen (9), so bleiben $m - l$ von den α vollkommen willkürlich, während die übrigen l sich als lineare homogene Functionen dieser $m - l$ darstellen lassen.

Man kann es insbesondere stets so einrichten, dass l von den α gleich Null werden, während die übrigen $m - l$ willkürlich bleiben. Unter den gemachten Voraussetzungen ist nämlich l auch die Anzahl der von einander unabhängigen unter den infinitesimalen Transformationen: $(\mathfrak{X}_i \mathfrak{X}_k)$. Es lassen sich daher $\mathfrak{X}_1 f \ldots \mathfrak{X}_m f$ so wählen, dass alle $(\mathfrak{X}_i \mathfrak{X}_k)$ schon aus: $\mathfrak{X}_1 f \ldots \mathfrak{X}_l f$ linear abgeleitet werden können:

$$(10) \qquad (\mathfrak{X}_i \mathfrak{X}_k) = \sum_1^l{}_\mu c_{ik\mu} \mathfrak{X}_\mu f \qquad (i, k = 1 \ldots m),$$

dass aber dabei nicht alle l-reihigen Determinanten der Matrix:

$$\left| \begin{matrix} c_{ik1} & \ldots & c_{ikl} \\ (i, k = 1 \ldots m) \end{matrix} \right|$$

identisch verschwinden. Thut man das, so ergiebt sich aus den Gleichungen (9), dass $\alpha_1 \ldots \alpha_l$ sämmtlich gleich Null sein müssen, während $\alpha_{l+1} \ldots \alpha_m$ willkürlich bleiben.

Bei den in § 27 aufgezählten Gruppen sind die infinitesimalen Transformationen stets schon in der eben beschriebenen Weise gewählt.

Wir haben nunmehr eine Gruppe von der Form:

$$(8') \qquad \mathfrak{X}_1 f \ldots \mathfrak{X}_l f, \; \mathfrak{X}_{l+1} f + \alpha_{l+1} \mathfrak{r}, \ldots, \mathfrak{X}_m f + \alpha_m \mathfrak{r},$$

wo $\mathfrak{X}_1 f \ldots \mathfrak{X}_m f$ in den Beziehungen (10) stehen, und wir müssen jetzt noch untersuchen, wie sich die willkürlichen Parameter $\alpha_{l+1} \ldots \alpha_m$ ändern, wenn man auf die Gruppe (8′) die allgemeinste in (5) enthaltene Transformation ausführt, bei der die Gruppe: $\mathfrak{X}_1 f \ldots \mathfrak{X}_m f$ invariant bleibt. Wir wollen ausführlich auseinandersetzen, wie man diese Aufgabe erledigen kann, weil die betreffende Methode überhaupt bei allen ähnlichen Untersuchungen anwendbar ist. An und für sich wäre im vorliegenden Falle die Entwicklung einer solchen allgemeinen Methode nicht nöthig, weil da die Verhältnisse noch sehr einfach liegen.

Es sei zunächst: $\mathfrak{X}_1 f \ldots \mathfrak{X}_m f$, $\mathfrak{Z}_1 f \ldots \mathfrak{Z}_h f$ die grösste continuirliche Untergruppe von (5), in der die Gruppe: $\mathfrak{X}_1 f \ldots \mathfrak{X}_m f$ als invariante Untergruppe enthalten ist. Unter dieser Voraussetzung ist nach Abschn. I, S. 262, Satz 7 auch die von allen $(\mathfrak{X}_\mu \mathfrak{X}_\nu)$ erzeugte Gruppe, also in unserm Falle die Gruppe: $\mathfrak{X}_1 f \ldots \mathfrak{X}_l f$ in der Gruppe: $\mathfrak{X}_1 f \ldots \mathfrak{X}_m f$, $\mathfrak{Z}_1 f \ldots \mathfrak{Z}_h f$ invariant, es bestehen also Relationen von der Form:

$$(11) \qquad (\mathfrak{X}_\lambda \mathfrak{Z}_i) = \sum_1^l{}_s \beta_{\lambda i s} \mathfrak{X}_s f \qquad (\lambda = 1 \ldots l; \; i = 1 \ldots h).$$

Dagegen werden sich die $(\mathfrak{X}_{l+\mu}, \mathfrak{Z}_i)$ in der folgenden Weise ausdrücken:

$$(12)\qquad \left|(\mathfrak{X}_{l+\mu}, \mathfrak{Z}_i) = \sum_1^{l} {}_s\, \beta_{l+\mu, i, s}\, \mathfrak{X}_s f + \sum_1^{m-l} {}_\nu\, \gamma_{l+\mu, i, \nu}\, \mathfrak{X}_{l+\nu} f \right.$$
$$\left.(\mu = 1 \ldots m-l;\ i = 1 \ldots h),\right.$$

wo die γ jedenfalls nicht alle verschwinden.

Führen wir nun auf die Gruppe (8′) eine der infinitesimalen Transformationen $\mathfrak{X}_1 f \ldots \mathfrak{X}_m f$ aus, so geht jede infinitesimale Transformation der Gruppe (8′) in eine unendlich benachbarte infinitesimale Transformation dieser Gruppe über, die Gruppe (8′) selbst dagegen bleibt invariant. Anders, wenn wir auf die Gruppe (8′) eine der infinitesimalen Transformationen $\mathfrak{Z}_i f$ ausführen: da verwandelt sich die Gruppe (8′) allerdings in eine Gruppe von derselben Form, aber ihre Parameter $\alpha_{l+1} \ldots \alpha_m$ erleiden unendlich kleine Aenderungen. Führen wir nämlich auf: $\mathfrak{X}_{l+\mu} f + \alpha_{l+\mu} \mathfrak{r}$ die infinitesimale Transformation $\mathfrak{Z}_i f$ aus, so erhalten wir nach Abschn. I, S. 141 eine infinitesimale Transformation von der Gestalt:

$$\mathfrak{X}_{l+\mu} f + \alpha_{l+\mu} \mathfrak{r} + \delta t\, (\mathfrak{X}_{l+\mu} f + \alpha_{l+\mu} \mathfrak{r},\ \mathfrak{Z}_i f),$$

die bei Weglassung der von $\mathfrak{X}_1 f \ldots \mathfrak{X}_l f$ abhängigen Glieder so lautet:

$$\mathfrak{X}_{l+\mu} f + \alpha_{l+\mu} \mathfrak{r} + \delta t \sum_1^{m-l} {}_\nu\, \gamma_{l+\mu, i, \nu} \mathfrak{X}_{l+\nu} f.$$

Demnach verwandelt sich die Gruppe (8′) bei Ausführung von $\mathfrak{Z}_i f$ in eine unendlich benachbarte Gruppe von derselben Form und diese neue Gruppe ist von den infinitesimalen Transformationen:

$$\mathfrak{X}_1 f \ldots \mathfrak{X}_l f,\ \mathfrak{X}_{l+\mu} f + (\alpha_{l+\mu} + \delta \alpha_{l+\mu}) \mathfrak{r} \quad (\mu = 1 \ldots m-l)$$

erzeugt, wo $\delta \alpha_{l+\mu}$ den folgenden Werth hat:

$$\delta \alpha_{l+\mu} = - \sum_1^{m-l} {}_\nu\, \gamma_{l+\mu, i, \nu}\, \alpha_{l+\nu} \cdot \delta t \quad (\mu = 1 \ldots m-l).$$

Mit andern Worten: wenn wir auf die Gruppe (8′) die infinitesimale Transformation $\mathfrak{Z}_i f$ ausführen, so hat das dieselbe Wirkung, als ob wir auf die Parameter $\alpha_{l+1} \ldots \alpha_m$ die infinitesimale Transformation:

$$\mathsf{A}_i f = - \sum_1^{m-l} {}_\mu \left\{ \sum_1^{m-l} {}_\nu\, \gamma_{l+\mu, i, \nu}\, \alpha_{l+\nu} \right\} \frac{\partial f}{\partial \alpha_{l+\mu}}$$

ausführten.

Es versteht sich von selbst, dass die h infinitesimalen Transformationen: $\mathsf{A}_1 f \ldots \mathsf{A}_h f$ eine Gruppe erzeugen. Diese Gruppe giebt an, in welcher Weise die Parameter $\alpha_{l+1} \ldots \alpha_m$ transformirt werden, wenn man auf die Gruppe (8′) die Gruppe $\mathfrak{X}_1 f \ldots \mathfrak{X}_m f$, $\mathfrak{Z}_1 f \ldots \mathfrak{Z}_h f$ ausführt, sie ist daher augenscheinlich mit dieser letzteren Gruppe meroedrisch isomorph.

Nunmehr ist es leicht zu entscheiden, unter welchen Bedingungen zwei Gruppen von der Form (8′) durch eine Transformation der Gruppe: $\mathfrak{X}_1 f \ldots \mathfrak{X}_m f$, $\mathfrak{Z}_1 f \ldots \mathfrak{Z}_h f$ mit einander ähnlich sind.

Wir deuten, um uns bequemer ausdrücken zu können, $\alpha_{l+1} \ldots \alpha_m$ als rechtwinklige Coordinaten in einem $(m-l)$-fach ausgedehnten Raume R_{m-l}, so dass also jede Gruppe (8′) durch einen Punkt dieses Raumes dargestellt wird und umgekehrt jeder im Endlichen gelegene Punkt des R_{m-l} das Bild einer Gruppe von der Form (8′) ist. Die Punkte des R_{m-l} denken wir uns durch die Gruppe: $\mathsf{A}_1 f \ldots \mathsf{A}_h f$ transformirt und denken uns alle kleinsten bei dieser Gruppe invarianten Mannigfaltigkeiten bestimmt (s. Abschn. I, S. 225); dazu sind nur ausführbare Operationen erforderlich, weil die Gruppe: $\mathsf{A}_1 f \ldots \mathsf{A}_h f$ linear und homogen ist. Zwei Gruppen von der Form (8′) sind nun offenbar stets dann aber auch nur dann durch eine Transformation der Gruppe: $\mathfrak{X}_1 f \ldots \mathfrak{X}_m f$, $\mathfrak{Z}_1 f \ldots \mathfrak{Z}_h f$ ähnlich, wenn ihre Bildpunkte im R_{m-l} auf einunddersel ben kleinsten invarianten Mannigfaltigkeit liegen.

Wünscht man unter den Gruppen (8′) eine Auswahl zu treffen in der Weise, dass von allen Gruppen (8′) die mit einander durch Transformationen der Gruppe: $\mathfrak{X}_1 f \ldots \mathfrak{X}_m f$, $\mathfrak{Z}_1 f \ldots \mathfrak{Z}_h f$ ähnlich sind, jedesmal nur eine als Repräsentant angegeben werden soll, so kann man auch das jetzt ohne Schwierigkeit ausführen. Man braucht nämlich nur auf jeder kleinsten invarianten Mannigfaltigkeit des R_{m-l}, die nicht ganz im Unendlichen liegt, je einen Punkt auszuwählen; die Gruppen (8′), deren Bilder diese Punkte sind, erfüllen dann die gestellte Forderung.

Schliesslich ist noch der Fall zu erwähnen, dass die grösste Untergruppe von (5), in der die Gruppe: $\mathfrak{X}_1 f \ldots \mathfrak{X}_m f$ als invariante Untergruppe steckt, nicht continuirlich ist, sondern aus mehreren discreten Schaaren von Transformationen besteht. Tritt dieser Fall ein, so kann es sehr gut vorkommen, dass einzelne unter den Gruppen (8′), die man nach der vorhin gegebenen Anleitung ausgewählt hat, durch Transformationen der Gruppe (5) ähnlich sind. Man wird jedesmal noch besonders zu untersuchen haben, ob etwas derartiges vorkommt oder nicht.

Um die vorstehenden allgemeinen Entwickelungen durch ein Beispiel zu erläutern, wählen wir als Gruppe: $\mathfrak{X}_1 f \ldots \mathfrak{X}_m f$ die Gruppe VI, B, 1 des § 27. Es handelt sich darum, welche unter den Gruppen von der Form:

$$\mathfrak{p} + \alpha_1 \mathfrak{r}, \quad \mathfrak{q} + \alpha_2 \mathfrak{r} \tag{13}$$

innerhalb der Gruppe (6) gleichberechtigt sind.

Die infinitesimalen Transformationen (13) erzeugen stets eine zweigliedrige Gruppe, welche Werthe auch die Parameter α_1 und α_2 haben mögen.

Nach den oben aufgestellten Regeln haben wir nun zunächst die grösste Untergruppe von (5) aufzusuchen, in der die Gruppe: $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ invariant ist; diese Untergruppe ist sechsgliedrig und lautet:

$$\mathfrak{p},\ \mathfrak{q},\ \mathfrak{x}\mathfrak{q},\ \mathfrak{x}\mathfrak{p} - \mathfrak{y}\mathfrak{q},\ \mathfrak{y}\mathfrak{p},\ \mathfrak{x}\mathfrak{p} + \mathfrak{y}\mathfrak{q}.$$

Sodann haben wir in α_1 und α_2 die Gruppe $\mathsf{A}_1 f \ldots \mathsf{A}_h f$ aufzustellen; diese wird in unserm Falle viergliedrig und hat die Form:

$$-\alpha_2 \frac{\partial f}{\partial \alpha_1},\quad -\alpha_1 \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial \alpha_2},\quad -\alpha_1 \frac{\partial f}{\partial \alpha_2},\quad -\alpha_1 \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} - \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial \alpha_2},$$

sie lässt den Punkt: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ invariant, sonst aber keine im Endlichen gelegenen Punktfigur. Demnach ist jede Gruppe von der Form (13) innerhalb der Gruppe (6) entweder mit der Gruppe: $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ oder mit der Gruppe: $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q} + \mathfrak{r}$ gleichberechtigt.

In dieser Weise kann man nun alle Untergruppen der Gruppe (6) bestimmen und auf einfache Normalformen bringen. Wir unterdrücken die dazu erforderlichen Rechnungen, die keinerlei Schwierigkeit darbieten, und stellen im folgenden Paragraphen sogleich die linearen homogenen Gruppen in x, y, z zusammen, die man ja nach S. 111 sofort hinschreiben kann, sobald man alle Untergruppen der Gruppe (6) kennt. Für $xp + yq + zr$ benutzen wir dabei die auf S. 110 eingeführte Abkürzung: U.

§ 30.

Tabelle aller linearen homogenen Gruppen in drei Veränderlichen.

I.

$$\boxed{zp,\ zq,\ xp,\ yp,\ xq,\ yq,\ xr,\ yr,\ zr}$$

$$\boxed{zp,\ zq,\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ xr,\ yr,\ xp - zr}.$$

II.

$$\boxed{zp,\ zq,\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq + \alpha U} \qquad \boxed{zp,\ zq,\ xp,\ yp,\ xq,\ yq,\ zr}$$

$$\boxed{zp,\ zq,\ xq,\ xr,\ xp - zr,\ yq + \alpha U} \qquad \boxed{zp,\ zq,\ xq,\ xr,\ xp,\ yq,\ zr}.$$

III.

$zp,\ zq,\ xq,\ xp - yq,\ yp$ | $zp,\ zq,\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ U$

$zp,\ zq,\ xq,\ xr,\ xp - zr$ | $zp,\ zq,\ xq,\ xr,\ xp - zr,\ U$

$zp,\ zq,\ xq,\ xp + \alpha U,\ yq + \beta U$ | $zp,\ zq,\ xq,\ xp,\ yq,\ zr$.

IV.

$zp,\ zq,\ xp + \alpha U,\ yq + \beta U$ | $zp,\ zq,\ xp,\ yq,\ zr$

$zq,\ xq,\ xp + \alpha U,\ yq + \beta U$ | $zq,\ xq,\ xp,\ yq,\ zr$

$zp,\ zq,\ xq,\ axp + cyq + \alpha U$ | $zp,\ zq,\ xq + U,\ xp + yq + \alpha U$

$zp + U,\ zq,\ xq,\ yq + \alpha U$ | $zp,\ zq,\ xq,\ axp + cyq,\ U$

$xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq + \alpha U$ | $xq,\ yp,\ xp,\ yq,\ zr$.

V.

$zp + xq,\ yq - zr,\ xr + yp$ | $zp + xq,\ yq - zr,\ xr + yp,\ U$

$xq,\ xp - yq,\ yp$ | $xq,\ xp - yq,\ yp,\ U$

$zp,\ zq,\ axp + cyq + \alpha U$ | $zp,\ zq + U,\ xp + \alpha U$

$zp,\ zq,\ axp + cyq,\ U$

$zq,\ xq,\ axp + cyq + \alpha U$ | $zq,\ xq + U,\ xp + yq + \alpha U$

$zq,\ xq,\ axp + cyq,\ U$

$zq,\ xp + \alpha U,\ yq + \beta U$ | $zq,\ xp,\ yq,\ zr$

$zq,\ xq,\ zp$ | $zq,\ xq + U,\ zp + U$ | $zq,\ xq + U,\ zp$

$zq,\ xq,\ zp + U$ $zq,\ xq,\ zp,\ U$

$zq,\ zp + xq,\ yq - zr + \alpha U$ $zq,\ zp + xq,\ yq - zr,\ U$

$zq,\ xq,\ zp + yq + \alpha U$ $zq,\ xq,\ zp + yq,\ U$

$zp,\ zq,\ xp + (x + y)q + \alpha U$ $zp,\ zq,\ xp + (x + y)q,\ U$.

VI.

$zq,\ axp + cyq + \alpha U$ $zq + U,\ xp + \alpha U$ $zq,\ axp + cyq,\ U$

$zq,\ zp + yq + \alpha U$ $zq,\ zp + yq,\ U$

$zq,\ xp + (x + y)q + \alpha U$ $zq,\ xp + (x + y)q,\ U$

$zp + xq,\ yq - zr + \alpha U$ $zp + xq,\ yq - zr,\ U$

$zp,\ zq$ $zp,\ zq + U$ $zp,\ zq,\ U$

$zq,\ xq$ $zq,\ xq + U$ $zq,\ xq,\ U$

$zq,\ zp + xq$ $zq + U,\ zp + xq + \alpha U$ $zq,\ zp + xq + U$

$zq,\ zp + xq,\ U$

$zq,\ xp + \alpha U$ $zq + U,\ xp + \alpha U$

$zq,\ xp,\ U$

$xp + \alpha U,\ yq + \beta U$ $xp,\ yq,\ zr$.

VII.

$xp + cyq + \alpha U$ $(c \neq 0, 1)$ | $xp + cyq,\ U$ $(c \neq 0, 1)$ | $zp + yq + \alpha U$ | $zp + yq,\ U$

$zp + xq$ | $zp + xq + U$ | $zp + xq,\ U$ | $yq + \alpha U$ | $yq,\ U$

zq | $zq + U$ | $zq,\ U$.

VIII.

U .

Bei dieser Tabelle ist zu bemerken, dass die beiden Parameter a und c, die in mehreren Gruppen auftreten, niemals gleichzeitig verschwinden dürfen, denn es kommt stets nur auf das Verhältniss dieser beiden Parameter an, nicht auf ihre absoluten Zahlenwerthe.

Ferner beachte man, dass wir die linearen homogenen Gruppen nicht nach ihrer Gliederzahl geordnet haben; die Anordnung der Gruppen ist vielmehr so getroffen, dass unter jeder Nummer alle linearen homogenen Gruppen zusammengefasst sind, welche die ∞^2 Geraden durch den Punkt: $x = y = z = 0$ durch eine projective Gruppe von derselben Gliederzahl transformiren. Diese Anordnung empfiehlt sich aus verschiedenen Gründen, namentlich im Hinblick auf die etwaige Verwendung der linearen homogenen Gruppen zur Klassification der Gruppen des Raumes x, y, z (s. Abschn. I, Kap. 28).

§ 31.

Mit wenigen Worten wollen wir noch einer andern Methode gedenken, die zur Bestimmung aller Untergruppen der Gruppe:

(6) $\mathfrak{p},\ \mathfrak{q},\ \mathfrak{x}\mathfrak{p},\ \mathfrak{y}\mathfrak{p},\ \mathfrak{x}\mathfrak{q},\ \mathfrak{y}\mathfrak{q},\ \mathfrak{x}^2\mathfrak{p} + \mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{q},\ \mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{p} + \mathfrak{y}^2\mathfrak{q},\ \mathfrak{r}$

führt.

Man kann nämlich die Untergruppen von (6) auch eintheilen in solche, die zugleich Untergruppen der Gruppe:

(5) $\mathfrak{p},\ \mathfrak{q},\ \mathfrak{x}\mathfrak{p},\ \mathfrak{y}\mathfrak{p},\ \mathfrak{x}\mathfrak{q},\ \mathfrak{y}\mathfrak{q},\ \mathfrak{x}^2\mathfrak{p} + \mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{q},\ \mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{p} + \mathfrak{y}^2\mathfrak{q}$

sind und in solche, die das nicht sind. Alle Untergruppen der ersten Art kennen wir aus § 27, folglich bleiben nur noch die der zweiten Art zu bestimmen.

Ist g_{m+1} eine $(m+1)$-gliedrige Untergruppe von (6), so enthält g_{m+1} $m+1$ unabhängige infinitesimale Transformationen von der Form:

$$\mathfrak{X}_1 f \ldots \mathfrak{X}_m f,\ \mathfrak{r} + \mathfrak{Z} f,$$

wo $\mathfrak{X}_1 f \ldots \mathfrak{X}_m f$, $\mathfrak{Z} f$ der Gruppe (5) angehören. Man bemerkt nun sofort, dass $\mathfrak{X}_1 f \ldots \mathfrak{X}_m f$ ihrerseits eine m-gliedrige Untergruppe von (5) erzeugen und zwar eine, die in g_{m+1} als invariante Untergruppe enthalten ist. Verstehen wir daher unter: $\mathfrak{X}_1 f \ldots \mathfrak{X}_m f$, $\mathfrak{Z}_1 f \ldots \mathfrak{Z}_h f$ wieder die grösste Untergruppe von (5), in der die Gruppe: $\mathfrak{X}_1 f \ldots \mathfrak{X}_m f$ invariant ist, so hat g_{m+1} nothwendig die Form:

$$\mathfrak{X}_1 f \ldots \mathfrak{X}_m f,\ \mathfrak{r} + \alpha_1 \mathfrak{Z}_1 f + \cdots + \alpha_h \mathfrak{Z}_h f, \tag{14}$$

wo die α Parameter bedeuten.

Wir dürfen nun offenbar von vornherein voraussetzen, dass die Gruppe: $\mathfrak{X}_1 f \ldots \mathfrak{X}_m f$ bereits eine der Formen des § 27 besitzt. Es handelt sich dann nur noch darum, diese verschiedenen Formen der Gruppe: $\mathfrak{X}_1 f \ldots \mathfrak{X}_m f$ der Reihe nach durchzugehen und in jedem einzelnen Falle durch Transformationen der Gruppe: $\mathfrak{X}_1 f \ldots \mathfrak{X}_m f$, $\mathfrak{Z}_1 f \ldots \mathfrak{Z}_h f$ möglichst viele von den Parametern $\alpha_1 \ldots \alpha_h$ wegzuschaffen.

Führen wir die infinitesimale Transformation $\mathfrak{Z}_k f$ auf die Gruppe (14) aus, so erhält diese die Form:

$$\left| \mathfrak{X}_\mu f + \delta t (\mathfrak{X}_\mu \mathfrak{Z}_k),\ \mathfrak{r} + \sum_1^h{}^i \alpha_i \mathfrak{Z}_i f + \delta t \left(\mathfrak{r} + \sum_1^h{}^i \alpha_i \mathfrak{Z}_i f,\ \mathfrak{Z}_k f \right) \right|_{(\mu = 1 \ldots m).} \tag{15}$$

Unter den gemachten Voraussetzungen bestehen aber Relationen von der Gestalt:

$$(\mathfrak{X}_\mu \mathfrak{Z}_k) = \sum_1^m{}^\nu \varrho_{\mu k \nu} \mathfrak{X}_\nu f$$

$$(\mathfrak{Z}_i \mathfrak{Z}_k) = \sum_1^h{}^s \gamma_{iks} \mathfrak{Z}_s f + \sum_1^m{}^\nu \beta_{ik\nu} \mathfrak{X}_\nu f,$$

also lautet die Gruppe (15) so:

$$\mathfrak{X}_1 f \ldots \mathfrak{X}_m f,\ \mathfrak{r} + \sum_1^h{}^i \left\{ \alpha_i + \delta t \sum_1^h{}^s \gamma_{ski} \alpha_s \right\} \mathfrak{Z}_i f;$$

sie hat dieselbe Form wie die Gruppe (14), aber ihre Parameter unterscheiden sich von denen der Gruppe (14) um die unendlich kleinen Grössen:

$$\delta \alpha_i = \delta t \cdot \sum_1^h{}^s \gamma_{ski} \alpha_s \qquad (i = 1 \ldots h).$$

Hieraus schliessen wir Folgendes:

Wird die allgemeinste Transformation der Gruppe: $\mathfrak{X}_1 f \ldots \mathfrak{X}_m f$, $\mathfrak{Z}_1 f \ldots \mathfrak{Z}_h f$ auf die Gruppe (14) ausgeführt, so werden die Parameter $\alpha_1 \ldots \alpha_h$ durch die Gruppe:

$$\mathsf{A}_k f = \sum_1^h{}_i \left\{ \sum_1^h{}_s \gamma_{s\,k\,i} \alpha_s \right\} \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} \quad (k = 1 \ldots h)$$

transformirt, die mit der Gruppe: $\mathfrak{X}_1 f \ldots \mathfrak{X}_m f$, $\mathfrak{Z}_1 f \ldots \mathfrak{Z}_h f$ meroedrisch isomorph ist.

Die Frage, wieviele von den Parametern $\alpha_1 \ldots \alpha_h$ aus der Gruppe (14) fortgeschafft werden können, ist hierdurch auf die Bestimmung aller kleinsten Mannigfaltigkeiten zurückgeführt, welche die Gruppe: $\mathsf{A}_1 f \ldots \mathsf{A}_h f$ in dem h-fach ausgedehnten Raume $\alpha_1 \ldots \alpha_h$ invariant lässt.

Mit diesen Andeutungen wollen wir uns begnügen. Erwähnt sei noch, dass die eben auseinandergesetzte Methode zur Bestimmung aller Untergruppen der Gruppe (6) diese Untergruppen nach ihrer Gliederzahl geordnet liefert. Im Allgemeinen steht diese neue Methode der des § 29 an Bequemlichkeit nach; sie ist insbesondere sehr unbequem, wenn die Zahl m den Werth 1 hat.

Die beiden hier auseinandergesetzten Methoden zur Bestimmung aller linearen homogenen Gruppen in drei Veränderlichen hat Lie schon 1884 in seinem Archive angegeben*).

*) Die betreffende schon auf S. 29 und 81 angeführte Abhandlung befindet sich im ersten Hefte des zehnten Bandes, das am Schlusse des Jahres 1884 erschienen ist. Danach ist die S. 29 und 81 angegebene Jahreszahl 1885 zu berichtigen.

Abtheilung II.

Die endlichen continuirlichen Gruppen des gewöhnlichen Raumes.

Wollten wir in derselben Weise wie bei der Ebene auch alle endlichen continuirlichen Gruppen des gewöhnlichen, dreifach ausgedehnten Raumes bestimmen, so würden wir ganz unverhältnissmässig viel Platz gebrauchen. Wir werden deshalb die primitiven Gruppen des gewöhnlichen Raumes sämmtlich aufstellen, denn deren Kenntniss ist augenscheinlich von der grössten Wichtigkeit; die imprimitiven Gruppen dagegen theilen wir in drei Kategorien, von denen wir die beiden ersten erschöpfend behandeln, während wir bei der dritten blos kurz andeuten, wie man die zu ihr gehörigen Gruppen finden kann.

Kapitel 7.

Bestimmung aller primitiven Gruppen des dreifach ausgedehnten Raumes.

Die in der Ueberschrift bezeichneten Gruppen können wir zum Theil auf Grund von Entwickelungen der beiden ersten Abschnitte sofort angeben, nur einige von den primitiven Gruppen des dreifach ausgedehnten Raumes erfordern zu ihrer Bestimmung neue Untersuchungen. Wir werden bei diesen Untersuchungen, abweichend von unserm sonstigen Brauche, die Mongesche Integrationstheorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung in drei Veränderlichen wenigstens theilweise als bekannt voraussetzen. Wir thun das aus zwei Gründen, erstens weil die mit Hülfe der Mongeschen Theorie entwickelte Methode an und für sich äusserst lehrreich ist und zweitens weil wir Wiederholungen vermeiden wollen. In einem spätern Kapitel werden wir nämlich für den n-fach ausgedehnten Raum gewisse Untersuchungen durchführen, die im Falle $n = 3$ sofort die hier in Frage kommenden primitiven Gruppen des dreifach ausgedehnten Raumes liefern; wir werden dabei die in Kap. 28 des Abschnitts I

entwickelte Methode benutzen und ziehen deshalb jetzt eine andre Methode vor*).

§ 32.

Ist die m-gliedrige Gruppe G_m des Raumes x, y, z primitiv, so ist sie nach Abschn. I, S. 221 zugleich transitiv, sie enthält daher gerade $m-3$ unabhängige infinitesimale Transformationen, die einen beliebig gewählten Punkt x_0, y_0, z_0 von allgemeiner Lage invariant lassen. Diese $m-3$ infinitesimalen Transformationen erzeugen eine $(m-3)$-gliedrige Untergruppe G_{m-3} der G_m (a. a. O. S. 205, Satz 2) und haben die Form:

$$\begin{aligned} Y_k f = &\{\lambda_{k1}(x-x_0) + \lambda_{k2}(y-y_0) + \lambda_{k3}(z-z_0)\}\, p + \\ &+ \{\mu_{k1}(x-x_0) + \mu_{k2}(y-y_0) + \mu_{k3}(z-z_0)\}\, q + \\ &+ \{\nu_{k1}(x-x_0) + \nu_{k2}(y-y_0) + \nu_{k3}(z-z_0)\}\, r + \cdots \\ &\qquad (k=1\ldots m-3), \end{aligned}$$

wo die weggelassenen Glieder in $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$ von der zweiten und von höherer Ordnung sind.

Wie wir in Abschn. I, S. 599 ff. gesehen haben, erzeugen auch die $m-3$ infinitesimalen Transformationen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Y}_k f = &(\lambda_{k1}x' + \lambda_{k2}y' + \lambda_{k3}z')\, p' + (\mu_{k1}x' + \mu_{k2}y' + \mu_{k3}z')\, q' + \\ &+ (\nu_{k1}x' + \nu_{k2}y' + \nu_{k3}z')\, r' \\ &\qquad (k=1\ldots m-3) \end{aligned}$$

in den Veränderlichen x', y' z' eine Gruppe $\mathfrak{G}$. Diese Gruppe, die linear und homogen und mit der G_{m-3} isomorph ist, hat eine sehr einfache Bedeutung. Wir können nämlich (a. a. O. S. 600) x', y', z' als homogene Coordinaten der ∞^2 Richtungen durch den Punkt x_0, y_0, z_0 auffassen; die Gruppe $\mathfrak{G}$ giebt dann an, in welcher Weise diese ∞^2 Richtungen bei der Gruppe G_{m-3} transformirt werden. Besonders hervorheben wollen wir noch, dass $\mathfrak{G}$ durch die Glieder erster Ordnung in den Reihenentwickelungen von $Y_1 f \ldots Y_{m-3} f$ vollständig bestimmt ist und dass man umgekehrt die Glieder erster Ordnung in der Reihenentwickelung der allgemeinen infinitesimalen Transformation von G_{m-3} sofort hinschreiben kann, wenn man die infinitesimalen Transformationen von $\mathfrak{G}$ kennt.

Die Gruppe $\mathfrak{G}$ transformirt die zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit der Richtungen durch den Punkt x_0, y_0, z_0 projectiv, nach Theor. 7, S. 94 sind daher vier Fälle denkbar:

---

*) Die Entwickelungen des gegenwärtigen Kapitels hat Lie dem Wesen der Sache nach schon im X. Bde. seines norwegischen Archivs auf S. 124 ff. auseinandergesetzt (Kristiania 1884).

1) $\mathfrak{G}$ transformirt die bewussten ∞^2 Richtungen in allgemeinster Weise, das heisst achtgliedrig.

2) $\mathfrak{G}$ transformirt diese Richtungen dreigliedrig und zwar durch die allgemeinste Gruppe, die einen gewissen nicht ausgearteten Kegel zweiten Grades von Richtungen invariant lässt.

3) $\mathfrak{G}$ lässt ein ebenes Büschel von ∞^1 Richtungen durch den Punkt x_0, y_0, z_0 in Ruhe, dagegen keine einzelne Richtung durch diesen Punkt.

4) $\mathfrak{G}$ lässt mindestens eine Richtung durch den Punkt x_0, y_0, z_0 in Ruhe.

Der letzte Fall ist hier ausgeschlossen. Liesse nämlich $\mathfrak{G}$ eine Richtung durch den Punkt x_0, y_0, z_0 invariant, so gäbe es augenscheinlich ein simultanes System von gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\frac{dx}{\alpha(x, y, z)} = \frac{dy}{\beta(x, y, z)} = \frac{dz}{\gamma(x, y, z)},$$

das bei unsrer G_m invariant bliebe; die G_m wäre also gegen unsre Voraussetzung imprimitiv.

Von den drei übrigen Fällen ist der erste durch die Entwickelungen des Kap. 29 in Abschn. I erledigt. Transformirt nämlich $\mathfrak{G}$ die ∞^2 Richtungen durch den Punkt x_0, y_0, z_0 in allgemeinster Weise, so ist nach dem angeführten Kapitel die Gruppe G_m durch Punkttransformation ähnlich entweder mit der allgemeinen projectiven Gruppe:

[1] $$\begin{array}{|c|}\hline p,\ q,\ r,\ xp,\ yp,\ zp,\ xq,\ yq,\ zq,\ xr,\ yr,\ zr \\ x^2p + xyq + xzr,\ xyp + y^2q + yzr,\ xzp + yzq + z^2r \\ \hline\end{array}$$

oder mit der allgemeinen linearen Gruppe:

[2] $$\begin{array}{|c|}\hline p,\ q,\ r,\ xp,\ yp,\ zp,\ xq,\ yq,\ zq,\ xr,\ yr,\ zr \\ \hline\end{array}$$

oder endlich mit der speciellen linearen Gruppe:

[3] $$\begin{array}{|c|}\hline p,\ q,\ r,\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ zp,\ zq,\ xp - zr,\ xr,\ yr \\ \hline\end{array}$$

des Raumes x, y, z.

Wir kommen zum dritten Falle, wo $\mathfrak{G}$ ein ebenes Büschel von ∞^1 Richtungen durch den Punkt x_0, y_0, z_0 invariant lässt. Da x_0, y_0, z_0 ein Punkt von allgemeiner Lage ist, so können wir schliessen, dass hier bei der Gruppe G_m überhaupt mit jedem Punkte von allgemeiner Lage ein ebenes Büschel von ∞^1 hindurchgehenden Richtungen invariant verknüpft ist; es giebt in Folge dessen eine gewisse Pfaffsche Gleichung:

(1) $$\alpha(x, y, z)\,dx + \beta(x, y, z)\,dy + \gamma(x, y, z)\,dz = 0,$$

die bei unsrer G_m invariant bleibt. Diese totale Gleichung darf nicht integrabel sein, besässe sie nämlich ein Integral $\varphi(x, y, z)$, so bliebe die Schaar der ∞^1 Flächen: $\varphi(x, y, z) = \text{const.}$ bei der G_m invariant, unsre G_m wäre somit imprimitiv. Ist aber die Gleichung (1) nicht integrabel, so lässt sie sich, wie wir wohl als bekannt voraussetzen dürfen, durch Einführung neuer Veränderlicher $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ auf die Form:

(2) $$d\mathfrak{z} - \mathfrak{y}\,d\mathfrak{x} = 0$$

bringen; bei Einführung dieser neuen Veränderlichen geht dann G_m in eine Gruppe $\mathfrak{G}_m$ über, die (2) invariant lässt und die in Folge dessen auch als eine r-gliedrige Berührungstransformationsgruppe der Ebene $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{z}$ aufgefasst werden kann. Es handelt sich demnach jetzt darum, alle Berührungstransformationsgruppen der Ebene $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{z}$ zu finden, die als Gruppen von Punkttransformationen des Raumes $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{y}$ primitiv sind.

Nach Abschn. II, S. 394 liefert jede reducible Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene eine imprimitive Gruppe des Raumes. Andrerseits (a. a. O. Theor. 73, S. 445) sind unter den irreducibeln Berührungstransformationsgruppen der Ebene $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{z}$ nur die zehngliedrigen als Gruppen des Raumes $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{y}$ primitiv, während die sechs- und die siebengliedrigen ebenfalls imprimitiv sind. Da nun jede zehngliedrige irreducible Berührungstransformationsgruppe der Ebene $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{z}$ als Gruppe des Raumes $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{y}$ durch eine Punkttransformation dieses Raumes in die zehngliedrige projective Gruppe eines linearen Complexes übergeführt werden kann (a. a. O. Theor. 74, S. 449), so ergiebt sich Folgendes:

Ist eine m-gliedrige Gruppe des Raumes x, y, z primitiv und werden ausserdem, wenn man einen Punkt von allgemeiner Lage festhält, die ∞^2 Richtungen durch diesen Punkt derart transformirt, dass ein ebenes Büschel von ∞^1 Richtungen invariant bleibt, so ist $m = 10$ und die betreffende Gruppe ist durch Punkttransformation ähnlich mit der zehngliedrigen projectiven Gruppe:

[4]
$$\begin{array}{c} p - yr,\ q + xr,\ r,\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq + 2zr \\ zp - y(xp + yq + zr),\ zq + x(xp + yq + zr) \\ z(xp + yq + zr) \end{array}$$

die den linearen Complex:

$$dz + x\,dy - y\,dx = 0$$

invariant lässt.

§ 33.

Es bleibt noch der zweite der oben unterschiedenen vier Fälle zu erledigen. Wir suchen also jetzt alle primitiven Gruppen des Raumes x, y, z, die so beschaffen sind, dass bei Festhaltung eines Punktes von allgemeiner Lage die ∞^2 Richtungen durch diesen Punkt dreigliedrig transformirt werden und zwar durch die allgemeinste Gruppe, die einen gewissen nicht ausgearteten Kegel zweiten Grades invariant lässt.

Eine Gruppe G_m von der hier verlangten Beschaffenheit enthält augenscheinlich mindestens sechs Parameter und lässt ausserdem eine Gleichung zweiten Grades von der Form:

$$(3)\quad \alpha_{11}dx^2+\alpha_{22}dy^2+\alpha_{33}dz^2+2\alpha_{12}dx\,dy+2\alpha_{13}dx\,dz+2\alpha_{23}dy\,dz=0$$

invariant, wo die neun Coefficienten: $\alpha_{ik}=\alpha_{ki}$ Functionen von x, y, z sind, deren Determinante sicher nicht identisch verschwindet. Mit der Gleichung (3) bleibt dann bei unsrer G_m zugleich auch eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung und zweiten Grades invariant, nämlich die folgende:

$$(4)\quad \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} & -1 \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \frac{\partial z}{\partial y} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ -1 & \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = 0;$$

sie wird erhalten, wenn man den geometrischen Ort aller Flächenelemente:

$$x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}$$

des Raumes x, y, z aufsucht, die mit ihrer Ebene den ihrem Punkte zugeordneten Kegel zweiten Grades von Richtungen berühren (vgl. Abschn. II, S. 71 ff.).

Wir setzen nunmehr die Mongesche Integrationstheorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung als bekannt voraus.

Nach Monge gehören zu der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (4) ∞^3 Curven, ihre Charakteristiken. Durch jeden Punkt des Raumes gehen ∞^1 von diesen Charakteristiken, die dem Punkte genau denselben Kegel zweiten Grades von Richtungen zuordnen, wie die Gleichung (3). Der Inbegriff aller ∞^3 Charakteristiken bleibt mit (4) zugleich invariant und gestattet daher ebenso wie (4) die Gruppe G_m.

Bilden wir die ∞^3 Charakteristiken als Punkte in einem neuen Raume $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ von drei Dimensionen ab, so erhalten wir in diesem neuen Raume eine mit G_m holoedrisch isomorphe Gruppe $\mathfrak{G}_m$, die angiebt, in welcher Weise die ∞^3 Charakteristiken von (4) bei der G_m unter einander vertauscht werden. Holoedrisch isomorph mit G_m ist $\mathfrak{G}_m$ deshalb, weil jede Punkttransformation des Raumes x, y, z, die alle ∞^3 Charakteristiken in Ruhe lässt, gleichzeitig auch alle Punkte x, y, z stehen lassen muss und also mit der identischen Transformation zusammenfällt. Bei dieser $\mathfrak{G}_m$ bleibt eine gewisse nicht integrable Pfaffsche Gleichung:

$$\lambda(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})\, d\mathfrak{x} + \mu(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})\, d\mathfrak{y} + \nu(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})\, d\mathfrak{z} = 0 \tag{5}$$

invariant, die ausdrückt, dass sich die beiden unendlich benachbarten Charakteristiken: $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ und $\mathfrak{x} + d\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y} + d\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z} + d\mathfrak{z}$ der Differentialgleichung (4) in einem Punkte schneiden. Da nun durch jeden Punkt des Raumes x, y, z ∞^1 Charakteristiken hindurchgehen, so entsprechen den ∞^3 Punkten des Raumes x, y, z im Raume $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ augenscheinlich ∞^3 Curven, die alle die Pfaffsche Gleichung (5) befriedigen und deren Inbegriff ebenfalls bei der $\mathfrak{G}_m$ invariant bleibt.

Wir wollen der Einfachheit wegen von vornherein uns die Veränderlichen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ so gewählt denken, dass die Pfaffsche Gleichung (5) die Gestalt:

$$d\mathfrak{z} - \mathfrak{y}\, d\mathfrak{x} = 0 \tag{6}$$

erhält — das ist ja immer möglich. Die Gruppe $\mathfrak{G}_m$ lässt sich dann auch auffassen als eine Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene $\mathfrak{x}, \mathfrak{z}$. Ebenso lassen sich die ∞^3 Curven des Raumes $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$, die den ∞^3 Punkten des Raumes $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ entsprechen, als Curven der Ebene auffassen, denn jeder Curve des Raumes x, y, z, die der Pfaffschen Gleichung (6) genügt, entspricht eine ganz bestimmte Element-M_1 der Ebene $\mathfrak{x}, \mathfrak{z}$ (s. Abschn. II, S. 393 f.), den genannten ∞^3 Curven des Raumes $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ entsprechen daher ∞^3 Element-M_1 und demnach ∞^3 Curven der Ebene $\mathfrak{x}, \mathfrak{z}$. Wir erkennen hieraus, dass unsre $\mathfrak{G}_m$, aufgefasst als Berührungstransformationsgruppe der Ebene $\mathfrak{x}, \mathfrak{z}$, eine Schaar von ∞^3 ebenen Curven:

$$\Omega(\mathfrak{x}, \mathfrak{z};\ x, y, z) = 0 \tag{7}$$

invariant lässt; die drei Parameter dieser Curvenschaar nennen wir x, y, z, weil jedem Punkte des Raumes x, y, z eine Curve der Schaar (7) zugeordnet ist. Endlich ist noch zu erwähnen, dass die Gleichung (3) für die Curvenschaar (7) eine sehr einfache Bedeutung hat, sie ist nämlich augenscheinlich die Bedingung dafür, dass sich die beiden

unendlich benachbarten Curven: x, y, z und $x + dx, y + dy, z + dz$ der Schaar (7) berühren.

Die eben durchgeführten Betrachtungen liefern uns sofort eine Methode zur Bestimmung aller primitiven Gruppen des Raumes x, y, z die eine Gleichung (3) mit nicht verschwindender Determinante invariant lassen*).

Jeder m-gliedrigen Gruppe G_m von der verlangten Beschaffenheit entspricht nämlich, wie wir gesehen haben, eine gewisse m-gliedrige Berührungstransformationsgruppe $\mathfrak{G}_m$ der Ebene ξ, ζ, und zwar lässt diese Gruppe $\mathfrak{G}_m$ eine Schaar von ∞^3 Curven der Ebene ξ, ζ invariant. Da nun die Gruppe G_m nach S. 126 mindestens sechs Parameter enthält, so haben wir folgendermassen zu verfahren:

Wir bestimmen zunächst alle Berührungstransformationsgruppen der Ebene, die mindestens sechs Parameter haben und die wenigstens eine Schaar von ∞^3 Curven dieser Ebene invariant lassen. Ist $\mathfrak{G}$ eine der betreffenden Gruppen und ist:

$$\Phi(\xi, \zeta; x, y, z) = 0 \tag{8}$$

mit den drei Parametern x, y, z eine bei $\mathfrak{G}$ invariante Schaar von ∞^3 Curven, so stellen wir die Bedingung:

$$\Psi(x, y, z, dx, dy, dz) = 0 \tag{9}$$

dafür auf, dass zwei unendlich benachbarte Curven der Schaar (8) sich berühren. Hat die Bedingung (9) nicht die Form (3), lässt sich also Ψ nicht so wählen, dass es eine ganze homogene Function zweiten

*) Die hier auseinandergesetzte Methode kann übrigens auch benutzt werden, um alle nicht-linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$V\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

zu bestimmen, die eine endliche continuirliche Gruppe von Punkttransformationen des Raums gestatten. Jede endliche continuirliche Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene ξ, ζ, die eine gewöhnliche Differentialgleichung dritter Ordnung zwischen ξ und ζ invariant lässt, liefert eine derartige Gruppe des Raumes x, y, z und auf diese Weise findet man sie alle, wie Lie in seinem Archive (Bd. X) ausgeführt hat. Da Lie nicht allein alle Gruppen der Ebene, sondern auch alle zugehörigen invarianten Differentialgleichungen bestimmt hatte, verlangte die Durchführung dieses Gedankens nur gewisse Rechnungen. Diese wurden auf Lies Anregung von de Tannenberg in seiner These (s. Ann. de la Fac. de Toulouse 1891) durchgeführt. Es ergab sich, dass es sieben verschiedene Typen von nicht-linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung giebt, die eine Gruppe von Punkttransformationen mit mindestens vier Parametern gestatten. Herr de Tannenberg, dessen Arbeit sich durch ihre vortreffliche Redaktion auszeichnet, erhielt hierbei das schöne Resultat, dass bei geeigneter Wahl der Veränderlichen die Tangenten an die Charakteristiken der betreffenden Differentialgleichungen Liniencomplexe bilden.

Grades von dx, dy, dz wird, so führt die Curvenschaar (8) sicher zu keiner Gruppe von der verlangten Beschaffenheit. Wenn dagegen (9) die Form (3) besitzt, so bestimmen wir nach Anleitung von Abschn. I, Kap. 23 die Gruppe G, durch welche die Parameter x, y, z der Schaar (8) bei der Gruppe $\mathfrak{G}$ transformirt werden. G ist dann eine Gruppe von der verlangten Beschaffenheit, wenn es primitiv ist — das aber lässt sich leicht entscheiden.

In dieser Weise behandeln wir der Reihe nach jede Berührungstransformationsgruppe $\mathfrak{G}$ von der oben definirten Beschaffenheit und jede bei einer solchen Gruppe invariante Schaar von ∞^3 Curven; die primitiven unter den Gruppen G, die wir dadurch finden, sind dann überhaupt die einzigen primitiven Gruppen des Raumes x, y, z, die eine Gleichung von der Form (3) invariant lassen.

Die hiermit beschriebene Methode wollen wir jetzt wirklich durchführen; zuerst erledigen wir den Fall, dass die Gruppe $\mathfrak{G}$ reducibel, dann den Fall, dass sie irreducibel ist.

§ 34.

Nach Abschn. II, S. 376 lässt sich jede reducible Berührungstransformationsgruppe der Ebene $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{z}$ durch eine Berührungstransformation in eine Gruppe von Punkttransformationen dieser Ebene überführen. Nun aber haben wir auf S. 71 ff. alle Gruppen von Punkttransformationen der Ebene aufgezählt. Wir müssen daher zunächst unter diesen Gruppen alle die aufsuchen, die eine Schaar von ∞^3 Curven der Ebene invariant lassen und dabei mindestens sechs Parameter enthalten.

Die allgemeine projective Gruppe der Ebene $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{z}$ lässt keine Schaar von ∞^3 Curven invariant, denn jede Curve einer solchen Schaar müsste ∞^5 Collineationen gestatten und daher (s. S. 88, Satz 2) eine Gerade sein, gerade Linien giebt es aber überhaupt nur ∞^2.

Auch die allgemeine lineare Gruppe:

$$\mathfrak{p},\ \mathfrak{r},\ \mathfrak{x}\mathfrak{p},\ \mathfrak{z}\mathfrak{p},\ \mathfrak{x}\mathfrak{r},\ \mathfrak{z}\mathfrak{r}$$

der Ebene $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{z}$ lässt keine Schaar von ∞^3 Curven invariant. Jede Curve einer solchen Schaar müsste nämlich ∞^3 Collineationen gestatten, bei denen zu gleicher Zeit die unendlich ferne Gerade invariant bliebe, die Schaar könnte daher sicher nicht aus Kegelschnitten, sondern nur aus Geraden bestehen und das ist, wie eben gezeigt wurde, ausgeschlossen.

In derselben Weise ergiebt sich, dass auch die Gruppe:

$$\mathfrak{p},\ \mathfrak{r},\ \mathfrak{x}\mathfrak{p},\ \mathfrak{x}\mathfrak{r},\ \mathfrak{z}\mathfrak{r},\ \mathfrak{x}^2\mathfrak{p} + \mathfrak{x}\mathfrak{z}\mathfrak{r}$$

keine Schaar von ∞^3 Curven invariant lässt, diese Gruppe besteht ja aus allen Collineationen, bei denen der unendlich ferne Punkt der $\mathfrak{x}$-Axe in Ruhe bleibt.

Schliesslich ist noch zu bemerken, dass eine Schaar von ∞^3 Curven der Ebene $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{z}$ niemals vier unabhängige infinitesimale Transformationen von der Form:

$$\Phi_1(\mathfrak{x})\mathfrak{r},\quad \Phi_2(\mathfrak{x})\mathfrak{r},\quad \Phi_3(\mathfrak{x})\mathfrak{r},\quad \Phi_4(\mathfrak{x})\mathfrak{r}$$

gestatten kann. Enthält nämlich eine Curvenschaar, die bei diesen vier infinitesimalen Transformationen invariant bleibt, die Curve: $\mathfrak{z} = f(\mathfrak{x})$, so enthält sie zugleich die ∞^4 Curven:

$$\mathfrak{z} = f(\mathfrak{x}) + a_1\Phi_1(\mathfrak{x}) + a_2\Phi_2(\mathfrak{x}) + a_3\Phi_3(\mathfrak{x}) + a_4\Phi_4(\mathfrak{x}),$$

wo die a willkürliche Constanten bezeichnen.

Unter den auf S. 71 ff. aufgezählten Gruppen bleiben jetzt nur noch vier übrig, die mehr als fünf Parameter enthalten, es sind dies die folgenden:

(A) $\mathfrak{r},\ \mathfrak{x}\mathfrak{r},\ \mathfrak{x}^2\mathfrak{r},\ \mathfrak{z}\mathfrak{r},\ \mathfrak{p},\ \mathfrak{x}\mathfrak{p}$

(B) $\mathfrak{r},\ \mathfrak{x}\mathfrak{r},\ \mathfrak{x}^2\mathfrak{r},\ \mathfrak{p},\ \mathfrak{x}\mathfrak{p} + \mathfrak{z}\mathfrak{r},\ \mathfrak{x}^2\mathfrak{p} + 2\mathfrak{x}\mathfrak{z}\mathfrak{r}$

(C) $\mathfrak{r},\ \mathfrak{x}\mathfrak{r},\ \mathfrak{x}^2\mathfrak{r},\ \mathfrak{p},\ \mathfrak{x}\mathfrak{p},\ \mathfrak{z}\mathfrak{r},\ \mathfrak{x}^2\mathfrak{p} + 2\mathfrak{x}\mathfrak{z}\mathfrak{r}$

(D) $\mathfrak{r},\ \mathfrak{z}\mathfrak{r},\ \mathfrak{z}^2\mathfrak{r},\ \mathfrak{p},\ \mathfrak{x}\mathfrak{p},\ \mathfrak{x}^2\mathfrak{p}.$

Wir suchen zunächst alle Schaaren von ∞^3 Curven, die bei einer der drei ersten Gruppen invariant bleiben.

Es sei $\mathfrak{z} = f(\mathfrak{x})$ irgend eine bestimmte Curve, die einer solchen invarianten Schaar angehört, dann gehören der Schaar nothwendig auch alle Curven an, die man aus: $\mathfrak{z} = f(\mathfrak{x})$ durch Ausführung der eingliedrigen Gruppen: $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{x}\mathfrak{r}$, $\mathfrak{x}^2\mathfrak{r}$ erhält, die betreffende Schaar hat daher die Form:

$$\mathfrak{z} = f(\mathfrak{x}) + a + b\mathfrak{x} + c\mathfrak{x}^2, \tag{10}$$

wo a, b, c willkürliche Parameter sind, die natürlich in der Function $f(\mathfrak{x})$ nicht vorkommen. Nun muss unsre Schaar auch noch die infinitesimale Transformation $\mathfrak{p}$ gestatten, es muss also mit der Curve (10) stets auch die unendlich benachbarte Curve:

$$\mathfrak{z} = f(\mathfrak{x}) + a + b\mathfrak{x} + c\mathfrak{x}^2 + \delta t\{f'(\mathfrak{x}) + b + 2c\mathfrak{x}\}$$

der Schaar angehören. Demnach ist:

$$f'(\mathfrak{x}) = \mu + 2\nu\mathfrak{x} + 3\varrho\mathfrak{x}^2$$

und:

$$f(\mathfrak{x}) = \lambda + \mu\mathfrak{x} + \nu\mathfrak{x}^2 + \varrho\mathfrak{x}^3,$$

wo λ, μ, ν, ϱ Constanten sind, die von den Parametern a, b, c nicht abhängen. Hieraus folgt, dass jede Schaar von ∞^3 Curven, die bei einer der Gruppen (A), (B), (C) invariant bleibt, die Form:

(11) $$\mathfrak{z} = a + b\mathfrak{x} + c\mathfrak{x}^2 + \varrho\mathfrak{x}^3$$

besitzt, unter ϱ eine bestimmte Zahl verstanden.

Um die möglichen Werthe der Zahl ϱ zu bestimmen, gehen wir davon aus, dass jede der drei Gruppen: A, B, C die infinitesimale Transformation: $\mathfrak{x}\mathfrak{p} + \mathfrak{z}\mathfrak{r}$ enthält, dass also die Schaar (11) auch die eingliedrige Gruppe: $\mathfrak{x}\mathfrak{p} + \mathfrak{z}\mathfrak{r}$ gestatten muss. Nun geht die Schaar der ∞^3 Curven (11) bei Ausführung dieser eingliedrigen Gruppe über in:

$$\mathfrak{z} = \frac{a}{t} + b\mathfrak{x} + ct \cdot \mathfrak{x}^2 + \varrho t^2 \cdot \mathfrak{x}^3,$$

sie bleibt also nur dann invariant, wenn die Gleichung:

$$\varrho t^2 = \varrho$$

für jeden Werth von t besteht, das heisst, wenn ϱ verschwindet.

Hiermit ist bewiesen, dass die Schaar:

(12) $$\mathfrak{z} = x + 2y\mathfrak{x} + z\mathfrak{x}^2$$

mit den drei Parametern x, y, z die einzige Schaar von ∞^3 Curven ist, die möglicherweise bei einer der drei Gruppen A, B, C invariant bleibt. Man überzeugt sich schliesslich leicht, dass diese Schaar sogar bei jeder einzelnen der Gruppen A, B, C invariant bleibt.

Die Bedingung für die Berührung zweier unendlich benachbarter Curven der Schaar (12) hat die Form (3), sie lautet nämlich:

(13) $$dy^2 - dx\,dz = 0.$$

Nach den Auseinandersetzungen auf S. 129 brauchen wir daher jetzt nur noch die Gruppen aufzustellen, durch welche die Parameter x, y, z der Schaar (12) bei den Gruppen A, B, C transformirt werden, und dann zu untersuchen, ob diese Gruppen in x, y, z primitiv sind oder nicht.

Zur Aufstellung der bezeichneten Gruppen stützen wir uns auf die Entwicklungen des Kapitels 23 in Abschnitt I. Ist nämlich:

$$\mathfrak{X}f = \mathfrak{a}(\mathfrak{x}, \mathfrak{z})\mathfrak{p} + \mathfrak{c}(\mathfrak{x}, \mathfrak{z})\mathfrak{r}$$

eine infinitesimale Transformation in $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{z}$, bei der die Schaar (12) invariant bleibt, so transformirt $\mathfrak{X}f$ die Parameter x, y, z durch eine infinitesimale Transformation:

$$Xf = \xi(x, y, z)\,p + \eta(x, y, z)\,q + \zeta(x, y, z)\,r.$$

Man findet dieses Xf, wenn man ξ, η, ζ derart als Functionen von x, y, z allein bestimmt, dass die Gleichung (12) in den fünf Veränderlichen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{z}$, x, y, z die infinitesimale Transformation:

$$\mathfrak{X}f + Xf$$

gestattet. Insbesondere ergiebt sich, dass bei den infinitesimalen Transformationen:

$$\mathfrak{r},\ \mathfrak{x}\mathfrak{r},\ \mathfrak{x}^2\mathfrak{r},\ \mathfrak{z}\mathfrak{r},\ \mathfrak{p},\ \mathfrak{x}\mathfrak{p},\ \mathfrak{x}^2\mathfrak{p}+2\mathfrak{x}\mathfrak{z}\mathfrak{r}$$

die Parameter x, y, z der Reihe nach durch die folgenden infinitesimalen Transformationen transformirt werden:

$$p,\ \tfrac{1}{2}q,\ r,\ xp+yq+zr,\ -(2yp+zq),\ -(yq+2zr),\ xq+2yr.$$

Wir können daher jetzt sofort für die drei Gruppen A, B, C die zugehörigen Gruppen: A′, B′, C′ angeben, durch welche die Parameter x, y, z der Schaar (12) transformirt werden.

Die Gruppe A′ brauchen wir gar nicht erst hinzuschreiben. Da nämlich $\mathfrak{r}$ eine eingliedrige invariante Untergruppe von A ist, so ist p eine eingliedrige invariante Untergruppe von A′. Die Gruppe A′ lässt demnach die lineare partielle Differentialgleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0$$

invariant und ist in Folge dessen sicher imprimitiv.

Die Gruppen B′ und C′ lauten wie folgt:

(B′) $$p,\ q,\ r,\ 2yp+zq,\ xp-zr,\ xq+2yr$$

(C′) $$p,\ q,\ r,\ 2yp+zq,\ xp-zr,\ xq+2yr,\ xp+yq+zr,$$

sie lassen natürlich beide die Gleichung (13) invariant. Hält man einen Punkt von allgemeiner Lage fest, so werden bei beiden Gruppen die ∞^2 Richtungen $dx:dy:dz$ durch diesen Punkt durch die allgemeinste projective Gruppe transformirt, die den Kegel zweiten Grades: $dy^2-dx\,dz=0$ invariant lässt, also sind beide Gruppen primitiv.

Führen wir $\frac{x-z}{2}$ als neues x und $\frac{x+z}{2i}$ als neues z ein, so verwandelt sich die Gleichung (13) in:

(14) $$dx^2+dy^2+dz^2=0,$$

und gleichzeitig gehen die Gruppen B′ und C′ über in:

[5] $$\boxed{p,\ q,\ r,\ yp-xq,\ zq-yr,\ xr-zp}$$

[6] $$\boxed{p,\ q,\ r,\ yp-xq,\ zq-yr,\ xr-zp,\ xp+yq+zr}.$$

Diese neuen Gruppen lassen beide die Gleichung (14) invariant; die erste von ihnen ist augenscheinlich die Gruppe aller Bewegungen des Euklidischen Raumes, die zweite besteht aus allen Euklidischen Bewegungen und Aehnlichkeitstransformationen.

Wir kommen jetzt zu der Gruppe:

(D) $$\mathfrak{r},\ \mathfrak{z}\mathfrak{r},\ \mathfrak{z}^2\mathfrak{r},\ \mathfrak{p},\ \mathfrak{x}\mathfrak{p},\ \mathfrak{x}^2\mathfrak{p}$$

und suchen zunächst wieder alle bei ihr invarianten Schaaren von ∞^3 Curven.

Ist: $\mathfrak{z} = f(\mathfrak{x})$ eine Curve, die einer solchen Schaar angehört, so enthält diese Schaar zugleich alle Curven, die aus: $\mathfrak{z} = f(\mathfrak{x})$ durch die Transformationen der dreigliedrigen Gruppe: $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{z}\mathfrak{r}$, $\mathfrak{z}^2\mathfrak{r}$ hervorgehen, die Schaar besteht also aus den ∞^3 Curven:

$$\mathfrak{z} = \frac{af(\mathfrak{x}) + b}{f(\mathfrak{x}) + c}. \tag{15}$$

Wir differentiiren diese Gleichung dreimal nach $\mathfrak{x}$:

$$\mathfrak{z}' = \frac{ac - b}{\{f(\mathfrak{x}) + c\}^2} f'(\mathfrak{x}), \quad \mathfrak{z}'' = -\frac{2(ac - b)}{\{f(\mathfrak{x}) + c\}^3} \{f'(\mathfrak{x})\}^2 + \frac{ac - b}{\{f(\mathfrak{x}) + c\}^2} f''(\mathfrak{x})$$

$$\mathfrak{z}''' = \frac{6(ac - b)}{\{f(\mathfrak{x}) + c\}^4} \{f'(\mathfrak{x})\}^3 - \frac{6(ac - b)}{\{f(\mathfrak{x}) + c\}^3} f'(\mathfrak{x}) f''(\mathfrak{x}) + \frac{ac - b}{\{f(\mathfrak{x}) + c\}^2} f'''(\mathfrak{x})$$

und erhalten durch Fortschaffung von a, b, c eine Differentialgleichung dritter Ordnung von der Lagrange-Schwarzschen Form:

$$\frac{\mathfrak{z}'\mathfrak{z}''' - \frac{3}{2}\mathfrak{z}''^2}{\mathfrak{z}'^2} - F(\mathfrak{x}) = 0. \tag{16}$$

Da (16) die Curven der Schaar (15) zu Integralcurven hat, so gestattet es die infinitesimalen Transformationen: $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{z}\mathfrak{r}$, $\mathfrak{z}^2\mathfrak{r}$, und es bleibt in Folge dessen nur noch übrig die Function $F(\mathfrak{x})$ in allgemeinster Weise so zu bestimmen, dass (16) auch die infinitesimalen Transformationen: $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{x}\mathfrak{p}$, $\mathfrak{x}^2\mathfrak{p}$ zulässt.

Soll die Differentialgleichung (16) die infinitesimale Transformation $\mathfrak{p}$ gestatten, so muss nothwendig $F'(\mathfrak{x}) = 0$, also $F(\mathfrak{x}) = \text{const.} = \mathsf{A}$ sein. Soll sie ausserdem auch noch $\mathfrak{x}\mathfrak{p}$ gestatten, so muss die Gleichung:

$$\mathfrak{z}'\mathfrak{z}''' - \tfrac{3}{2}\mathfrak{z}''^2 - \mathsf{A}\mathfrak{z}'^2 = 0 \tag{17}$$

in den Veränderlichen $\mathfrak{x}, \mathfrak{z}, \mathfrak{z}', \mathfrak{z}'', \mathfrak{z}'''$ die infinitesimale Transformation:

$$Uf = \mathfrak{x}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} - \mathfrak{z}'\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}'} - 2\mathfrak{z}''\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}''} - 3\mathfrak{z}'''\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}'''}$$

gestatten, die aus $\mathfrak{x}\mathfrak{p}$ durch Erweiterung entsteht (s. Abschn. I, § 132, S. 549 f.). Hierzu ist nothwendig und hinreichend, dass der Ausdruck:

$$U(\mathfrak{z}'\mathfrak{z}''' - \tfrac{3}{2}\mathfrak{z}''^2 - \mathsf{A}\mathfrak{z}'^2) = -\mathfrak{z}'\mathfrak{z}''' + 2\mathsf{A}\mathfrak{z}'^2 + 6\mathfrak{z}''^2 - 3\mathfrak{z}'\mathfrak{z}'''$$

vermöge (17) verschwindet, es muss also A gleich Null sein. Endlich haben wir noch zu untersuchen, ob die Gleichung:

$$\mathfrak{z}'\mathfrak{z}''' - \tfrac{3}{2}\mathfrak{z}''^2 = 0 \tag{18}$$

die infinitesimale Transformation $\mathfrak{x}^2\mathfrak{p}$ gestattet. Wir finden, dass sie es wirklich thut, denn aus $\mathfrak{x}^2\mathfrak{p}$ ergiebt sich durch Erweiterung die Transformation:

$$Vf = \mathfrak{x}^2 \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} - 2\mathfrak{x}\mathfrak{z}' \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}'} - (4\mathfrak{x}\mathfrak{z}'' + 2\mathfrak{z}') \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}''} - (6\mathfrak{x}\mathfrak{z}''' + 6\mathfrak{z}'') \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}'''}$$

und der Ausdruck:

$$V(\mathfrak{z}'\mathfrak{z}''' - \tfrac{3}{2}\mathfrak{z}''^2) = -2\mathfrak{x}\mathfrak{z}'\mathfrak{z}''' + 12\mathfrak{x}\mathfrak{z}''^2 + 6\mathfrak{z}'\mathfrak{z}'' - 6\mathfrak{x}\mathfrak{z}'\mathfrak{z}''' - 6\mathfrak{z}'\mathfrak{z}''$$

verschwindet vermöge (18).

Damit ist bewiesen*), dass (18) die einzige Differentialgleichung dritter Ordnung ist, die bei der Gruppe D invariant bleibt; die ∞^3 Integralcurven:

$$\mathfrak{z} = \frac{a\mathfrak{x} + b}{\mathfrak{x} + c} \tag{19}$$

von (18) bilden daher die einzige bei der Gruppe D invariante Schaar von ∞^3 Curven.

Wir schreiben die Curvenschaar (19) folgendermassen:

$$\mathfrak{x}\mathfrak{z} + x\mathfrak{x} + y\mathfrak{z} + z = 0, \tag{20}$$

indem wir wie früher die drei Parameter der Schaar x, y, z nennen. Die Bedingung dafür, dass sich zwei unendlich benachbarte Curven unsrer Schaar berühren, erscheint dann in der Gestalt:

$$dz^2 + y^2dx^2 + x^2dy^2 + (4z - 2xy)\,dx\,dy - 2x\,dy\,dz - 2y\,dz\,dx = 0, \tag{21}$$

sie hat also die Form (3) und ihre Determinante:

$$\begin{vmatrix} y^2 & 2z - xy & -y \\ 2z - xy & x^2 & -x \\ -y & -x & 1 \end{vmatrix} = -4(z - xy)^2$$

verschwindet auch nicht identisch. Nunmehr suchen wir die Gruppe D′, durch welche die Parameter x, y, z der Schaar (20) bei der Gruppe D transformirt werden, und finden in der auf S. 131 angegebenen Weise, dass D′ die Form hat:

[7] $$\begin{array}{|l|} \hline q + xr,\ yq + zr,\ (xy - z)\,p + y^2q + yzr \\ p + yr,\ xp + zr,\ x^2p + (xy - z)\,q + xzr \\ \hline \end{array}\ .$$

Diese Gruppe lässt natürlich die Gleichung (21) invariant, ausserdem lässt sie auch noch die Fläche zweiten Grades: $z - xy = 0$ invariant, ja sie ist sogar die grösste projective Gruppe des Raumes x, y, z, bei der diese Fläche in sich übergeht. Hieraus folgt unmittelbar, dass

*) Die Theorie der Differentialinvarianten (s. Abschn. I, Kap. 25) führt in einfacherer Weise zur Bestimmung aller Differentialgleichungen, die bei einer vorgelegten Gruppe von Punkttransformationen der Ebene $\mathfrak{x}, \mathfrak{z}$ invariant bleiben. Später soll das auch näher ausgeführt werden, hier wollten wir aber von der Theorie der Differentialinvarianten noch keinen Gebrauch machen.

die Gruppe [7] primitiv ist; man kann dies jedoch auch dadurch einsehen, dass man untersucht, wie die Richtungen durch einen festgehaltenen Punkt von allgemeiner Lage transformirt werden; ein Punkt von allgemeiner Lage ist dabei jeder Punkt, der nicht auf der Fläche: $z - xy = 0$ liegt.

Der Fall, dass die auf S. 128 f. mit $\mathfrak{G}$ bezeichnete Gruppe reducibel ist, wäre hiermit erledigt, von jetzt ab wollen wir daher vorvoraussetzen, dass $\mathfrak{G}$ irreducibel ist.

§ 35.

Nach Abschn. II, Theor. 69, S. 433 ist jede irreducible Berührungstransformationsgruppe der Ebene ξ, ζ entweder sechs-, oder sieben- oder zehngliedrig und kann stets durch eine geeignete Berührungstransformation auf eine der drei Formen:

$$\text{(E)} \qquad \mathfrak{p},\ \mathfrak{q} + \xi\mathfrak{r},\ \mathfrak{r},\ \xi\mathfrak{q} + \tfrac{1}{2}\xi^2\mathfrak{r},\ \xi\mathfrak{p} - \eta\mathfrak{q},\ \eta\mathfrak{p} + \tfrac{1}{2}\eta^2\mathfrak{r}$$

$$\text{(F)} \qquad \mathfrak{p},\ \mathfrak{q} + \xi\mathfrak{r},\ \mathfrak{r},\ \xi\mathfrak{q} + \tfrac{1}{2}\xi^2\mathfrak{r},\ \xi\mathfrak{p} - \eta\mathfrak{q},\ \eta\mathfrak{p} + \tfrac{1}{2}\eta^2\mathfrak{r},\ \xi\mathfrak{p} + \eta\mathfrak{q} + 2\zeta\mathfrak{r}$$

$$\text{(H)} \qquad \left\{\begin{array}{c} \mathfrak{p},\ \mathfrak{q} + \xi\mathfrak{r},\ \mathfrak{r},\ \xi\mathfrak{q} + \tfrac{1}{2}\xi^2\mathfrak{r},\ \xi\mathfrak{p} - \eta\mathfrak{q},\ \eta\mathfrak{p} + \tfrac{1}{2}\eta^2\mathfrak{r} \\ \xi\mathfrak{p} + \eta\mathfrak{q} + 2\zeta\mathfrak{r},\ (\zeta - \xi\eta)\mathfrak{p} - \tfrac{1}{2}\eta^2\mathfrak{q} - \tfrac{1}{2}\xi\eta^2\mathfrak{r},\ \tfrac{1}{2}\xi^2\mathfrak{p} + \zeta\mathfrak{q} + \xi\zeta\mathfrak{r} \\ (\xi\zeta - \tfrac{1}{2}\xi^2\eta)\mathfrak{p} + (\eta\zeta - \tfrac{1}{2}\xi\eta^2)\mathfrak{q} + (\zeta^2 - \tfrac{1}{4}\xi^2\eta^2)\mathfrak{r} \end{array}\right.$$

gebracht werden; dabei sind ξ, η, ζ die Coordinaten der Linienelemente in der Ebene ξ, ζ.

Wir wissen ferner (a. a. O. Theor. 71, S. 439), dass jede irreducible Berührungstransformationsgruppe der Ebene ξ, ζ nur eine Schaar von ∞^3 Curven invariant lässt und dass diese Schaar für die Gruppen E, F, H die uns schon geläufige Form:

$$\text{(22)} \qquad \zeta = x + 2y\xi + z\xi^2$$

besitzt. Wir müssen daher jetzt die Gruppen E′, F′ und H′ aufstellen, durch welche die Parameter x, y, z der Schaar (22) bei den Gruppen E, F, H transformirt werden und müssen untersuchen, ob E′, F′, H′ primitiv sind oder nicht.

Die Gruppen E′ und F′ brauchen wir gar nicht aufzustellen, denn wir können schon so einsehen, dass sie imprimitiv sind. In der That, die Gruppen E und F enthalten beide eine eingliedrige invariante Untergruppe, nämlich $\mathfrak{r}$, hieraus aber ergiebt sich wie auf S. 132, dass die Gruppen E′ und F′ in den Veränderlichen x, y, z beide die lineare partielle Differentialgleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

invariant lassen, dass sie also wirklich beide imprimitiv sind.

Um die Gruppe H′ zu finden bemerken wir zunächst, dass unter den infinitesimalen Transformationen von H die folgenden sechs:

(23) $\mathfrak{r},\ \mathfrak{q}+\mathfrak{x}\mathfrak{r},\ \mathfrak{x}\mathfrak{q}+\frac{1}{2}\mathfrak{x}^2\mathfrak{r},\ \mathfrak{p},\ \mathfrak{x}\mathfrak{p}-\mathfrak{y}\mathfrak{q},\ \mathfrak{x}\mathfrak{p}+\mathfrak{y}\mathfrak{q}+2\mathfrak{z}\mathfrak{r}$

aus den infinitesimalen Punkttransformationen:

$$\mathfrak{r},\ \mathfrak{x}\mathfrak{r},\ \tfrac{1}{2}\mathfrak{x}^2\mathfrak{r},\ \mathfrak{p},\ \mathfrak{x}\mathfrak{p},\ \mathfrak{x}\mathfrak{p}+2\mathfrak{z}\mathfrak{r}$$

der Ebene $\mathfrak{x}, \mathfrak{z}$ durch Erweiterung entstanden sind. Auf Grund von S. 131 f. können wir daher unmittelbar die infinitesimalen Transformationen angeben, durch welche die Parameter x, y, z der Schaar (22) bei den Transformationen (23) transformirt werden, sie lauten:

(24) $p,\ \frac{1}{2}q,\ \frac{1}{2}r,\ -(2yp+zq),\ -(yq+2zr),\ 2xp+yq.$

Es sei andrerseits:

$$\mathfrak{X}f=\mathfrak{a}(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z})\mathfrak{p}+\mathfrak{b}(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z})\mathfrak{q}+\mathfrak{c}(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z})\mathfrak{r}$$

eine der Gruppe H angehörige wirkliche infinitesimale Berührungstransformation, die nicht durch Erweiterung einer infinitesimalen Punkttransformation der Ebene $\mathfrak{x}, \mathfrak{z}$ entstanden ist. Um die infinitesimale Transformation:

$$Xf=\xi(x,y,z)p+\eta(x,y,z)q+\zeta(x,y,z)r$$

zu finden, durch welche die Parameter der Schaar (22) bei $\mathfrak{X}f$ transformirt werden, schreiben wir die Curvenschaar (22) als eine Schaar von ∞^3 Element-M_1 der Ebene $\mathfrak{x}, \mathfrak{z}$, also wie folgt (s. Abschn. II, S. 12 ff.):

(25) $$\begin{cases}\mathfrak{z}=x+2y\mathfrak{x}+z\mathfrak{x}^2\\ \mathfrak{y}=\quad 2y+2z\mathfrak{x};\end{cases}$$

sodann bestimmen wir ξ, η, ζ derart als Functionen von x, y, z allein, dass das Gleichungensystem (25) in den sechs Veränderlichen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$, x, y, z die infinitesimale Transformation:

$$\mathfrak{X}f+Xf$$

gestattet.

Wählen wir zum Beispiel: $\mathfrak{X}f=\mathfrak{y}\mathfrak{p}+\frac{1}{2}\mathfrak{y}^2\mathfrak{r}$, so müssen ξ, η, ζ solche Functionen von x, y, z allein werden, dass die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\mathfrak{y}^2&=2y\mathfrak{y}+2z\mathfrak{x}\mathfrak{y}+\xi+2\eta\mathfrak{x}+\zeta\mathfrak{x}^2\\ 0&=2z\mathfrak{y}+2\eta+2\zeta\mathfrak{x}\end{aligned}$$

vermöge (25) zu Identitäten werden, es ergiebt sich also:

$$Xf=-2(y^2p+yzq+z^2r).$$

In derselben Weise finden wir, wenn

$$\mathfrak{X}f=\tfrac{1}{2}\mathfrak{x}^2\mathfrak{p}+\mathfrak{z}\mathfrak{q}+\mathfrak{x}\mathfrak{z}\mathfrak{r}$$

gewählt wird:

$$Xf=\tfrac{1}{2}(xq+2yr).$$

Die zwei noch fehlenden infinitesimalen Transformationen von H′ brauchen wir nicht in dieser Weise zu berechnen, denn wir können sie aus den schon bekannten Transformationen durch Klammeroperation erhalten, ebenso wie wir in Abschn. II auf S. 432 die beiden letzten infinitesimalen Transformationen der Gruppe H fanden.

Schliesslich erkennen wir, dass die Gruppe H′ die folgende Form hat:

$$(\mathrm{H}') \quad \left\{ \begin{array}{c} p,\ q,\ r,\ 2yp + zq,\ xp - zr,\ xq + 2yr,\ xp + yq + zr, \\ x^2p + xyq + y^2r,\ y^2p + yzq + z^2r \\ 2xyp + (y^2 + xz)q + 2yzr; \end{array} \right.$$

dass sie primitiv ist, folgt schon daraus, dass sie die beiden primitiven Gruppen (B′) und (C′) als Untergruppen enthält.

Die Gruppe H′ lässt natürlich die bekannte Gleichung:

$$dy^2 - dx\,dz = 0 \tag{13}$$

invariant. Führen wir daher wie auf S. 132 $\frac{x-z}{2}$ als neues x und $\frac{x+z}{2i}$ als neues z ein, so erhalten wir aus H′ eine neue zehngliedrige Gruppe, bei der die Gleichung:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0 \tag{14}$$

invariant bleibt. Diese neue Gruppe lautet:

$$[8] \quad \left| \begin{array}{c} p,\ q,\ r,\ xq - yp,\ yr - zq,\ zp - xr,\ U \\ 2xU - Sp,\ 2yU - Sq,\ 2zU - Sr \\ U = xp + yq + zr,\ S = x^2 + y^2 + z^2 \end{array} \right|$$

sie besteht aus allen Euklidischen Bewegungen, allen Aehnlichkeitstransformationen und endlich aus allen Transformationen durch reciproke Radien oder, was auf dasselbe hinauskommt*), sie besteht aus allen conformen Punkttransformationen des Raumes x, y, z, wir nennen sie deshalb die *conforme Gruppe* dieses Raumes.

Uebrigens hätten wir auch unmittelbar zu der Gruppe [8] kommen können, ohne vorher die Gruppe H′ aufzustellen; ein Verfahren hierzu haben wir bereits in Abschnitt II auf S. 458 ff. auseinandergesetzt.

Wir haben die Gruppe H im Vorhergehenden als eine Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene ξ, ζ aufgefasst und sind zu der Gruppe H′ dadurch gelangt, dass wir untersuchten, in welcher Weise H die ∞^3 Curven der invarianten Schaar (22) unter einander vertauscht. Wir

*) Liouville hat zuerst gezeigt, dass sich die allgemeinste conforme Transformation des Raumes x, y, z aus den genannten Transformationen zusammensetzen lässt.

können aber H auch als eine Gruppe von Punkttransformationen des Raumes $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ deuten. Legen wir diese Deutung zu Grunde, so stellt das Gleichungensystem (25) eine Schaar von ∞^3 Curven des Raumes $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ dar, die bei der Gruppe H invariant bleibt; von der Gruppe H gelangen wir zu H′, indem wir die ∞^3 Curven des Raumes $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ als Punkte in einem neuen dreifach ausgedehnten Raume x, y, z einführen. Hieraus ergiebt sich, dass die beiden Gruppen H und H′ durch eine Berührungstransformation zwischen den beiden Räumen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ und x, y, z mit einander ähnlich sind und zwar durch die Berührungstransformation, die von dem Gleichungensysteme:

$$(25) \qquad \begin{cases} \mathfrak{z} = x + 2y\mathfrak{x} + z\mathfrak{x}^2 \\ \mathfrak{y} = \quad 2y \quad + 2z\mathfrak{x} \end{cases}$$

definirt wird (s. Abschn. II, S. 52 f.).

Nun geht die Gruppe H bei Einführung der neuen Veränderlichen:

$$\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}, \quad \mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{x}\mathfrak{y}, \quad \mathfrak{y}_1 = \tfrac{1}{2}\mathfrak{y}$$

über in die zehngliedrige projective Gruppe des linearen Complexes:

$$(26) \qquad d\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{x}_1 d\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{y}_1 d\mathfrak{x}_1 = 0$$

(a. a. O. S. 445 f.). Andrerseits verwandelt sich, wie wir vorhin gesehen haben, die Gruppe H′ bei Einführung der neuen Veränderlichen:

$$x_1 = \frac{x - z}{2}, \quad y_1 = y, \quad z_1 = \frac{x + z}{2i}$$

in die conforme Gruppe des Raumes x_1, y_1, z_1. Hieraus ergiebt sich, dass die Gruppe [4] des linearen Complexes und die conforme Gruppe [8] ebenfalls durch eine Berührungstransformation des dreifach ausgedehnten Raumes mit einander ähnlich sind. Diese Berührungstransformation ist durch das Gleichungensystem:

$$(27) \qquad \begin{cases} \mathfrak{z}_1 = x_1 + iz_1 + y_1\mathfrak{x}_1 \\ \mathfrak{y}_1 = y_1 - (x_1 - iz_1)\mathfrak{x}_1 \end{cases}$$

definirt, wo $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{z}_1$ der Raum des linearen Complexes, x_1, y_1, z_1 der Raum der conformen Gruppe ist; sie verwandelt die Punkte des Raumes $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{z}_1$ in die Geraden des Raumes x_1, y_1, z_1, welche den Kugelkreis treffen, umgekehrt verwandelt sie die Complexgeraden des Raumes $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{z}_1$ in die Punkte des Raumes x_1, y_1, z_1. Besonders wichtig ist aber diese Berührungstransformation dadurch, dass sie die Geraden des Raumes $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{z}_1$ in die Kugeln des Raumes x_1, y_1, z_1 überführt und auf diese Weise die Plückersche Liniengeometrie in eine Kugelgeometrie verwandelt*).

---

*) Die im Text erwähnte Berührungstransformation entdeckte Lie im Jahre 1870 und begründete auf dieselbe eine Kugelgeometrie und einen merkwürdigen Zusammenhang zwischen Linien- und Kugelgeometrie, sowie zwischen projectiver und metrischer Geometrie. Da einige Verfasser diese wichtigen Entdeckungen als Ausführungen von Ideen des Herrn Noether darstellen, soll hier der factische Zusammenhang angegeben werden. Im Anfange des Jahres 1869 veröffentlichte Lie in den Verh. d. G. d. W. zu Christiania eine Darstellung des Imaginären in

§ 36.

Wir kennen nunmehr alle primitiven Gruppen des dreifach ausgedehnten Raumes und dürfen daher das folgende Theorem aussprechen:

Theorem 9. *Ist eine endliche continuirliche Gruppe des dreifach ausgedehnten Raumes primitiv, so ist sie durch eine Punkttransformation dieses Raumes mit einer von acht gewissen Gruppen ähnlich; diese acht Gruppen sind:*

1) *die fünfzehngliedrige allgemeine projective Gruppe des dreifach ausgedehnten Raumes* ([1] auf S. 124);

2) *die zwölfgliedrige allgemeine lineare Gruppe dieses Raumes* ([2] auf S. 124);

3) *die elfgliedrige specielle lineare Gruppe* ([3] auf S. 124);

4) *die zehngliedrige projective Gruppe eines nicht ausgearteten linearen Complexes* ([4] auf S. 125);

5) *die sechsgliedrige projective Gruppe einer nicht ausgearteten Fläche zweiten Grades oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Gruppe aller Bewegungen des nicht-euklidischen Raumes* ([7] auf S. 134);

6) *die sechsgliedrige Gruppe aller Euklidischen Bewegungen* ([5] auf S. 132);

---

der ebenen Geometrie. Die Anwendung derselben auf die Dualität führte ihn zu der Abbildung gewisser Liniencomplexe auf den Punktraum. In einer im Herbst 1869 erschienenen Fortsetzung beschäftigte sich Lie u. a. eingehend mit derjenigen Abbildung, welche der symmetrischen Dualität (d. h. Theorie der reciproken Polaren) entsprach. In einer damals angekündigten Fortsetzung wollte er die Abbildungen untersuchen, welche der nicht symmetrischen Dualität entsprechen; unter diesen Abbildungen findet sich die Abbildung des linearen Complexes auf den Punktraum, welche somit factisch von Lie im Februar, wenn auch nur implicite, veröffentlicht worden war. Herr Noether stellte später im Laufe desselben Jahres ganz beiläufig wesentlich dieselben Gleichungen zur Abbildung des linearen Complexes auf; seine Note deutet aber keine einzige Anwendung dieser Abbildung an. Das ist der Sachverhalt in historisch richtiger Darstellung (s. Math. Ann. Bd. V, S. 165 u. 166). Die hiermit in Widerspruch stehenden Angaben auf S. 251, Z. 6—15 v. o. ebd. sind falsch und während der Korrektur in Folge eines Missverständnisses hinzugefügt worden.

Zu der von Lie im Jahre 1870 begründeten Kugelgeometrie haben später Klein und besonders Darboux in den zu seiner im Jahre 1869 eingereichten Preisschrift später (1873) zugefügten Noten wichtige Beiträge geliefert. Herrn Reyes ausführliche Untersuchungen über diesen Gegenstand enthalten kaum etwas wesentlich Neues, haben jedoch zur Verbreitung dieser Theorien beigetragen. Unter den späteren Verfassern auf diesem Gebiete verdient Herr Loria besonders genannt zu werden.

7) *die siebengliedrige Gruppe aller Euklidischen Bewegungen und aller Aehnlichkeitstransformationen* ([6] auf S. 132);

8) *die zehngliedrige Gruppe aller Transformationen durch reciproke Radien* ([8] auf S. 137).

Unter den acht in diesem Theoreme aufgezählten Gruppen enthalten vier, nämlich die zweite, dritte, sechste und siebente die Gruppe:

$$p,\ q,\ r$$

aller Translationen als invariante Untergruppe. Die fünfte enthält zwei zu einander reciproke einfach transitive Gruppen als invariante Untergruppen, es sind das die beiden Gruppen:

$$q + xr,\ yq + zr,\ (xy - z)p + y^2q + yzr$$

und:

$$p + yr,\ xp + zr,\ x^2p + (xy - z)q + xzr$$

von denen die erste alle Erzeugenden: $x = a,\ z = ay$, die zweite alle Erzeugenden: $y = b,\ z = bx$ der Fläche: $z - xy = 0$ in Ruhe lässt.

Einfache Gruppen giebt es unter unsern acht nur drei, nämlich die erste (s. Abschn. I, Theor. 97, S. 560), die vierte (s. Abschn. II, Theor. 70, S. 437) und die achte, die mit der vierten durch eine Berührungstransformation des Raumes x, y, z ähnlich und daher auch mit ihr gleichzusammengesetzt ist.

Auf Grund der gewonnenen Ergebnisse gelangen wir ohne Schwierigkeit noch zu dem nachstehenden

Theorem 10. *Im dreifach ausgedehnten Raume giebt es nur dreierlei einfache Gruppen von Punkttransformationen, die mit keiner Gruppe von Punkttransformationen auf der Ebene oder auf der Geraden gleichzusammengesetzt sind. Es sind das:*

1) *die allgemeine projective Gruppe,*

2) *die zehngliedrige projective Gruppe eines linearen Complexes,*

3) *die zehngliedrige Gruppe der reciproken Radien und alle mit diesen drei durch Punkttransformationen ähnlichen Gruppen.*

Unter den genannten drei Gruppen sind die beiden letzten mit einander gleichzusammengesetzt und ausserdem durch eine Berührungstransformation des dreifach ausgedehnten Raumes ähnlich.

Kapitel 8.

Bestimmung gewisser imprimitiver Gruppen des dreifach ausgedehnten Raumes.

Im gewöhnlichen Raume x, y, z kann man im Ganzen drei Arten von imprimitiven Gruppen unterscheiden. Es sind das die folgenden:

I. Gruppen, bei denen eine Schaar von ∞^1 Flächen: $\varphi(x, y, z) = \text{const.}$ invariant bleibt, die sich nicht in eine invariante Schaar von ∞^2 Curven zerlegen lässt; es darf also bei einer derartigen Gruppe keine Curvenschaar von der Form:

$$\varphi(x, y, z) = \text{const.}, \quad \psi(x, y, z) = \text{const.}$$

invariant bleiben.

II. Gruppen, bei denen eine Schaar von ∞^2 Curven:

$$\varphi(x, y, z) = \text{const.}, \quad \psi(x, y, z) = \text{const.}$$

invariant bleibt, die sich nicht in eine invariante Schaar von ∞^1 Flächen anordnen lässt; bei einer solchen Gruppe darf keine Flächenschaar von der Form:

$$\Omega(\varphi(x, y, z), \ \psi(x, y, z)) = \text{const.}$$

invariant bleiben.

III. Gruppen, die eine Schaar von ∞^2 Curven invariant lassen und die Curven dieser Schaar imprimitiv transformiren; bei jeder solchen Gruppe bleibt also eine Curvenschaar: $\varphi = \text{const.}$, $\psi = \text{const.}$ invariant und zugleich auch mindestens eine Flächenschaar von der Form: $\Omega(\varphi, \psi) = \text{const.}$

Jede imprimitive Gruppe des Raumes x, y, z gehört nothwendig zu einer von diesen drei Arten; es kann aber auch vorkommen, dass ein und dieselbe Gruppe zu gleicher Zeit zwei verschiedenen unsrer drei Arten angehört, zum Beispiel werden wir finden, dass eine Gruppe der ersten Art unter Umständen auch zur zweiten gehören kann. Eine wirkliche Klassification der imprimitiven Gruppen des dreifach ausgedehnten Raumes ist also durch unsre Unterscheidung der drei Arten nicht gewonnen.

Wir wollen uns damit begnügen, alle Gruppen von der ersten und zweiten Art zu bestimmen. Die Aufstellung aller Gruppen der dritten Art bietet zwar keine grundsätzlichen Schwierigkeiten, erfordert aber ziemlich weitläufige Rechnungen; wir werden uns deshalb mit der Bestimmung dieser Gruppen nicht aufhalten, sondern uns auf einige allgemeine Bemerkungen über sie beschränken.

I. Gruppen, die eine Flächenschaar: $\varphi = \text{const.}$, aber keine Curvenschaar von der Form: $\varphi = \text{const.}$, $\psi = \text{const.}$ invariant lassen.

§ 37.

Wir führen vor allen Dingen die Function $\varphi(x, y, z)$ als neues z ein, unsre Aufgabe kommt dann darauf hinaus, alle Gruppen des Raumes x, y, z zu bestimmen, bei denen die Ebenenschaar: $z = \text{const.}$, dagegen keine Curvenschaar von der Form: $z = \text{const.}$, $\psi(x, y, z) = \text{const.}$ invariant bleibt.

Ist G_m eine m-gliedrige Gruppe von dieser Beschaffenheit, so wird die Veränderliche z bei G_m für sich transformirt und zwar (s. Theor. 1, S. 6) höchstens dreigliedrig; zugleich kann man z stets so wählen, dass die infinitesimalen Transformationen von G_m die Form:

$$\xi_k(x, y, z)p + \eta_k(x, y, z)q + (a_k + b_k z + c_k z^2)r \qquad (k = 1 \ldots m)$$

annehmen.

Zunächst betrachten wir die grösste in G_m enthaltene Untergruppe, bei der alle Ebenen: $z = \text{const.}$ in Ruhe bleiben. Diese Untergruppe, die nach Abschn. I, S. 307, Satz 5 in der G_m invariant ist, sei m_1-gliedrig und heisse G_{m_1}. Wir behaupten, dass auch bei der G_{m_1} keine Curvenschaar: $z = \text{const.}$, $\psi(x, y, z) = \text{const.}$ invariant bleibt. Bewiesen werden muss das natürlich nur, wenn $m > m_1$.

In der That, gäbe es eine isolirte Curvenschaar: $z = \text{const.}$, $\psi(x, y, z) = \text{const.}$, die bei der G_{m_1} invariant bliebe, so müsste diese Schaar bei jeder Transformation der G_m wieder in eine bei der G_{m_1} invariante Schaar übergehen (s. Abschn. I, S. 586, Satz 3), sie würde also, da sie isolirt ist, nothwendig auch bei der G_m invariant bleiben; die G_m wäre somit gar keine Gruppe von der verlangten Beschaffenheit.

Blieben andrerseits bei der G_{m_1} unendlich viele Curvenschaaren von der Form: $z = \text{const.}$, $\varphi(x, y, z) = \text{const.}$ invariant, so blieben gleichzeitig in jeder Ebene: $z = a$ unendlich viele Schaaren von je ∞^1 Curven invariant, es würden also (vgl. S. 59 ff.) die ∞^{m_1-2} oder ∞^{m_1-1} Transformationen der G_{m_1}, die einen Punkt x_0, y_0, z_0 von allgemeiner Lage festhalten, zugleich jede der ∞^1 in die Ebene $z = z_0$ fallenden Richtungen durch x_0, y_0, z_0 stehen lassen. Nun ist $m - m_1 \leq 3$ und die G_m ist sicher transitiv, sie enthält daher höchstens ∞^{m_1} Transformationen, die x_0, y_0, z_0 invariant lassen; diese Transformationen würden unter der gemachten Voraussetzung die ∞^1 besprochenen Richtungen durch den Punkt x_0, y_0, z_0 höchstens zweigliedrig transformiren und infolgedessen (s. S. 28) mindestens eine von diesen Richtungen in Ruhe

lassen; dann aber gäbe es eine bei der G_m invariante Curvenschaar von der Form: $z = \text{const.}$, $\psi(x, y, z) = \text{const.}$, was doch nicht sein darf.

Damit ist unsre Behauptung bewiesen, ausserdem aber eröffnet sich uns auch ein Weg, um alle Gruppen von der verlangten Beschaffenheit aufzustellen:

Wir bestimmen zuerst alle Gruppen von der verlangten Beschaffenheit, bei denen die Ebenen: $z = \text{const.}$ alle invariant bleiben oder, wie wir es ausdrücken, nullgliedrig transformirt werden. Ist G_m eine der gefundenen Gruppen, so fügen wir in allgemeinster Weise eine solche infinitesimale Transformation:

$$\xi(x, y, z)\, p + \eta(x, y, z)\, q + r$$

hinzu, dass eine $(m+1)$-gliedrige Gruppe entsteht, in der die G_m als invariante Untergruppe enthalten ist: auf diese Weise erhalten wir alle Gruppen von der verlangten Beschaffenheit, bei denen die Ebenen: $z = \text{const.}$ eingliedrig transformirt werden, u. s. w.

§ 38.

Die Ebenen: $z = \text{const.}$ werden nullgliedrig transformirt.

Jede m-gliedrige Gruppe G_m von der hier gesuchten Art hat die Form:

$$(1) \qquad \xi_k(x, y, z)\, p + \eta_k(x, y, z)\, q \qquad (k = 1 \ldots m).$$

Da sie keine Curvenschaar: $z = \text{const.}$, $\psi(x, y, z) = \text{const.}$ invariant lassen darf, so muss sie die Punkte jeder Ebene: $z = a$ von allgemeiner Lage primitiv transformiren, das heisst, die infinitesimalen Transformationen (1) müssen, wenn z als Constante betrachtet wird, eine primitive Gruppe in den beiden Veränderlichen x und y erzeugen. Nun ist nach Theorem 5, S. 35 jede primitive Gruppe in zwei Veränderlichen entweder acht- oder sechs- oder fünfgliedrig und jenachdem entweder mit der allgemeinen projectiven oder mit der allgemeinen linearen oder mit der speciellen linearen Gruppe ähnlich, folglich ergiebt sich, dass unsre G_m in den drei Veränderlichen x, y, z durch eine geeignete Transformation von der Gestalt:

$$x_1 = \alpha(x, y, z), \quad y_1 = \beta(x, y, z), \quad z_1 = z$$

entweder auf die Form:

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{c} X_k f = Z_{k1} p + Z_{k2} q + Z_{k3} xp + Z_{k4} yp + Z_{k5} xq + Z_{k6} yq + \\ + Z_{k7}(x^2 p + xyq) + Z_{k8}(xyp + y^2 q) \\ (k = 1 \ldots m) \end{array} \right.$$

oder auf die Form:

$$(B)\quad \left\{ X_k f = Z_{k1} p + Z_{k2} q + Z_{k3} xp + Z_{k4} yp + Z_{k5} xq + Z_{k6} yq \right.$$
$$(k = 1 \ldots m)$$

oder endlich auf die Form:

$$(C)\quad \left\{ X_k f = Z_{k1} p + Z_{k2} q + Z_{k3} xq + Z_{k4}(xp - yq) + Z_{k5} yp \right.$$
$$(k = 1 \ldots m)$$

gebracht werden kann. Hier ist von den neuen Veränderlichen der Index wieder fortgelassen; die Z sind Functionen von z allein und zwar dürfen im Falle (A) nicht alle achtreihigen Determinanten der Matrix:

$$(2)\qquad \left| \begin{matrix} Z_{k1} & \ldots & Z_{k8} \\ (k = 1 \ldots m) & & \end{matrix} \right|$$

verschwinden, im Falle (B) nicht alle sechsreihigen Determinanten der Matrix:

$$(3)\qquad \left| \begin{matrix} Z_{k1} & \ldots & Z_{k6} \\ (k = 1 \ldots m) & & \end{matrix} \right|$$

im Falle (C) nicht alle fünfreihigen der Matrix:

$$(4)\qquad \left| \begin{matrix} Z_{k1} & \ldots & Z_{k5} \\ (k = 1 \ldots m) & & \end{matrix} \right| .$$

Es sei G_m zunächst eine m-gliedrige Gruppe von der Form (A). Unter den Transformationen von G_m wählen wir alle die aus, bei denen alle Punkte einer bestimmten Ebene: $z = z_1$ von allgemeiner Lage invariant bleiben. Diese Transformationen bilden eine $(m-8)$-gliedrige Gruppe G_{m-8}, die bei jeder Transformation von G_m in eine Gruppe von derselben Beschaffenheit übergeht; da nun die Ebene: $z = z_1$ bei G_m invariant bleibt, so ergiebt sich, dass G_{m-8} eine invariante Untergruppe von G_m ist.

Betrachten wir jetzt irgend eine andere Ebene: $z = z_2$ von allgemeiner Lage. Die Punkte dieser Ebene werden bei der G_m durch eine achtgliedrige Gruppe g_8 transformirt, die mit der G_m isomorph ist, bei der Gruppe G_{m-8} werden sie durch eine mit G_{m-8} isomorphe Gruppe γ transformirt. Da G_{m-8} in der G_m invariant ist, so muss γ in der g_8 invariant sein; berücksichtigen wir überdies, dass die g_8 als die allgemeine projective Gruppe der Ebene: $z = z_2$ einfach ist, so erkennen wir, dass γ entweder mit der g_8 zusammenfällt oder blos aus der identischen Transformation besteht. Zugleich ergiebt sich, dass die G_{m-8} entweder nur die identische Transformation enthält oder die Punkte jeder Ebene: $z = a$ von allgemeiner Lage achtgliedrig transformirt und zwar natürlich durch die allgemeine projective Gruppe dieser Ebene; im zweiten Falle ist die G_{m-8} demnach eine Gruppe von derselben Beschaffenheit wie die G_m.

Indem wir die eben durchgeführten Betrachtungen auf die G_{m-8} anwenden und in derselben Weise fortfahren, finden wir, dass die G_m eine Reihe von invarianten Untergruppen:

$$G_{m-8},\ G_{m-2.8},\ G_{m-3.8}\cdots$$

enthält. Die letzte dieser Untergruppen besteht blos aus der identischen Transformation, so dass also m ein ganzes Vielfaches von acht ist; jede der übrigen Untergruppen ist in allen vorhergehenden invariant und transformirt die Punkte einer jeden Ebene: $z = a$ von allgemeiner Lage achtgliedrig, durch die allgemeine projective Gruppe dieser Ebene.

Unter den erwähnten Untergruppen giebt es eine achtgliedrige G_8, die mit der Gruppe:

(5) $$p,\ q,\ xp,\ yp,\ xq,\ yq,\ x^2p + xyq,\ xyp + y^2q$$

holoedrisch isomorph ist und die Punkte jeder Ebene: $z = a$ von allgemeiner Lage durch die allgemeine projective Gruppe dieser Ebene transformirt. Halten wir jetzt in der Ebene: $z = z_0$ einen Punkt fest, so werden die Punkte jeder andern Ebene: $z = a$ durch eine sechsgliedrige Gruppe G_6 transformirt, die nach Seite 93 entweder einen Punkt oder eine Gerade invariant lässt. Da die Continuität gewahrt bleiben muss, ergiebt sich, dass die G_6 stets einen Punkt invariant lässt, es ist demnach jedem Punkte der Ebene: $z = z_0$ in jeder Ebene $z = a$ eindeutig umkehrbar ein Punkt zugeordnet. Denken wir uns nunmehr für einen Punkt der Ebene: $z = z_0$ in jeder Ebene: $z = a$ den zugeordneten Punkt construirt, so erhalten wir eine Curve, und denken wir uns dasselbe für alle ∞^2 Punkte der Ebene: $z = z_0$ ausgeführt, so erhalten wir eine Schaar von ∞^2 Curven, die augenscheinlich bei unsrer G_8 invariant bleibt. Diese Curvenschaar wird durch zwei Gleichungen von der Form:

$$\lambda(x, z) = \text{const.},\quad \mu(y, z) = \text{const.}$$

dargestellt, die nach x und nach y auflösbar sind; wir können daher λ als neues x und μ als neues y einführen. Thun wir das, so verwandelt sich die G_8 in eine Gruppe G_8', die nur noch die Veränderlichen x und y, dagegen z gar nicht mehr enthält; die Gruppe G_8' endlich ist als achtgliedrige primitive Gruppe in zwei Veränderlichen mit der Gruppe (5) durch eine Punkttransformation ähnlich, es ergiebt sich also, dass unsre G_8 durch geeignete Wahl der Veränderlichen x, y, z auf die Form:

[1] $$\boxed{p,\ q,\ xp,\ yp,\ xq,\ yq,\ x^2p + xyq,\ xyp + y^2q}$$

gebracht werden kann.

Führen wir die neuen Veränderlichen x, y, z, in denen die G_8 die Form [1] erhalten hat, in die G_m ein, so müssen die infinitesimalen Transformationen dieser Gruppe wieder die Form (A) annehmen, denn die G_m transformirt ja die Punkte jeder Ebene: $z = a$ genau so wie die G_8. Da nun die G_8 in der G_m invariant ist, so müssen wir jetzt noch alle Gruppen von der Form (A) aufsuchen, in denen [1] als invariante Untergruppe enthalten ist. Durch Combination der infinitesimalen Transformationen [1] mit denen von der Form (A) finden wir aber sofort, dass [1] nur dann in einer Gruppe von der Form (A) invariant ist, wenn alle Z_{ki} Constanten sind, wenn also die Gruppe (A) mit [1] zusammenfällt.

Damit ist bewiesen, dass jede Gruppe von der Form (A), die keine Curvenschaar: $z = \text{const.}$, $\psi(x, y, z) = \text{const.}$ invariant lässt, durch eine Punkttransformation des Raumes x, y, z mit der Gruppe [1] ähnlich ist.

Wir suchen jetzt alle Gruppen von der Form:

$$(C) \quad \left\{ X_k f = Z_{k1} p + Z_{k2} q + Z_{k3} xq + Z_{k4}(xp - yq) + Z_{k5} yp \right. \quad (k = 1 \ldots m),$$

die von der Form (B) werden wir nachher sehr leicht finden.

Es leuchtet ein, dass mit den $X_k f$ zugleich auch die verkürzten infinitesimalen Transformationen:

$$\overline{X}_k f = Z_{k3} xq + Z_{k4}(xp - yq) + Z_{k5} yp \quad (k = 1 \ldots m)$$

eine Gruppe erzeugen; diese letztere braucht allerdings nicht immer m-gliedrig zu sein, da aber nach S. 144 nicht alle fünfreihigen Determinanten der Matrix (4) verschwinden, so ist jedenfalls sicher, dass nicht alle dreireihigen Determinanten der Matrix:

$$(6) \quad \left| \begin{matrix} Z_{k3} & Z_{k4} & Z_{k5} \\ (k = 1 \ldots m) \end{matrix} \right|$$

gleich Null sind. Nun ist die Gruppe: xq, $xp - yq$, yp holoedrisch isomorph mit der allgemeinen projectiven Gruppe: $\mathfrak{p}$, $-2\mathfrak{x}\mathfrak{p}$, $-\mathfrak{x}^2\mathfrak{p}$ der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit $\mathfrak{x}$ (vgl. S. 19), andrerseits haben wir in Kap. 3 auf S. 40 ff. gesehen, dass jede Gruppe von der Form:

$$\overline{\mathfrak{X}}_k f = Z_{k3}\mathfrak{p} - 2Z_{k4}\mathfrak{x}\mathfrak{p} - Z_{k5}\mathfrak{x}^2\mathfrak{p} \quad (k = 1 \ldots m),$$

für die nicht alle dreireihigen Determinanten der Matrix (6) verschwinden, blos dreigliedrig ist und durch eine Transformation von der Gestalt:

$$\mathfrak{x}_1 = \frac{\gamma(z) + \mathfrak{x}\varepsilon(z)}{\alpha(z) + \mathfrak{x}\beta(z)}$$

in die Gruppe: $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{x}_1\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{p}_1$ übergeführt werden kann. Es ergiebt sich daher ganz in derselben Weise, dass die Gruppe: $\overline{X}_1 f \ldots \overline{X}_m f$ auch blos dreigliedrig ist und durch eine Transformation von der Gestalt:

$$x_1 = \alpha(z)x + \beta(z)y, \quad y_1 = \gamma(z)x + \varepsilon(z)y$$

auf die Form: $x_1 q_1$, $x_1 p_1 - y_1 q_1$, $y_1 p_1$ gebracht werden kann.

Führen wir die neuen Veränderlichen x_1, y_1 in die Gruppe (C) ein und lassen wir sodann den Index fort, so erhält diese Gruppe die Form:

$$xq + Z_{11}p + Z_{12}q, \quad xp - yq + Z_{21}p + Z_{22}q, \quad yp + Z_{31}p + Z_{32}q$$
$$Z_{k1}p + Z_{k2}q \qquad (k = 4 \ldots m).$$

Hier führen wir $x + Z_{21}$ als neues x und $y - Z_{22}$ als neues y ein, wodurch die zweite infinitesimale Transformation unsrer Gruppe die einfache Form: $xp - yq$ bekommt, während die andern Transformationen ihre Gestalt entweder gar nicht oder doch nicht wesentlich ändern. Durch Klammeroperation ergiebt sich weiter:

$$(xp - yq, \quad xq + Z_{11}p + Z_{12}q) = 2xq - Z_{11}p + Z_{12}q$$
$$(xp - yq, \; 2xq - Z_{11}p + Z_{12}q) = 4xq + Z_{11}p + Z_{12}q,$$

also enthält unsre Gruppe auch die Transformation xq und ebenso natürlich yp. Ferner wird:

$$(Z_{k1}p + Z_{k2}q, \; xp - yq) = Z_{k1}p - Z_{k2}q,$$

es treten mithin $Z_{k1}p$ und $Z_{k2}q$ für sich auf; endlich kommt:

$$(Z_{k1}p, \; xq) = Z_{k1}q, \quad (Z_{k2}q, \; yp) = Z_{k2}p,$$

demnach hat unsre Gruppe die Form:

$$[2] \qquad \boxed{xq, \; xp - yq, \; yp, \; Z_1 p, \ldots Z_l p, \; Z_1 q, \ldots Z_l q} \; .$$

Hier bedeuten $Z_1 \ldots Z_l$ Functionen von z, die ganz beliebig sind, nur darf zwischen ihnen keine lineare homogene Relation:

$$a_1 Z_1 + \cdots + a_l Z_l = 0$$

mit constanten Coefficienten bestehen. Die Zahl l muss selbstverständlich grösser als Null sein, denn die Gliederzahl $m = 2l + 3$ unsrer Gruppe muss mindestens den Werth fünf haben.

Bemerkenswerth ist, dass man von den l Functionen $Z_1 \ldots Z_l$ eine gleich 1 setzen kann; führt man nämlich $\frac{x}{Z_1}$ als neues x und $\frac{y}{Z_1}$ als neues y ein, so ergiebt sich die Gruppe:

$$xq, \; xp - yq, \; yp, \; p, \; \frac{Z_2}{Z_1}p, \cdots \frac{Z_l}{Z_1}p, \; q, \; \frac{Z_2}{Z_1}q, \cdots \frac{Z_l}{Z_1}q.$$

Nachdem wir alle Gruppen von der Form (C) gefunden haben, suchen wir noch alle von der Form:

$$(B)\quad \left\{ X_k f = Z_{k1} p + Z_{k2} q + Z_{k3} xp + Z_{k4} yp + Z_{k5} xq + Z_{k6} yq \right. \quad (k = 1 \ldots m).$$

Aus Abschnitt I, S. 261, Satz 6 wissen wir, dass der Inbegriff aller infinitesimalen Transformationen $(X_i X_k)$ eine Gruppe erzeugt, die in der Gruppe (B) invariant ist. Diese neue Gruppe hat augenscheinlich die Form (C) und transformirt auch die Punkte jeder einzelnen Ebene: $z = z_0$ fünfgliedrig, sie kann daher, wie wir soeben gezeigt haben, durch geeignete Wahl der Veränderlichen auf die Form:

$$[1]\qquad xq,\ xp - yq,\ yp,\ Z_1 p \ldots Z_l p,\ Z_1 q \ldots Z_l q$$

gebracht werden. Die Gruppe (B) ihrerseits hat bei Einführung der neuen Veränderlichen ihre Form im Wesentlichen bewahrt, sie wird also erhalten, indem man zu der Gruppe [1] noch eine oder mehrere infinitesimale Transformationen von der Form:

$$Xf = \mathfrak{A} p + \mathfrak{B} q + \mathfrak{C} xq + \mathfrak{D}(xp - yq) + \mathfrak{E} yp + \mathfrak{F}(xp + yq)$$

hinzufügt, unter $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \ldots \mathfrak{F}$ Functionen von z verstanden.

Um die Form der Functionen $\mathfrak{A} \ldots \mathfrak{F}$ zu bestimmen, bilden wir die Transformation:

$$(Xf,\ xp - yq) = \mathfrak{A} p - \mathfrak{B} q - 2\mathfrak{C} xq + 2\mathfrak{E} yp.$$

Da diese der Gruppe [1] angehören muss, so können wir schliessen, dass alle vier Transformationen:

$$\mathfrak{A} p,\ \mathfrak{B} q,\ \mathfrak{C} xq,\ \mathfrak{E} yp$$

der Gruppe [1] angehören und wir dürfen infolgedessen in der Transformation Xf die Coefficienten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{E}$ gleich Null setzen. Nachdem das geschehen ist, bilden wir die Transformation:

$$(Xf,\ xq) = 2\mathfrak{D} xq$$

und erkennen in derselben Weise, dass wir auch $\mathfrak{D}$ gleich Null setzen dürfen. Endlich muss auch die Transformation:

$$(Z_k p,\ \mathfrak{F}(xp + yq)) = Z_k \mathfrak{F} p$$

der Gruppe [1] angehören, ferner die Transformation:

$$(Z_k \mathfrak{F} p,\ \mathfrak{F}(xp + yq)) = Z_k \mathfrak{F}^2 p,$$

die Transformation: $Z_k \mathfrak{F}^3 p$ und so weiter, da aber die Gruppe [1] nicht unendlich viele unabhängige infinitesimale Transformationen enthalten kann, so ergiebt sich, dass $\mathfrak{F}$ eine blose Constante ist.

Wir sehen hieraus, dass jede Gruppe von der Form (B) durch geeignete Wahl der Veränderlichen die Form:

[3] $\boxed{xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq,\ Z_1 p \ldots Z_l p,\ Z_1 q \ldots Z_l q}$

erhalten kann; es versteht sich von selbst, dass man auch hier eine der l Functionen $Z_1 \ldots Z_l$ gleich 1 setzen darf.

Jetzt sind die in der Ueberschrift des gegenwärtigen Paragraphen bezeichneten Gruppen alle gefunden, wir haben daher den

Satz 1. *Lässt eine Gruppe von Punkttransformationen des Raumes x, y, z alle Ebenen der Schaar: $z = const.$ in Ruhe, lässt sie dagegen keine Curvenschaar von der Form: $z = const.$, $\varphi(x, y, z) = const.$ invariant, so kann sie durch eine Punkttransformation des Raumes x, y, z auf eine der drei Formen:* [1], S. 145, [2], S. 147, [3], S. 149 *gebracht werden.*

§ 39.

Die Ebenen: $z = \text{const.}$ werden eingliedrig transformirt.

In Uebereinstimmung mit dem auf S. 143 Gesagten fügen wir zunächst zu der Gruppe:

[1] $p,\ q,\ xp,\ yp,\ xq,\ yq,\ x^2 p + xyq,\ xyp + y^2 q$

in allgemeinster Weise eine solche infinitesimale Transformation:

$$Xf = r + \xi(x, y, z)p + \eta(x, y, z)q$$

hinzu, dass eine neungliedrige Gruppe entsteht, in der [1] als invariante Untergruppe enthalten ist.

Die infinitesimalen Transformationen:

$$(p,\ Xf) = \xi_x p + \eta_x q$$
$$(xp,\ Xf) = (x\xi_x - \xi)p + x\eta_x q$$

müssen der Gruppe [1] angehören, es muss also ξ von z frei sein; ebenso ergiebt sich, dass η die Veränderliche z nicht enthält. Bestimmt man ξ und η wirklich, was gar keine Schwierigkeiten macht, so findet man, dass $\xi p + \eta q$ eine infinitesimale Transformation der Gruppe [1] ist. Unsre neungliedrige Gruppe hat demzufolge die Form:

[4] $\boxed{p,\ q,\ xp,\ yp,\ xq,\ yq,\ x^2 p + xyq,\ xyp + y^2 q,\ r}$.

Zweitens fügen wir zu der Gruppe:

[2] $xq,\ xp - yq,\ yp,\ Z_1 p \ldots Z_l p,\ Z_1 q \ldots Z_l q$

eine infinitesimale Transformation von der Form:

$$Xf = r + \xi(x, y, z)p + \eta(x, y, z)q$$

hinzu.

Da die infinitesimalen Transformationen:

$$(Z_1 q,\ Xf) = Z_1 \xi_y p + (Z_1 \eta_y - Z_1')\, q$$
$$(xq,\ Xf) = x\xi_y p + (x\eta_y - \xi)\, q$$

der Gruppe [2] angehören müssen, so ergiebt sich:

$$Z_1 \xi_y = ax + by + \sum_1^l{}^k c_k Z_k$$

$$x\xi_y = a'x + b'y + \sum_1^l{}^k c_k' Z_k,$$

also ist:

$$x\left(ax + by + \sum_1^l{}^k c_k Z_k\right) = Z_1\left(a'x + b'y + \sum_1^l{}^k c_k' Z_k\right),$$

woraus folgt, dass $a' = c_1$ ist, während die übrigen Constanten alle verschwinden. Wir haben nunmehr: $\xi_y = c_1$ und: $\xi = c_1 y + \varphi(x, z)$, hier aber können wir c_1 ohne Weiteres gleich Null setzen, weil unsre Gruppe die infinitesimale Transformation yp enthält; demnach wird ξ frei von y und natürlich ebenso η frei von x.

Durch Bildung der Transformationen:

$$(Z_1 p,\ Xf),\quad (xp - yq,\ Xf)$$

erkennen wir jetzt, dass Gleichungen von der Form:

$$Z_1 \xi_x - Z_1' = \mathfrak{a}x + \sum_1^l{}^k \mathfrak{c}_k Z_k$$

$$x\xi_x - \xi = \mathfrak{a}'x + \sum_1^l{}^k \mathfrak{c}_k' Z_k$$

bestehen. Durch Verbindung dieser Gleichungen ergiebt sich, dass $\mathfrak{a}$ gleich Null ist und dass ξ die Form:

$$\xi = \alpha(z)x + \beta(z)$$

besitzt; in derselben Weise erhalten wir für η die Form:

$$\eta = \gamma(z)y + \varepsilon(z).$$

Ferner muss auch die Transformation:

$$(xq,\ Xf) = \{\gamma(z)x - \alpha(z)x - \beta(z)\}\, q$$

der Gruppe [2] angehören, es muss also $\gamma(z) - \alpha(z)$ gleich einer Constanten sein, während $\beta(z)$ und ebenso $\varepsilon(z)$ die Form:

$$\sum_1^l{}^k C_k Z_k$$

haben muss. Wir können infolgedessen Xf ohne Weiteres in der Form:

$$Xf = r + \alpha(z)\,\{xp + yq\}$$

voraussetzen. Hier führen wir endlich $f(z)x$ als neues x und $f(z)y$ als neues y ein, indem wir $f(z)$ aus der Differentialgleichung:

$$f'(z) + \alpha(z) \cdot f(z) = 0$$

bestimmen; dadurch wird Xf einfach $= r$.

Die gesuchte Gruppe hat nunmehr die Gestalt:

$$xq,\ xp - yq,\ yp,\ Z_1 p \ldots Z_l p,\ Z_1 q \cdots Z_l q,\ r,$$

wo noch die Functionen $Z_1 \ldots Z_l$ zu bestimmen sind. Zu diesem Zwecke bilden wir die infinitesimale Transformation:

$$(r,\ Z_k p) = Z_k' p$$

die nothwendig die Form:

$$\sum_1^l{}_\nu\, b_{k\nu} Z_\nu p,$$

besitzen muss. Hieraus ergiebt sich, dass die Z_k den l Differentialgleichungen:

$$Z_k' = \sum_1^l{}_\nu\, b_{k\nu} Z_\nu \qquad (k = 1 \ldots l)$$

genügen; Differentialgleichungen von dieser Form sind uns aber schon auf S. 43 begegnet; wir finden daher, dass die gesuchte Gruppe die Form:

[5]
$$\begin{array}{c} xq,\ xp - yq,\ yp,\ r \\ e^{\lambda_k z} p,\ z e^{\lambda_k z} p,\ \ldots\ z^{m_k} e^{\lambda_k z} p \\ e^{\lambda_k z} q,\ z e^{\lambda_k z} q,\ \ldots\ z^{m_k} e^{\lambda_k z} q \\ (k = 1,\ 2 \ldots h;\ h > 0) \end{array}$$

besitzt. Hier sind $m_1, m_2 \ldots m_h$ positive ganze Zahlen, deren Summe gleich $l - h$ sein muss, dagegen sind $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_h$ ganz beliebige Zahlen, unter denen nur keine zwei einander gleich sein dürfen.

Drittens haben wir zu der Gruppe:

[3] $xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq,\ Z_1 p, \ldots Z_l p,\ Z_1 q, \ldots Z_l q$

eine infinitesimale Transformation von der Form:

$$r + \xi(x, y, z) p + \eta(x, y, z) q$$

hinzuzufügen. Wir finden durch genau dieselben Rechnungen wie im zweiten Fall die Gruppe:

[6]
$$\begin{array}{c} xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq,\ r \\ e^{\lambda_k z} p,\ z e^{\lambda_k z} p,\ \ldots\ z^{m_k} e^{\lambda_k z} p \\ e^{\lambda_k z} q,\ z e^{\lambda_k z} q,\ \ldots\ z^{m_k} e^{\lambda_k z} q \\ (k = 1,\ 2 \ldots h;\ h > 0) \end{array}.$$

Hiermit sind alle Gruppen gefunden, bei denen die invariante Ebenenschaar: $z = \text{const.}$ eingliedrig transformirt wird und bei denen keine Curvenschaar von der Form: $z = \text{const.}$, $\psi(x, y, z) = \text{const.}$ invariant bleibt.

§ 40.

Die Ebenen: $z = \text{const.}$ werden zwei- oder dreigliedrig transformirt.

Zunächst müssen wir zu den Gruppen [4], [5], [6] je eine infinitesimale Transformation:

$$X_1 f = zr + \xi(x, y, z)\, p + \eta(x, y, z)\, q$$

hinzufügen.

Aus der Gruppe [4] ergiebt sich auf diese Weise ohne Schwierigkeit die Gruppe:

[7] $$\boxed{p,\ q,\ xp,\ yp,\ xq,\ yq,\ x^2p + xyq,\ xyp + y^2q,\ r,\ zr}\ .$$

Soll zweitens aus der Gruppe [5] durch Hinzufügung von $X_1 f$ eine Gruppe entstehen, so können wir $X_1 f$ jedenfalls in der Form:

$$X_1 f = zr + \alpha(z)(xp + yq)$$

voraussetzen; das ergiebt sich genau so wie in § 39. Weiter bekommen wir:

$$(r,\ X_1 f) = r + \alpha'(z)(xp + yq),$$

also muss $\alpha'(z)$ verschwinden und $\alpha(z)$ von z frei sein:

$$X_1 f = zr + a(xp + yq).$$

Nunmehr wird:

$$(z^{m_k} \cdot e^{\lambda_k z} p,\ X_1 f) = \{(a - m_k) z^{m_k} e^{\lambda_k z} - \lambda_k z^{m_k+1} e^{\lambda_k z}\} p$$

und diese Transformation muss der Gruppe [5] angehören, was offenbar nur dann der Fall ist, wenn λ_k verschwindet.

Wir bekommen demnach die Gruppe:

[8] $$\boxed{\begin{array}{c} xq,\ xp - yq,\ yp,\ r,\ zr + a(xp + yq) \\ p,\ zp,\ z^2p,\ \ldots\ z^m p \\ q,\ zq,\ z^2q,\ \ldots\ z^m q \end{array}}\ .$$

Der willkürliche Parameter a lässt sich hier nicht fortschaffen.

Soll drittens aus der Gruppe [6] durch Hinzufügung von $X_1 f$ eine Gruppe entstehen, so können wir wiederum annehmen, dass $X_1 f$ die Form hat:

$$X_1 f = zr + \alpha(z)(xp + yq).$$

Aus der Gleichung:

$$(r,\ X_1 f) = r + \alpha'(z)(xp + yq)$$

lässt sich aber jetzt nur schliessen, dass $\alpha'(z)$ eine Constante ist und dass $\alpha(z)$ die Form: $az + b$ besitzt, wo b ohne Weiteres gleich Null gesetzt werden kann. Nunmehr ist:

$$X_1 f = zr + az(xp + yq),$$

wir bekommen also:

$$(z^{m_k} e^{\lambda_k z} p,\ X_1 f) = (a - \lambda_k) z^{m_k+1} e^{\lambda_k z} p - m_k z^{m_k} e^{\lambda_k z} p.$$

Diese Transformation muss der Gruppe [6] angehören, es müssen also alle λ_k gleich a sein, so dass die gesuchte Gruppe die Form hat:

$$xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq,\ r,\ zr + az(xp + yq)$$
$$e^{az}p,\ ze^{az}p, \ldots z^m e^{az}p,\ e^{az}q,\ ze^{az}q, \ldots z^m e^{az}q.$$

Hier führen wir endlich: xe^{-az} als neues x und ye^{-az} als neues y ein und bekommen die Gruppe:

[9]
$$\begin{array}{|c|}\hline xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq,\ r,\ zr \\ p,\ zp,\ z^2p \ldots z^m p \\ q,\ zq,\ z^2q \ldots z^m q \\ \hline \end{array}.$$

Jetzt bleibt uns noch übrig zu den Gruppen [7], [8], [9] je eine Transformation:

$$X_1 f = z^2 r + \xi(x, y, z)p + \eta(x, y, z)q$$

hinzuzufügen.

Aus der Gruppe [7] erhalten wir die nachstehende:

[10]
$$\begin{array}{|c|}\hline p,\ q,\ xp,\ yp,\ xq,\ yq,\ x^2p + xyq,\ xyp + y^2q \\ r,\ zr,\ z^2r \\ \hline \end{array}.$$

Fügen wir zweitens zur Gruppe [8] die Transformation $X_2 f$ hinzu, so erkennen wir zunächst, wie in § 39, dass wir $X_2 f$ in der Form:

$$X_2 f = z^2 r + \alpha(z)(xp + yq)$$

annehmen dürfen. Ferner bekommen wir:

$$(r,\ X_2 f) = 2zr + \alpha'(z)(xp + yq),$$

also wird: $\alpha'(z) = 2a$ und $\alpha(z) = 2az + b$. Nunmehr ergiebt sich:

$$(z^m p,\ X_2 f) = bz^m p + (2a - m) z^{m+1} p,$$

mithin muss $2a = m$ sein; weiter ist:

$$\left(zr + \frac{m}{2}(xp + yq),\ X_2 f\right) = z^2 r + mz(xp + yq)$$

und da $xp + yq$ nicht vorkommen darf, so hat b den Werth Null.

Die von uns gesuchte Gruppe kann in Folge dessen die nachstehende Form erhalten:

$$[11] \quad \left| \begin{matrix} xq,\ xp-yq,\ yp,\ r,\ 2zr+m(xp+yq),\ z^2r+mz(xp+yq) \\ p,\ zp,\ \ldots\ z^mp,\ q,\ zq,\ \ldots\ z^mq, \end{matrix} \right| .$$

Ebenso ergiebt sich aus der Gruppe [9] die Gruppe:

$$[12] \quad \left| \begin{matrix} xq,\ xp-yq,\ yp,\ xp+yq,\ rzr,\ z^2r+mz(xp+yq) \\ p,\ zp,\ \ldots\ z^mp,\ q,\ zq,\ \ldots\ z^mq \end{matrix} \right| .$$

Damit ist die in § 37 gestellte Aufgabe erledigt und wir können den Satz aussprechen:

Satz 2. *Lässt eine endliche continuirliche Gruppe des Raumes x, y, z eine Schaar von ∞^1 Flächen: $\varphi(x, y, z) = \text{const.}$ invariant, dagegen keine Curvenschaar von der Form: $\varphi(x, y, z) = \text{const.}$, $\psi(x, y, z) = \text{const.}$, so kann sie stets durch eine Punkttransformation auf eine der zwölf Formen:* [1] . . . [12] *gebracht werden.*

Wir wenden uns jetzt zur Bestimmung aller Gruppen, die der zweiten unsrer auf S. 141 unterschiedenen drei Arten angehören.

II. Gruppen die eine Curvenschaar: $\varphi = \text{const.}$, $\psi = \text{const.}$ invariant lassen, nicht aber eine Flächenschaar von der Form: $\Omega(\varphi, \psi) = \text{const.}$

§ 41.

Es sei G_m eine m-gliedrige Gruppe, bei der die Curvenschaar: $\varphi = \text{const.}$, $\psi = \text{const.}$ invariant bleibt; wählen wir φ als neues x und ψ als neues y, so erscheint diese Gruppe in der Form:

$$X_kf = \xi_k(x, y)p + \eta_k(x, y)q + \zeta_k(x, y, z)r \qquad (k = 1, \ldots m).$$

Soll nun die G_m insbesondere eine Gruppe von der verlangten Beschaffenheit sein, so darf sie keine Flächenschaar von der Form: $\Omega(x, y) = \text{const.}$ invariant lassen, sie muss also die ∞^2 Curven: $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ primitiv transformiren oder, was auf dasselbe hinauskommt, die verkürzte Gruppe (s. Abschn. I, S. 307, Satz 4):

$$\overline{X}_kf = \xi_k(x, y)p + \eta_k(x, y)q \qquad (k = 1 \ldots m)$$

in den Veränderlichen x, y muss primitiv sein. Diese Bedingung ist nothwendig und zugleich hinreichend, denn die verkürzte Gruppe giebt an, in welcher Weise die ∞^2 Curven: $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ bei der G_m transformirt werden.

Da die verkürzte Gruppe: $\overline{X}_1f \ldots \overline{X}_mf$ primitiv sein muss, so ist sie (s. Theorem 5, S. 35) entweder fünf- oder sechs- oder acht-

gliedrig und kann durch geeignete Wahl der Veränderlichen x, y auf eine der drei Formen:

$$(\mathfrak{A}) \qquad p,\ q,\ xq,\ xp - yq,\ yp$$

$$(\mathfrak{B}) \qquad p,\ q,\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq$$

$$(\mathfrak{C}) \qquad p,\ q,\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq,\ x^2p + xyq,\ xyp + y^2q$$

gebracht werden. Verstehen wir daher unter h eine beliebige der drei Zahlen: fünf, sechs, acht und unter:

$$\overline{X}_k f = \xi_k(x, y)\,p + \eta_k(x, y)\,q \qquad (k = 1 \ldots h)$$

die h-gliedrige der drei Gruppen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, so ist:

$$\overline{X}_1 f + \xi_1(x, y, z)\,r, \ldots, \overline{X}_h f + \xi_h(x, y, z)\,r$$
$$F_1(x, y, z)\,r, \ldots, F_{m-h}(x, y, z)\,r$$

die allgemeine Form einer m-gliedrigen Gruppe G_m von der verlangten Beschaffenheit.

Unter den infinitesimalen Transformationen unsrer G_m giebt es $m - h$ unabhängige, die jede einzelne Gerade der Schaar: $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ in Ruhe lassen. Diese $m - h$ Transformationen haben die Form:

$$F_1(x, y, z)\,r, \ldots F_{m-h}(x, y, z)\,r,$$

sie erzeugen nach Abschn. I, S. 307, Satz 5 eine $(m - h)$-gliedrige invariante Untergruppe G_{m-h} unsrer G_m. Wir müssen zunächst untersuchen, was für verschiedene Formen diese G_{m-h} haben kann.

Die G_{m-h} lässt jede Gerade: $x = x_0$, $y = y_0$ invariant, transformirt aber die ∞^1 Punkte der Geraden und zwar (s. Theor. 1, S. 6) entweder null-, oder ein- oder zwei- oder dreigliedrig. Der erste Fall tritt nur ein, wenn die G_{m-h} auf die identische Transformation zusammenschrumpft, wenn also $h = m$ ist. In den drei übrigen Fällen führt genau dieselbe Methode zum Ziel, die wir auf S. 38 ff. in der Ebene zur Bestimmung aller m-gliedrigen Gruppen von der Form:

$$\Phi_1(x, y)\,q, \ldots \Phi_m(x, y)\,q$$

benutzt haben. Es ergiebt sich nämlich, dass man im zweiten Falle die G_{m-h} stets auf die Form:

$$(\mathfrak{D}) \qquad F_1(x, y)\,r, \ldots F_{m-h}(x, y)\,r$$

bringen kann, indem man eine geeignete Function von x, y, z als neues z einführt. Im dritten Falle kann man die Form:

$$(\mathfrak{E}) \qquad F_1(x, y)\,r, \ldots F_{m-h-1}(x, y)\,r,\ zr$$

erreichen. Im vierten Falle endlich ist die G_{m-h} immer dreigliedrig und lässt sich auf die Form:

$$(\mathfrak{F}) \qquad r,\ zr,\ z^2r$$

bringen.

Es liegt jetzt auf der Hand, wie wir verfahren müssen, um alle m-gliedrigen Gruppen G_m von der verlangten Beschaffenheit zu finden.

Wir beginnen mit der Bestimmung aller Gruppen G_m, bei denen die Curven: $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ fünfgliedrig transformirt werden, bei denen also die Zahl $h = 5$ ist und die Gruppe: $\overline{X}_1 f \ldots \overline{X}_h f$ die Form (𝔄) besitzt. Unter diesen Gruppen suchen wir zuerst die fünfgliedrigen, deren invariante Untergruppe G_{m-h} blos aus der identischen Transformation besteht, sodann suchen wir der Reihe nach alle die, deren invariante Untergruppe eine der Formen: 𝔇, 𝔈, 𝔉 besitzt.

Haben wir in dieser Weise alle Gruppen G_m bestimmt, bei denen die Curven $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ fünfgliedrig transformirt werden, so fügen wir zu jeder der gefundenen Gruppe in allgemeinster Weise eine solche infinitesimale Transformation:

$$xp + yq + \xi(x, y, z)r$$

hinzu, dass wieder eine Gruppe entsteht. Endlich fügen wir zu den so erhaltenen Gruppen noch zwei infinitesimale Transformationen:

$$x^2 p + xyq + \xi_1(x, y, z)r$$
$$xyp + y^2 q + \xi_2(x, y, z)r$$

hinzu und bestimmen ξ_1 und ξ_2 in allgemeinster Weise derart, dass wir eine Gruppe erhalten.

§ 42.

Die Curven: $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ werden fünfgliedrig transformirt.

Zuerst sind alle fünfgliedrigen Gruppen von der Form:

$$p + \alpha r,\ q + \beta r,\ xq + \xi_1 r,\ xp - yq + \xi_2 r,\ yp + \xi_3 r$$

zu bestimmen, unter $\alpha, \beta, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ Functionen von x, y, z verstanden.

Der Ausdruck:

$$(p + \alpha r,\ q + \beta r) = (\beta_x + \alpha\beta_z - \alpha_y - \beta\alpha_z)r$$

muss identisch verschwinden, da eine infinitesimale Transformation von dieser Form in der Gruppe nicht vorkommen darf; die beiden Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \alpha\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \beta\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

haben daher eine Lösung gemein, die von z sicher nicht frei ist (s. Abschn. I, S. 91, Theor. 12). Führen wir diese Lösung als neues z ein, so werden α und β gleich Null, während die übrigen infinitesimalen Transformationen unsrer Gruppe ihre Form nicht wesentlich ändern.

Ferner ergiebt sich:

$$(p,\ xq + \xi_1 r) = q + \frac{\partial \xi_1}{\partial x} r,\ (q,\ xq + \xi_1 r) = \frac{\partial \xi_1}{\partial y} r,$$

also muss ξ_1 und ebenso ξ_2 und ξ_3 von x und y frei und eine Function von z allein sein. Ist nun $\xi_1 \neq 0$, so bringen wir durch Einführung eines neuen z die Transformation: $xq + \xi_1 r$ auf die Form: $xq + r$; sodann ergiebt sich:

$$(xq + r,\ xp - yq + \xi_2 r) = -2xq + \frac{\partial \xi_2}{\partial z} \cdot r,$$

also ist:

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial z} = -2,\quad \xi_2 = -2z + a,$$

wo die Constante a ohne Weiteres gleich Null gesetzt werden kann. Schliesslich finden wir noch: $\xi_3 = -z^2$ und haben somit die Gruppe:

[13] $$p,\ q,\ xq + r,\ xp - yq - 2zr,\ yp - z^2 r\ .$$

Ist andrerseits $\xi_1 = 0$, so erkennen wir durch Combination, dass auch ξ_2 und ξ_3 verschwinden, wir bekommen also die Gruppe:

[14] $$p\ q,\ xq,\ xp - yq,\ yp$$

die übrigens schon unter den auf S. 147 gefundenen Gruppen [2] enthalten ist.

Wir wenden uns jetzt zu den Gruppen von der Form:

(7) $$\begin{cases} p + \xi_1 r,\ q + \xi_2 r,\ xq + \xi_3 r,\ xp - yq + \xi_4 r,\ yp + \xi_5 r \\ F_1(x, y) r,\ \ldots\ F_l(x, y) r; \end{cases}$$

es sind das die, bei deren invarianter Untergruppe:

$$F_1(x, y) r,\ \ldots\ F_l(x, y) r$$

die Punkte jeder Geraden: $x = y_0,\ y = y_0$ eingliedrig transformirt werden.

Zunächst sei $l = 1$.

Wir führen ein neues z ein, so dass die Transformation: $F_1 r$ die einfache Form r annimmt. Unsre Gruppe erscheint dann in der Gestalt:

(8) $$r,\ p + \xi_1 r,\ q + \xi_2 r,\ xq + \xi_3 r,\ xp - yq + \xi_4 r,\ yp + \xi_5 r.$$

Durch Combination mit r finden wir jetzt, dass ξ_k die Form hat:

$$\xi_k = a_k z + \varrho_k(x, y) \quad (k = 1 \ldots 5),$$

es ist aber:

$$(p + (a_1 z + \varrho_1) r,\ xp - yq + (a_4 z + \varrho_4) r) = p + \psi(x, y) r,$$

also muss a_1 verschwinden und in derselben Weise lässt sich einsehen, dass auch $a_2 \ldots a_5$ null sind. Führen wir nunmehr: $z - \int \varrho_1 dx$ als

neues z ein, so geht die infinitesimale Transformation: $p + \varrho_1 r$ über in: p und die Transformation: $q + \beta_2 r$ bekommt in Folge dessen die Form:

$$q + (Cx + \chi(y))\, r,$$

wo aber die Function $\chi(y)$ ohne Weiteres gleich Null gesetzt werden kann: wir brauchen zu diesem Zwecke blos: $z - \int \chi\, dy$ als neues z einzuführen. Die Gruppe (8) lautet demnach jetzt:

$$(8') \quad r,\ p,\ q + Cxr,\ xq + \varrho_3(x,y)r,\ xp - yq + \varrho_4(x,y)r,\ yp + \varrho_5(x,y)r.$$

Durch Combination mit p erkennen wir, dass ϱ_4 die Form hat:

$$\varrho_4 = ax + \varphi(y),$$

andrerseits bekommen wir:

$$(q + Cxr,\ xp - yq + (ax + \varphi)r) = -q + (\varphi'(y) - Cx)\, r,$$

also ist $\varphi'(y)$ constant $= b$ und $\varphi(y) = by$, wenn von der hier überflüssigen Integrationsconstanten abgesehen wird. Führen wir noch: $z - ax + by$ als neues z ein, so bekommen wir einfach die Transformation: $xp - yq$, während: r, p und $q + Cxr$ sich nicht wesentlich ändern. Ferner wird:

$$(p,\ xq + \varrho_3 r) = q + \frac{\partial \varrho_3}{\partial x}\, r,\quad (q + Cxr,\ xq + \varrho_3 r) = \frac{\partial \varrho_3}{\partial y}\, r,$$

also ist, von einer überflüssigen Integrationsconstanten abgesehen:

$$\varrho_3 = \tfrac{1}{2} Cx^2 + ky;$$

aus der Gleichung:

$$(xp - yq,\ xq + (\tfrac{1}{2} Cx^2 + ky)\, r) = 2xq + (Cx^2 - ky)\, r$$

ergiebt sich überdies, dass die Constante k verschwindet. Endlich finden wir in ganz ähnlicher Weise, dass $\varrho_5 = \frac{1}{2} Cy^2$ ist.

Jetzt sind wir am Ziele. Entweder nämlich ist $C = 0$, dann haben wir die Gruppe:

$$[15] \quad \boxed{r,\ p,\ q,\ xq,\ xp - yq,\ yp}$$

oder es ist $C \neq 0$, dann führen wir $\frac{1}{C} z$ als neues z ein und finden die Gruppe:

$$[16] \quad \boxed{r,\ p,\ q + xr,\ xq + \tfrac{1}{2} x^2 r,\ xp - yq,\ yp + \tfrac{1}{2} y^2 r}\ .$$

Von diesen beiden Gruppen ist die erste unter den Gruppen [5] auf S. 151 enthalten, die zweite ist uns schon aus Abschn. II, S. 419 f. bekannt und zwar als eine irreducible Berührungstransformationsgruppe der Ebene x, z.

In der Gruppe (7) sei nunmehr $l > 1$.

Wir combiniren die Transformation: $F_1(x, y)r$ mit: $p + \xi_1 r$ und bekommen:

$$\left(F_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial z} - \frac{\partial F_1}{\partial x}\right) r;$$

hier muss der Factor von r eine Function von x und y allein sein, also ergiebt sich:

$$\xi_1 = \alpha_1(x, y)z + \beta_1(x, y)$$

und in gleicher Weise überhaupt:

$$\xi_k = \alpha_k(x, y)z + \beta_k(x, y) \quad (k = 1 \ldots 5).$$

An Stelle von z führen wir jetzt die neue Veränderliche:

$$z_1 = \varphi(x, y)z + \psi(x, y)$$

ein; dabei wird:

$$p + (\alpha_1 z + \beta_1)r = p + \{(\varphi_x + \alpha_1\varphi)z + \psi_x + \beta_1\varphi\}\, r_1,$$

wir können demnach über φ und ψ so verfügen, dass der Coefficient von r_1 verschwindet, mit andern Worten: wir dürfen in der Gruppe (7) von vornherein $\xi_1 = 0$ annehmen.

Weiter bekommen wir:

$$(p,\ q + (\alpha_2 z + \beta_2)r) = \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x} z + \frac{\partial \beta_2}{\partial x}\right) r$$

und schliessen daraus, dass α_2 von x frei ist; indem wir noch $\chi(y)z$ als neues z einführen und $\chi'(y) + \alpha_2\chi = 0$ wählen, erreichen wir überdies, dass α_2 verschwindet.

Durch Combination von p und $q + \beta_2(x, y)r$ mit:

$$(9) \qquad \begin{cases} xq + (\alpha_3 z + \beta_3)r, & yp + (\alpha_5 z + \beta_5)r \\ xp - yq + (\alpha_4 z + \beta_4)r \end{cases}$$

erkennen wir, dass α_3, α_4 und α_5 Constanten sind, und sodann durch paarweise Combination der Transformationen (9), dass diese Constanten verschwinden. Unsre Gruppe (7) hat demnach jetzt die Form:

$$(7') \qquad \begin{cases} p,\ q + \beta_2(x, y)r \\ xq + \beta_3(x, y)r, \quad xp - yq + \beta_4(x, y)r, \quad yp + \beta_5(x, y)r \\ F_1(x, y)r, \ \ldots \ F_l(x, y)r. \end{cases}$$

Zur Bestimmung der Functionen $F_1 \ldots F_l$ bilden wir die Transformation:

$$(p,\ F_k r) = \frac{\partial F_k}{\partial x} r,$$

die zeigt, dass F_k einer Differentialgleichung von der Form:

$$(10) \qquad \frac{\partial F_k}{\partial x} = \sum_1^l{}_\nu\, c_{k\nu} F_\nu$$

genügt, wo die $c_{k\nu}$ Constanten sind. Durch Combination mit: $yp + \beta_5 r$ bekommen wir ebenso eine Gleichung von der Form:

$$y\frac{\partial F_k}{\partial x} = \sum_1^l {}_\nu c'_{k\nu} F_\nu. \tag{10'}$$

Durch Verbindung der Gleichungen (10) und (10′) ergiebt sich jetzt leicht, dass jeder der $l+1$ Ausdrücke:

$$\frac{\partial^l F_k}{\partial x^l},\ y\frac{\partial^l F_k}{\partial x^l},\ y^2\frac{\partial^l F_k}{\partial x^l},\ \cdots\ y^l\frac{\partial^l F_k}{\partial x^l}$$

sich in der Form: $C_1 F_1 + \cdots + C_l F_l$ mit constanten Coefficienten C darstellen lässt; es muss mithin eine Gleichung von der Form:

$$(a_0 + a_1 y + \cdots + a_l y^l)\frac{\partial^l F_k}{\partial x^l} = 0$$

bestehen, in der die Constanten a nicht sämmtlich verschwinden. Daraus aber folgt, dass F_k eine ganze Function von x ist und zwar höchstens vom $(l-1)^{\text{ten}}$ Grade. Genau in derselben Weise, durch Combination mit: $q + \beta_2 r$ und mit $xq + \beta_3 r$, ergiebt sich, dass F_k auch eine ganze Function von y ist und zwar ebenfalls höchstens vom $(l-1)^{\text{ten}}$ Grade.

Wir wollen den — von Null verschiedenen — Grad, den die Function: $e_1 F_1 + \cdots + e_l F_l$ mit den l willkürlichen Parametern: $e_1 \ldots e_l$ in x und y zusammen besitzt, mit h bezeichnen, dann hat: $\Sigma e_k F_k$ jedenfalls die Form:

$$\sum_1^l {}_k e_k F_k = \lambda_0 x^h + \lambda_1 x^{h-1} y + \cdots + \lambda_{h-1} x y^{h-1} + \lambda_h y^h + \cdots,$$

wo die weggelassenen Glieder von der $(h-1)^{\text{ten}}$ und von niedrigerer Ordnung sind und wo die Constanten $\lambda_0 \ldots \lambda_h$ sicher nicht alle verschwinden. Combiniren wir jetzt die Transformation:

$$\sum_1^l {}_k e_k F_k \,.\, r$$

eine genügende Anzahl von Malen mit: $xq + \beta_3 r$ und mit: $yp + \beta_5 r$ so erkennen wir, dass unsre Gruppe eine Transformation von der Form:

$$x^\varrho y^\sigma r$$

enthält, wo ϱ und σ positive ganze Zahlen sind, deren Summe den Werth h besitzt. Durch fortgesetzte Combination mit:

$$xq + \beta_3 r,\ yp + \beta_5 r,\ p,\ q + \beta_2 r$$

ergiebt sich schliesslich, dass unsre Gruppe überhaupt jede Transformation von der Form:

$$x^{\varrho}\, y^{\sigma} \qquad (\varrho + \sigma \leq h)$$

enthält; es ist mithin: $\Sigma e_k F_k$ die allgemeinste ganze Function h^{ten} Grades von x und y.

Wir sind damit zu der folgenden Form unsrer Gruppe (7) gelangt:

$$(7'') \quad \begin{cases} r,\ xr,\ yr,\ x^2r,\ xyr,\ y^2r,\ \ldots \\ \ldots x^h r,\ x^{h-1}yr,\ \ldots y^h r \qquad (h>0) \\ p,\ q + \beta_2(x,y)\,r \\ xq + \beta_3(x,y)\,r,\ \ xp - yq + \beta_4(x,y)\,r,\ \ yp + \beta_5(x,y)\,r. \end{cases}$$

Durch Combination mit p zeigt sich, dass $q + \beta_2 r$ die Form hat:

$$(11) \qquad q + (\mathfrak{a}_0 x^{h+1} + \mathfrak{a}_1 x^h y + \cdots + \mathfrak{a}_h x y^h + Y)\,r;$$

hier sind in dem Coefficienten von r alle Glieder von h^{ter} und niedrigerer Ordnung in x und y weggelassen, weil die überflüssig sind. Y ist eine Function von y allein, kann aber ohne Weiteres gleich Null gesetzt werden, denn führt man: $z - \int Y dy$ als neues z ein, so verschwindet Y und die übrigen Transformationen unsrer Gruppe ändern sich entweder gar nicht oder nur unwesentlich.

Wir finden weiter, dass $xq + \beta_3 r$ nach Weglassung überflüssiger Glieder die Form besitzt:

$$(12) \quad \begin{cases} xq + \Big\{ \mathfrak{a}_0 \dfrac{x^{h+2}}{h+2} + \mathfrak{a}_1 \dfrac{x^{h+1}}{h+1} y + \cdots + \mathfrak{a}_h \dfrac{x^2}{2} y^h + \Phi(y) + \\ \qquad + \mathfrak{b}_0 x^{h+1} + \mathfrak{b}_1 x^h y + \cdots + \mathfrak{b}_h x y^h \Big\}\, r. \end{cases}$$

Hier dürfen die Constanten $\mathfrak{b}$ alle gleich Null gesetzt werden; um das einzusehen, braucht man nur:

$$z - \mathfrak{b}_0 x^h y - \mathfrak{b}_1 x^{h-1} \frac{y^2}{2} - \cdots - \mathfrak{b}_h \frac{y^{h+1}}{h+1}$$

als neues z einzuführen, wobei die übrigen infinitesimalen Transformationen der Gruppe ihre Gestalt nicht wesentlich ändern.

Combiniren wir jetzt die beiden Transformationen (11) und (12) mit einander, nachdem wir vorher Y und die $\mathfrak{b}$ gleich Null gesetzt haben, so bekommen wir eine Transformation von der Gestalt:

$$\Big\{ \mathfrak{a}_1 \Big(\frac{1}{h+1} - 1\Big) x^{h+1} + 2\mathfrak{a}_2 \Big(\frac{1}{h} - 1\Big) x^h y + \cdots + \\ + h\mathfrak{a}_h \big(\tfrac{1}{2} - 1\big) x^2 y^{h-1} + \Phi'(y) \Big\}\, r,$$

die unsrer Gruppe angehören muss. Da nun $h > 0$ ist, so können wir schliessen, dass $\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_h$ verschwinden; ferner muss $\Phi'(y)$ eine ganze

Function h^{ten} Grades von y sein, wir können daher mit Weglassung der Glieder von h^{ter} und niedriger Ordnung $\Phi(y) = \mathfrak{b} y^{h+1}$ setzen.

Die Transformationen (11) und (12) lauten nunmehr:

$$q + \mathfrak{a}_0 x^{h+1} r,\ xq + \left(\mathfrak{a}_0 \frac{x^{h+2}}{h+2} + \mathfrak{b} y^{h+1}\right) r;$$

indem wir sie mit: $xp - yq + \beta_4(x, y) r$ combiniren, finden wir die Transformationen:

$$-q + \left(\frac{\partial \beta_4}{\partial y} - (h+1)\mathfrak{a}_0 x^{h+1}\right) r$$

$$-2xq + \left(x \frac{\partial \beta_4}{\partial y} - \mathfrak{a}_0 x^{h+2} + (h+1)\mathfrak{b} y^{h+1}\right) r,$$

es müssen also Gleichungen von der Form:

$$\frac{\partial \beta_4}{\partial y} - (h+1)\mathfrak{a}_0 x^{h+1} = -\mathfrak{a}_0 x^{h+1} + G_h(x, y)$$

$$x \frac{\partial \beta_4}{\partial y} - \mathfrak{a}_0 x^{h+2} + (h+1)\mathfrak{b} y^{h+1} = -2\mathfrak{a}_0 \frac{x^{h+2}}{h+2} - 2\mathfrak{b} y^{h+1} + \mathfrak{G}_h(x, y)$$

bestehen, unter G_h und $\mathfrak{G}_h$ ganze Functionen h^{ten} Grades von x und y verstanden. Diese Gleichungen zeigen zunächst, dass $\mathfrak{b}$ verschwindet und dass $\mathfrak{G}_h$ durch x theilbar ist; weiter lassen sie erkennen, dass auch $\mathfrak{a}_0$ den Werth Null hat und dass G_h die Veränderlichen x und y höchstens im $(h-1)^{\text{ten}}$ Grade enthält. Hieraus wiederum ergiebt sich, dass β_4, wenn von überflüssigen Gliedern abgesehen wird, eine Function von x allein ist; durch Combination mit p zeigt sich überdies, dass $\beta_4 = c x^{h+1}$ gesetzt werden kann. Führen wir endlich: $z - c \frac{x^{h+1}}{h+1}$ als neues z ein, so wird auch c gleich Null.

Um die noch übrige Transformation: $yp + \beta_5(x, y) r$ zu bestimmen, combiniren wir sie mit:

$$p,\ q,\ xq,\ xp - yq$$

und überzeugen uns zunächst, dass:

$$\frac{\partial \beta_5}{\partial x},\ \frac{\partial \beta_5}{\partial y},\ x \frac{\partial \beta_5}{\partial y},\ x \frac{\partial \beta_5}{\partial x} - y \frac{\partial \beta_5}{\partial y} + 2\beta_5$$

sämmtlich ganze Functionen von x, y sind und zwar höchstens vom Grade h. Das aber ist offenbar nur möglich, wenn die Differentialquotienten:

$$\frac{\partial \beta_5}{\partial x},\ \frac{\partial \beta_5}{\partial y}$$

höchstens vom $(h-1)^{\text{ten}}$ Grade sind, wenn also β_5 selbst den h^{ten} Grad nicht übersteigt. Infolge dessen können wir β_5 ohne Weiteres gleich Null setzen und erhalten für unsre Gruppe (7) die einfache Form:

$$[17] \quad \boxed{p,\ q,\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ x^{\varrho} y^{\sigma} r \atop (\varrho + \sigma = 0, 1, 2 \ldots h)} .$$

Hierin soll die ganze positive Zahl h allerdings zunächst > 0 sein, doch erhalten wir auch im Falle $h = 0$ eine Gruppe, nämlich die früher aufgestellte [15].

Wir kommen zu den Gruppen von der Form:

$$(13) \quad \begin{cases} p + \xi_1 r,\ q + \xi_2 r,\ xq + \xi_3 r,\ xp - yq + \xi_4 r,\ yp + \xi_5 r \\ F_1(x,y)\, r, \ldots F_l(x,y)\, r,\ zr, \end{cases}$$

also zu denen, deren invariante Untergruppe:

$$F_1(x,y)\, r, \ldots F_l(x,y)\, r,\ zr$$

die Punkte jeder Geraden: $x = x_0$, $y = y_0$ zweigliedrig transformirt.

Durch Combination mit: $F_1(x,y)\, r$ bekommen wir Gleichungen von der Form:

$$F_1(x,y) \frac{\partial \xi_k}{\partial z} - \chi_k(x,y) = a_k z + \sum_1^l{}_{\nu} c_{k\nu} F_\nu(x,y) \qquad (k = 1 \ldots 5),$$

es ist also:

$$\xi_k = \alpha_k(x,y)\, z^2 + \beta_k(x,y)\, z + \gamma_k(x,y);$$

auf der andern Seite ergiebt sich durch Combination mit zr:

$$z \frac{\partial \xi_k}{\partial z} - \xi_k = a_k' z + \sum_1^l{}_{\nu} c_{k\nu}' F_\nu(x,y),$$

folglich verschwinden die α_k, die γ_k aber haben die Form:

$$\gamma_k = - \sum_1^l{}_{\nu} c_{k\nu}' F_\nu(x,y)$$

und können demnach gleich Null gesetzt werden.

Nun erzeugen augenscheinlich die sechs infinitesimalen Transformationen:

$$(14) \quad \begin{cases} zr,\ p + \beta_1(x,y)\, zr,\ q + \beta_2(x,y)\, zr \\ xq + \beta_3(x,y)\, zr,\ xp - yq + \beta_4(x,y)\, zr,\ yp + \beta_5(x,y)\, zr \end{cases}$$

eine sechsgliedrige Untergruppe der Gruppe (13). Diese Untergruppe nimmt, wenn man $z_1 = lz$ an Stelle von z einführt, die Form (8) auf S. 157 an; wir können daher die damaligen Auseinandersetzungen über die Gruppe (8) sofort auf die Gruppe (14) übertragen und können schliessen, dass die Gruppe (14) auf die Form:

$$zr,\ p,\ q + Cxzr,\ xp - yq$$
$$xq + \tfrac{1}{2} Cx^2 zr,\ yp + \tfrac{1}{2} Cy^2 zr$$

gebracht werden kann, wenn man einen geeigneten Ausdruck: $z\varphi(x,y)$ als neues z einführt. Die übrigen infinitesimalen Transformationen:

$$F_1(x,y)r \ldots F_l(x,y)r$$

der Gruppe (13) ändern dabei ihre Form nicht wesentlich.

Die Bestimmung der Functionen $F_1 \ldots F_l$ würde sehr einfach sein, wenn die Constante $C = 0$ wäre und wirklich — es lässt sich nachweisen, dass C keinen von Null verschiedenen Werth haben kann.

Combiniren wir nämlich $F_k r$ mit p und mit $yp + \frac{1}{2}Cy^2 zr$, so ergeben sich Gleichungen von der Form:

$$(15) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F_k}{\partial x} = \sum_1^l{}^{\nu} \mathfrak{a}_{k\nu} F_\nu \\ y\dfrac{\partial F_k}{\partial x} - \frac{1}{2}Cy^2 F_k = \sum_1^l{}^{\nu} \mathfrak{b}_{k\nu} F_\nu , \end{cases}$$

wo die $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Constanten sind; hieraus folgt sofort:

$$\tfrac{1}{2}Cy^2 F_k = y \sum_1^l{}^{\nu} \mathfrak{a}_{k\nu} F_\nu - \sum_1^l{}^{\nu} \mathfrak{b}_{k\nu} F_\nu .$$

Wäre $C \neq 0$, so würden überhaupt für jede ganze positive Zahl $\tau > 1$ l Relationen von der Form:

$$y^\tau F_k = y \sum_1^l{}^{\nu} \mathfrak{a}_{\tau k\nu} F_\nu + \sum_1^l{}^{\nu} \mathfrak{b}_{\tau k\nu} F_\nu \quad (k = 1 \ldots l)$$

bestehen, das aber ist nur möglich, wenn $F_1 \ldots F_l$ sämmtlich verschwinden, was ausgeschlossen ist. Folglich muss $C = 0$ sein.

Da C verschwindet, erkennen wir aus den Gleichungen (15) genau so wie auf S. 159 f., dass die F_k ganze Functionen von x sind, überhaupt lässt sich die damalige Entwickelung zur Bestimmung der F_k Wort für Wort auf den gegenwärtigen Fall anwenden. Kurz, wir finden, dass unsre Gruppe (13) die Form erhält:

$$[18] \qquad \boxed{p,\ q,\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ zr,\ x^\varrho y^\sigma r \quad (\varrho + \sigma = 0, 1, 2 \ldots h)}$$

wo h eine positive ganze Zahl $\geqq 0$ bezeichnet. Ist insbesondere $h = 0$, so gehört die Gruppe [18] zu den auf S. 152 gefundenen Gruppen [8], sie wird erhalten, wenn man dort a und m gleich Null setzt.

Uebrig bleiben nur noch die Gruppen von der Form:

$$(16) \qquad \begin{cases} p + \xi_1 r,\ q + \xi_2 r \\ xq + \xi_3 r,\ xp - yq + \xi_4 r,\ yp + \xi_5 r \\ r,\ zr,\ z^2 r, \end{cases}$$

deren invariante Untergruppe: r, zr, z^2r die Punkte jeder Geraden: $x = x_0$, $y = y_0$ dreigliedrig transformirt.

Um $\xi_1 \ldots \xi_5$ zu bestimmen, combiniren wir mit r und zr und bekommen Relationen von der Form:

$$\frac{\partial \xi_k}{\partial z} = a_k + b_k z + c_k z^2$$

$$z\frac{\partial \xi_k}{\partial z} - \xi_k = a_k' + b_k' z + c_k' z^2,$$

hieraus aber folgt sofort, dass ξ_k von x und y frei und eine ganze Function zweiten Grades von z ist; wir können demnach alle $\xi_k = 0$ setzen und erhalten die Gruppe:

[19] $\boxed{p,\ q,\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ r,\ zr,\ z^2r}$

also die Gruppe [11] auf S. 154 für $m = 0$.

§ 43.

Die Curven: $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ werden sechsgliedrig transformirt.

Wir müssen jetzt zu jeder der Gruppen [13] ... [19] in allgemeinster Weise eine solche infinitesimale Transformation:

$$Xf = xp + yq + \xi(x, y, z)r$$

hinzufügen, dass eine Gruppe entsteht.

Soll Xf zu der Gruppe [13] hinzutreten, so muss ξ eine blose Constante sein, das ergiebt sich, wenn man Xf der Reihe nach mit p, q und $xq + r$ combinirt. Ferner wird:

$$(xp - yq - 2zr,\ Xf) = 2\xi r,$$

also muss $\xi = 0$ sein und wir bekommen die Gruppe:

[20] $\boxed{p,\ q,\ xq + r,\ xp - yq - 2zr,\ yp - z^2r,\ xp + yq}$.

Im Falle der Gruppe [14] erkennen wir durch Combination mit p und q, dass ξ eine Function von z allein ist. Verschwindet ξ, so haben wir die Gruppe:

[21] $\boxed{p,\ q,\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq}$

ist dagegen $\xi \neq 0$, so können wir durch geeignete Wahl von z erreichen, dass die gesuchte Gruppe die Form:

[22] $\boxed{p,\ q,\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq + r}$

annimmt. Von diesen beiden Gruppen haben wir die erste schon einmal gefunden, sie gehört nämlich zu den Gruppen [3] auf S. 149.

Die Gruppe [15] brauchen wir nicht besonders zu behandeln, weil sie unter den Gruppen von der Form [17] enthalten ist. Wir fügen daher gleich zu [17] die Transformation Xf hinzu.

Durch Combination mit p, q, xq und yp ergiebt sich, dass:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x},\ \frac{\partial \zeta}{\partial y},\ x\frac{\partial \zeta}{\partial y},\ y\frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

ganze Functionen von x und y sind und zwar höchstens vom Grade h, folglich hat ζ die Form:

$$\zeta = \varphi(z) + \sum_{i,k}^{i+k \leqq h} a_{ik} x^i y^k,$$

wo die a_{ik} ohne Weiteres gleich Null gesetzt werden können. Um $\varphi(z)$ zu bestimmen, combiniren wir mit r und finden, dass φ eine lineare Function von z ist. Demnach lautet die gesuchte Gruppe folgendermassen:

[23] $$\boxed{p,\ q,\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq + azr,\ x^\varrho y^\sigma r \quad (\varrho + \sigma = 0, 1, 2 \ldots h)}.$$

Der willkürliche Parameter a kann nicht fortgeschafft werden; ist dieser Parameter insbesondere gleich Null und verschwindet überdies h, so gehört die Gruppe [23] unter die von der Form [6] auf S. 151. Ist $a \neq 0$ aber $h = 0$, so ist die Gruppe [23] unter denen von der Form [8] auf S. 152 enthalten.

Soll aus der Gruppe [16] durch Hinzufügung von Xf eine Gruppe entstehen, so muss ζ die Form: $2z + ax + by$ besitzen — das zeigt sich, wenn man Xf der Reihe nach mit p, r, $q + xr$ combinirt; durch Combination mit $xp - yq$ erkennt man aber sofort, dass a und b Null sind. Man gelangt also zu der Gruppe:

[24] $$\boxed{r,\ p,\ q + xr,\ xq + \tfrac{1}{2}x^2 r,\ xp - yq,\ yp + \tfrac{1}{2}y^2 r,\ xp + yq + 2zr}$$

die uns schon in Abschn. II auf S. 425 als irreducible Berührungstransformationsgruppe der Ebene x, z begegnet ist.

Aus der Gruppe [18] erhalten wir sehr leicht die nachstehende:

[25] $$\boxed{\begin{array}{c} p,\ q,\ xq,\ xp - yq,\ yp \\ xp + yq,\ zr,\ x^\varrho y^\sigma r \\ (\sigma + \varrho = 0, 1, 2 \ldots h) \end{array}}$$

die, sobald h den Werth Null hat, zu den Gruppen [9] auf S. 153 gehört. Aus der Gruppe [19] endlich ergiebt sich diese:

[26] $$\begin{array}{|c|}\hline p,\ q,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq \\ r,\ zr,\ z^2 r \\ \hline \end{array}$$

die mit der Gruppe [12] auf S. 154 zusammenfällt, wenn $m = 0$ ist.

§ 44.

Die Curven: $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ werden achtgliedrig transformirt.

Zu jeder von den Gruppen [20] . . . [26] müssen jetzt noch zwei infinitesimale Transformationen von der Gestalt:

$$X_1 f = x^2 p + xyq + \zeta_1(x, y, z)\, r$$
$$X_2 f = xyp + y^2 q + \zeta_2(x, y, z)\, r$$

hinzugefügt werden.

Bei der Gruppe [20] erhalten wir:

$$(p,\ X_1 f) = 2xp + yq + \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} r$$

und dieser Ausdruck muss die Form:

$$\tfrac{3}{2}(xp + yq) + \tfrac{1}{2}(xp - yq - 2zr)$$

besitzen, es ist also: $\dfrac{\partial \zeta_1}{\partial x} = -z.$

Andrerseits ergiebt sich durch Combination mit q:

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial y} = 1,$$

so dass wir finden:

$$X_1 f = x^2 p + xyq + (y - xz + \psi(z))\, r.$$

Nun aber ist:

$$(xp + yq,\ X_1 f) = x^2 p + xyq + (y - xz)\, r,$$

folglich verschwindet ψ; endlich erhalten wir:

$$(yp - z^2 r,\ X_1 f) = xyp + y^2 q + z(y - xz)\, r$$
$$= X_2 f.$$

Die gesuchte Gruppe lautet:

[27] $$\begin{array}{|l|}\hline p,\ q,\ xq + r,\ xp - yq - 2zr,\ yp - z^2 r,\ xp + yq \\ x^2 p + xyq + (y - xz)\, r,\ xyp + y^2 q + z(y - xz)\, r \\ \hline \end{array}.$$

Aus den Gruppen [21] und [22] erhalten wir, indem wir $X_1 f$ der Reihe nach mit p, q, $xp - yq$ und yp combiniren, ohne Schwierigkeit die folgenden zwei:

[28] $$\begin{array}{|l|}\hline p,\ q,\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq,\ x^2 p + xyq,\ xyp + y^2 q \\ \hline \end{array}$$

[29] $$\begin{array}{|l|}\hline p,\ q,\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq + r \\ x^2 p + xyq + \tfrac{3}{2}xr,\ xyp + y^2 q + \tfrac{3}{2}yr \\ \hline \end{array}$$

von denen die erste keine andre ist als die Gruppe [1] auf S. 145.

Um die Gruppe zu finden, die aus der Gruppe [23] durch Hinzufügung von $X_1 f$ und $X_2 f$ entsteht, combiniren wir $X_1 f$ zunächst mit $x^h r$ und mit $y^h r$. Das liefert uns zwei Gleichungen von der Form:

$$(17) \quad x^h \frac{\partial \xi_1}{\partial z} - h x^{h+1} = G_1(x, y), \; y^h \frac{\partial \xi_1}{\partial z} - h x y^h = G_2(x, y),$$

wo G_1 und G_2 ganze Functionen h^{ten} oder niedrigeren Grades von x und y sind. Durch Verbindung dieser beiden Gleichungen erkennen wir, dass:

$$(18) \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial z} = hx + b$$

ist, wo b eine Constante bezeichnet.

Nunmehr combiniren wir $X_1 f$ der Reihe nach mit p, q und xq und erhalten Gleichungen von der Form:

$$(19) \quad \begin{cases} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} = \frac{3a}{2} z + G_3(x, y), \; \frac{\partial \xi_1}{\partial y} = G_4(x, y) \\ x \frac{\partial \xi_1}{\partial y} = G_5(x, y), \end{cases}$$

unter G_3, G_4, G_5 wieder ganze Functionen h^{ten} oder niedrigeren Grades von x und y verstanden. Aus (19) folgt unmittelbar, dass G_4 höchstens vom $(h-1)^{\text{ten}}$ Grade in x und y ist und dass G_3 die Form besitzt:

$$G_3(x, y) = cx^h + \sum_{i,k}^{i+k<h} c_{ik} x^i y^k.$$

Aus (18) und (19) zusammengenommen ergiebt sich ferner: $a = \frac{2}{3} h$ und:

$$\xi_1 = hxz + bz + c \frac{x^{h+1}}{h+1},$$

wo die Glieder von h^{ter} und niedrigerer Ordnung in x und y als überflüssig weggelassen sind.

Endlich combiniren wir $X_1 f$ mit $xp - yq$ und bekommen:

$$x \frac{\partial \xi_1}{\partial x} - y \frac{\partial \xi_1}{\partial y} = \xi_1 + \sum_{i,k}^{i+k \leq h} d_{ik} x^i y^k;$$

setzen wir hier für ξ_1 den vorhin gefundenen Werth ein, so erkennen wir, dass b verschwindet und dass $X_1 f$ die Form hat:

$$X_1 f = x^2 p + xyq + hxzr + cxr,$$

wo c immer $= 0$ ist, wenn $h \neq 0$; zugleich wird:

$$(yp, X_1 f) = xyp + y^2 q + hyzr + cyr = X_2 f.$$

Ist $h \neq 0$ oder $h = 0$ und $c = 0$, so haben wir die Gruppe:

[30]

$$\begin{array}{c} p, \; q, \; xq, \; xp - yq, \; yp, \; xp + yq + \frac{2h}{3} zr \\ x^2 p + xyq + hxzr, \; xyp + y^2 q + hyzr \\ x^\varrho y^\sigma r \quad (\varrho + \sigma = 0, 1, 2 \ldots h) \end{array}$$

die für $h = 0$ mit der Gruppe [4], S. 149 zusammenfällt. Ist aber $h = 0$ und $c \neq 0$, so führen wir: $e^{\frac{z}{c}}$ als neues z ein und erhalten die Gruppe:

[31] $$\begin{array}{|c|}\hline p,\ q,\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq,\ zr \\ x^2p + xyq + xzr,\ \ xyp + y^2q + yzr \\ \hline\end{array}.$$

Aus der Gruppe [24] kann durch Hinzufügung von X_1f und X_2f keine Gruppe entstehen, denn durch Combination von X_1f mit p und r zeigt sich, dass ζ_1 zwei Differentialgleichungen von der Form:

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial x} = 3z + a, \quad \frac{\partial \zeta_1}{\partial z} = b$$

genügen müsste, was offenbar unmöglich ist.

Fügen wir X_1f und X_2f zu der Gruppe [25] hinzu, so ergeben sich durch Combination von X_1f mit x^hr und y^hr zwei Gleichungen von der Form:

$$x^h \frac{\partial \zeta_1}{\partial z} - hx^{h+1} = G_1(x, y) + a_1 z$$

$$y^h \frac{\partial \zeta_1}{\partial z} - hxy^h = G_2(x, y) + a_2 z,$$

wo G_1 und G_2 dieselbe Bedeutung haben wie in den Gleichungen (17) auf S. 168. Wir schliessen hieraus, dass a_1 und a_2 verschwinden und dass:

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial z} = hx + b$$

ist. Ferner bekommen wir durch Combination mit zr eine Gleichung:

$$z \frac{\partial \zeta_1}{\partial z} - \zeta_1 = \sum_{i,k}^{i+k \leq h} a_{ik} x^i y^k + a_3 z,$$

es wird also:

$$\zeta_1 = hxz + bz - a_3 z - \sum_{i,k}^{i+k \leq h} a_{ik} x^i y^k,$$

wo aber die Constanten b, a_3 und a_{ik} ohne Weiteres gleich Null gesetzt werden können. Endlich wird:

$$(yp,\ X_1f) = xyp + y^2q + hyzr,$$

es entsteht also die Gruppe:

[32] $$\begin{array}{|c|}\hline p,\ q,\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq \\ x^2p + xyq + hxzr,\ \ xyp + y^2q + hyzr \\ zr,\ \ x^\varrho y^\sigma r \quad (\varrho + \sigma = 0, 1, 2 \ldots h) \\ \hline\end{array}$$

die für $h = 0$ mit der Gruppe [7] auf S. 152 zusammenfällt.

Endlich haben wir noch $X_1 f$ und $X_2 f$ zu der Gruppe [26] hinzuzufügen; durch Combination mit r und zr finden wir sofort, dass ζ_1 und ζ_2 von x und y frei und ganze Functionen zweiten Grades von z sein müssen. Die so erhaltene Gruppe:

[33]
$$\begin{array}{c} p,\ q,\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq \\ x^2 p + xyq,\ xyp + y^2 q \\ r,\ zr,\ z^2 r \end{array}$$

haben wir schon auf S. 153 als Gruppe [10] kennen gelernt.

Die Aufgabe, die wir uns in § 41 gestellt haben, ist nunmehr erledigt. Es gilt der

Satz 3. *Lässt eine endliche continuirliche Gruppe des Raumes x, y, z eine Curvenschaar:*

$$\varphi(x, y, z) = \text{const.}, \quad \psi(x, y, z) = \text{const.}$$

invariant, dagegen keine Flächenschaar von der Form:

$$\Omega(\varphi(x, y, z),\ \psi(x, y, z)) = \text{const.},$$

so ist sie durch eine Punkttransformation des Raumes x, y, z mit einer der Gruppen: [13] ... [33] *ähnlich.*

§ 45.

Allgemeine Bemerkungen über die noch fehlenden imprimitiven Gruppen des Raumes x, y, z.

Es fehlen jetzt noch alle Gruppen des Raumes, bei denen eine Curvenschaar: $\varphi = \text{const.}$, $\psi = \text{const.}$ invariant bleibt, deren Curven in eine invariante Schaar von ∞^1 Flächen: $\Omega(\varphi, \psi) = \text{const.}$ zusammengefasst werden können. Wählen wir die Veränderlichen x, y, z so, dass die invariante Flächenschaar die Form: $x = \text{const.}$ und die invariante Curvenschaar die Form: $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ erhält, so lauten die infinitesimalen Transformationen einer jeden m-gliedrigen Gruppe G_m von der betreffenden Art folgendermassen:

(20)
$$\left\{ X_k f = \xi_k(x) p + \eta_k(x, y) q + \zeta_k(x, y, z) r \right.$$
$$(k = 1 \ldots m).$$

Es würde sich also darum handeln, alle Gruppen von dieser Form zu bestimmen.

Wir begnügen uns, wie schon auf S. 141 angekündigt wurde, mit einigen Andeutungen.

Zu der Gruppe G_m gehört eine gewisse verkürzte Gruppe in den

zwei Veränderlichen x und y. Diese verkürzte Gruppe wird von den m verkürzten infinitesimalen Transformationen:

$$\overline{X}_k f = \xi_k(x) p + \eta_k(x, y) q \quad (k = 1 \ldots m)$$

erzeugt, sie ist mit der G_m isomorph und giebt an, in welcher Weise die ∞^2 Geraden: $x =$ const., $y =$ const. bei der G_m transformirt werden, sie ist überdies augenscheinlich imprimitiv. Insbesondere kann es sogar vorkommen, dass die verkürzte Gruppe auf die identische Transformation zusammenschrumpft.

In Kapitel 3 und 4 haben wir alle imprimitiven Gruppen in zwei Veränderlichen auf gewisse Normalformen zurückgeführt, wir können uns daher die Veränderlichen x und y von vornherein so gewählt denken, dass die verkürzte Gruppe: $\overline{X}_1 f \ldots \overline{X}_m f$ eine der damals gefundenen Normalformen erhält. Thun wir das und nehmen wir etwa an, dass die verkürzte Gruppe l-gliedrig ist, so lassen sich die infinitesimalen Transformationen der G_m folgendermassen schreiben:

$$(21) \quad \begin{cases} X_k f = \xi_k(x) p + \eta_k(x, y) q + \zeta_k(x, y, z) r & (k = 1 \ldots l) \\ X_{l+j} f = F_j(x, y, z) r & (j = 1 \ldots m - l), \end{cases}$$

wo nunmehr die l verkürzten infinitesimalen Transformationen:

$$(22) \quad \overline{X}_k f = \xi_k(x) p + \eta_k(x, y) q \quad (k = 1 \ldots l)$$

in den Veränderlichen x und y von einander unabhängig sind und eine l-gliedrige imprimitive Gruppe erzeugen, die eine der auf S. 71 ff. angegebenen Normalformen besitzt.

Aus den vorstehenden Betrachtungen erhellt, dass die Aufgabe, alle Gruppen von der Form (20) zu bestimmen, in eine Reihe von einzelnen Aufgaben zerfällt; um alle diese Gruppen zu finden, muss man nämlich für die verkürzte Gruppe (22) der Reihe nach alle auf S. 71 ff. zusammengestellten imprimitiven Gruppen in x und y einsetzen und muss jedesmal, wenn man die Gruppe (22) gewählt hat, alle Gruppen von der Form (21) aufsuchen.

Es fragt sich jetzt noch, wie man alle Gruppen von der Form (21) findet, wenn man die verkürzte Gruppe (22) in bestimmter Weise gewählt hat.

Um diese Frage zu beantworten, gehen wir davon aus, dass die $m - l$ unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

$$(23) \quad X_{l+j} f = F_j(x, y, z) r \quad (j = 1 \ldots m - l)$$

eine $(m - l)$-gliedrige invariante Untergruppe der Gruppe (21) erzeugen, nämlich die grösste Untergruppe dieser Gruppe, bei der alle ∞^2 Geraden: $x =$ const., $y =$ const. in Ruhe bleiben. Wir sind bereits auf S. 155 Gruppen von der Form (23) begegnet und haben damals

gezeigt, dass vier Fälle zu unterscheiden sind. Erstens nämlich kann die Gruppe (23) blos aus der identischen Transformation bestehen; das tritt ein, wenn $m - l$ den Werth Null hat. In den drei übrigen Fällen kann man die Gruppe (23) stets dadurch auf eine gewisse einfache Form bringen, dass man eine geeignete Function von x, y, z als neues z einführt, und zwar kann man im zweiten Falle stets die Form:

$$F_1(x, y)r, \ldots F_{m-l}(x, y)r \quad (m-l>0)$$

erreichen, im dritten Falle die Form:

$$F_1(x, y)r, \ldots F_{m-l-1}(x, y)r, \; zr \quad (m-l>1),$$

im vierten Falle endlich die Form:

$$r, \; zr, \; z^2r.$$

Entsprechend diesen vier Fällen müssen wir auch bei der Gruppe (21) vier Fälle unterscheiden, wenn die verkürzte Gruppe (22) gegeben ist. Im ersten Falle hat die Gruppe (21) die folgende Gestalt:

$$\xi_k(x)p + \eta_k(x, y)q + \zeta_k(x, y, z)r \quad (k=1 \ldots l) \tag{24}$$

im zweiten diese:

$$\begin{cases} \xi_k(x)p + \eta_k(x, y)q + \zeta_k(x, y, z)r & (k=1 \ldots l) \\ F_j(x, y)\, r & (j=1 \ldots h) \end{cases} \tag{25}$$

wo $h > 0$ ist, im dritten Falle diese:

$$\begin{cases} \xi_k(x)p + \eta_k(x, y)q + \zeta_k(x, y, z)r & (k=1 \ldots l) \\ zr, \; F_j(x, y)\, r & (j=1 \ldots h), \end{cases} \tag{26}$$

wo ebenfalls $h > 0$ sein muss, endlich im vierten Falle lautet die Gruppe (21) so:

$$\begin{cases} \xi_k(x)p + \eta_k(x, y)q + \zeta_k(x, y, z)r & (k=1 \ldots l) \\ r, \; zr, \; z^2r. \end{cases} \tag{27}$$

Es kommt demnach jetzt alles darauf an, die Functionen $\xi_1 \ldots \xi_l$ und $F_1 \ldots F_h$ in jedem Falle in allgemeinster Weise so zu bestimmen, dass eine Gruppe entsteht, und dann diese Gruppe durch geeignete Wahl der Veränderlichen z auf eine möglichst einfache Form zu bringen.

Die Rechnungen, die hierzu erforderlich sind, bieten keine grundsätzlichen Schwierigkeiten. Zum Beispiel können wir alle Gruppen von der Form (27) sofort hinschreiben; in diesem Falle ergiebt sich nämlich durch Combination mit r und zr, dass $\xi_1 \ldots \xi_l$ von x und y frei und ganze Functionen zweiten Grades von z sind, wir dürfen daher $\xi_1 \ldots \xi_l$ gleich Null setzen und finden, dass zu jeder verkürzten Gruppe (22) blos eine Gruppe von der Form (27) gehört, nämlich diese:

$$\xi_k(x)p + \eta_k(x, y)q \quad (k = 1 \ldots l)$$
$$r,\ zr,\ z^2r.$$

Weitläufiger gestalten sich die Rechnungen in den übrigen Fällen, aber sie lassen sich immer wirklich durchführen.

Man kann auch noch eine andere Methode anwenden, um die hier besprochenen Gruppen zu bestimmen.

Ist $\mathfrak{G}_m$ eine m-gliedrige Gruppe von der verlangten Beschaffenheit, so giebt es mindestens eine bei $\mathfrak{G}_m$ invariante Schaar von ∞^1 Flächen. Bringen wir diese Flächenschaar auf die Form: $z = \text{const.}$ und führen wir dann noch eine geeignete Function von z als neues z ein, so erscheint $\mathfrak{G}_m$ in der Form:

$$\alpha_k(x, y, z)p + \beta_k(x, y, z)q + (a_k + b_k z + c_k z^2)r$$
$$(k = 1 \ldots m).$$

Unsre $\mathfrak{G}_m$ enthält eine invariante Untergruppe:

$$X_j f = \xi_j(x, y, z)p + \eta_j(x, y, z)q \quad (j = 1 \ldots l), \tag{28}$$

bei der jede der ∞^1 Ebenen: $z = \text{const.}$ invariant bleibt und deren Parameterzahl l mindestens gleich $m - 3$ ist. Da überdies die $\mathfrak{G}_m$ mindestens eine Curvenschaar von der Form: $z = \text{const.}$, $\varphi(x, y) = \text{const.}$ invariant lässt, so ist klar, dass die Gruppe (28) jede der ∞^1 Ebenen: $z = \text{const.}$ imprimitiv transformirt. Umgekehrt folgt aus den Betrachtungen auf S. 142 f., dass die $\mathfrak{G}_m$ nur dann eine Curvenschaar von der Form: $z = \text{const.}$, $\varphi(x, y) = \text{const.}$ invariant lässt, wenn ihre invariante Untergruppe (28) jede der ∞^1 Ebenen: $z = \text{const.}$ imprimitiv transformirt. Demnach ergiebt sich, dass auch das folgende Verfahren zur Bestimmung der hier gesuchten Gruppen führen muss:

Man sucht zunächst alle Gruppen von der Form (28), bei denen jede der ∞^1 Ebenen: $z = \text{const.}$ imprimitiv transformirt wird, und bringt sie durch geeignete Transformationen von der Gestalt:

$$x_1 = \chi(x, y, z),\quad y_1 = \psi(x, y, z),\quad z_1 = z \tag{29}$$

auf möglichst einfache Normalformen. Zu jeder der gefundenen Gruppen fügt man in allgemeinster Weise eine infinitesimale Transformation von der Form:

$$r + \alpha_0(x, y, z)p + \beta_0(x, y, z)q$$

derart hinzu, dass wieder eine Gruppe entsteht und bringt diese Gruppe durch Transformationen (29) auf Normalformen. Zu den so gefundenen Gruppen fügt man wieder eine Transformation:

$$zr + \alpha_1(x, y, z)p + \beta_1(x, y, z)q$$

hinzu und endlich fügt man drittens noch eine Transformation:

$$z^2r + \alpha_2(x, y, z)p + \beta_2(x, y, z)q$$

hinzu. Dabei darf man übrigens den Fall nicht vergessen, dass die Gruppe (28) auf die identische Transformation zusammenschrumpft.

Wie findet man aber die Gruppen von der Form (28)?

Da die Gruppe (28) jede der ∞^1 Ebenen: $z = \text{const.}$ imprimitiv transformirt, so verwandelt sie sich, wenn man dem z einen constanten Werth c ertheilt, in eine imprimitive Gruppe:

$$(30) \qquad \mathfrak{X}_j f = \xi_j(x, y, c)\, p + \eta_j(x, y, c)\, q \quad (j = 1 \dots l)$$

in den zwei Veränderlichen x, y und zwar ist die Gruppe (30) augenscheinlich mit der Gruppe (28) isomorph. Die Gruppe (30) kann nun durch geeignete Wahl von x und y in eine der imprimitiven Gruppen übergeführt werden, die auf S. 71—73 zusammengestellt sind. Verstehen wir daher unter:

$$U_k f = u_k(x)\, p + v_k(x, y)\, q \quad (k = 1 \dots h)$$

eine gewisse unter den imprimitiven Gruppen auf S. 71 ff., so leuchtet ein, dass die Gruppe (28) stets durch eine Transformation (29) auf die Form:

$$(28') \qquad X_j f = \sum_1^h {}_\tau Z_{j\tau} U_\tau f \quad (j = 1 \dots l)$$

gebracht werden kann, unter den $Z_{j\tau}$ Functionen von z allein verstanden.

Um daher alle Gruppen von der Form (28) zu finden, bei denen jede Ebene: $z = \text{const.}$ imprimitiv transformirt wird, muss man in (28′) für $U_1 f \dots U_h f$ der Reihe nach jede einzelne der imprimitiven Gruppen auf S. 71—73 einsetzen, sodann muss man in jedem einzelnen Falle die $Z_{j\tau}$ in allgemeinster Weise derart als Functionen von z allein bestimmen, dass eine Gruppe entsteht, deren Gliederzahl mindestens gleich h ist, endlich muss man die Gruppe (28′) durch Transformationen von der Form (29) auf möglichst einfache Normalformen bringen; dabei darf man jedoch nur solche Transformationen von der Form (29) benutzen, die so beschaffen sind, dass die Gruppe: $U_1 f \dots U_h f$ bei der Transformation:

$$(29') \qquad x_1 = \chi(x, y, c), \quad y_1 = \psi(x, y, c)$$

mit dem willkürlichen Parameter c invariant bleibt.

Auch diese Rechnungen lassen sich immer durchführen; besonders einfach gestalten sie sich dann, wenn die Gruppe: $U_1 f \dots U_h f$ der Ebene x, y die ∞^1 Curven $x = \text{const.}$ dreigliedrig transformirt, wir wollen daher auf diesen Fall etwas näher eingehen.

Wenn die Gruppe: $U_1 f \dots U_h f$ die Curven: $x = \text{const.}$ dreigliedrig transformirt, so hat sie die Form:

$$(31)\qquad \begin{cases} V_1 f = p + w_1(x,y)\,q, \quad V_2 f = xp + w_2(x,y)\,q \\ V_3 f = x^2 p + w_3(x,y)\,q \\ W_\tau f = w_{3+\tau}(x,y)\,q \\ \qquad (\tau = 1 \ldots h-3). \end{cases}$$

Hier erzeugen $W_1 f \ldots W_{h-3} f$ eine $(h-3)$-gliedrige invariante Untergruppe der ganzen Gruppe, ausserdem kann man es, wie leicht zu erkennen ist, stets so einrichten, dass $V_1 f$, $V_2 f$, $V_3 f$ für sich eine dreigliedrige Untergruppe von der bekannten Zusammensetzung (s. S. 13):

$$(V_1 V_2) = V_1 f, \quad (V_1 V_3) = 2\,V_2 f, \quad (V_2 V_3) = V_3 f$$

erzeugen.

Die Gruppe (28′) erhält in unserm Falle die Form:

$$(32)\qquad \begin{cases} X_j f = Z_{j1} V_1 f + Z_{j2} V_2 f + Z_{j3} V_3 f + \sum_1^{h-3} {}^{\tau} Z_{j,3+\tau} W_\tau f \\ \qquad (j = 1 \ldots l), \end{cases}$$

wo die Z solche Functionen von z allein sind, dass nicht alle h-reihigen Determinanten der Matrix:

$$\left| \underset{(j=1\ldots h)}{Z_{j1} \ldots Z_{jl}} \right|$$

verschwinden.

Um die Form der Gruppe (32) zu vereinfachen, bemerken wir, dass die l verkürzten infinitesimalen Transformationen:

$$(33)\qquad \overline{X}_j f = Z_{j1} V_1 f + Z_{j2} V_2 f + Z_{j3} V_3 f \quad (j = 1 \ldots l)$$

eine mit der Gruppe (32) isomorphe Gruppe erzeugen. Auf diese verkürzte Gruppe können wir die Betrachtungen von S. 40 f. anwenden und erkennen so*), dass sie dreigliedrig ist. Bedenken wir überdies, dass unter den gemachten Voraussetzungen auch die infinitesimalen Transformationen:

$$Z_{j1} p + Z_{j2} xp + Z_{j3} x^2 p \quad (j = 1 \ldots l)$$

eine dreigliedrige Gruppe erzeugen und dass diese (s. S. 41 ff.) durch eine Transformation von der Form:

$$x_1 = \frac{\lambda(z)\,x + \mu(z)}{\nu(z)\,x + \varrho(z)}, \quad z_1 = z$$

auf die Form: p_1, $x_1 p_1$, $x_1^2 p_1$ gebracht werden kann, so erkennen wir unmittelbar, dass die Gruppe (33) durch eine Transformation von der Gestalt:

$$(34)\qquad x_1 = \frac{\lambda(z)\,x + \mu(z)}{\nu(z)\,x + \varrho(z)}, \quad y_1 = \Phi(x, y, \lambda, \mu, \nu, \varrho), \quad z_1 = z$$

*) Zu demselben Ergebnisse gelangt man durch Ueberlegungen, wie wir sie auf S. 144 f. angewendet haben.

die Form: $V_1 f$, $V_2 f$, $V_3 f$ erhalten kann; man findet diese Transformation (34) offenbar, wenn man in der allgemeinsten endlichen Transformation:

$$x_1 = \frac{\lambda x + \mu}{\nu x + \varrho}, \quad y_1 = \Phi(x, y, \lambda, \mu, \nu, \varrho)$$

der Gruppe: $V_1 f$, $V_2 f$, $V_3 f$ die Parameter λ, μ, ν, ϱ in geeigneter Weise als Functionen von z bestimmt.

Wenden wir nunmehr die Transformation (34) auf die Gruppe (32) an, so erhält diese die Form:

$$(32') \qquad \begin{cases} V_k f + \sum_1^{h-3} Z'_{k\tau} W_\tau f \\ \sum_1^{h-3} Z_{\nu\tau} W_\tau f \\ (k = 1, 2, 3;\ \nu = 1 \ldots l-3), \end{cases}$$

wo die Z' und Z wieder Functionen von z allein sind. Hier aber erkennt man in jedem einzelnen Falle leicht, dass die Z' sämmtlich gleich Null gemacht werden können, dass also die Gruppe (32′) die einfache Form erhalten kann:

$$(32'') \qquad V_1 f,\ V_2 f,\ V_3 f,\ \sum_1^{h-3} Z_{\nu\tau} W_\tau f \quad (\nu = 1 \ldots l-3).$$

Durch paarweise Combination dieser Transformationen bestimmt man endlich die Z leicht in allgemeinster Weise so, dass eine Gruppe mit mindestens h Parametern herauskommt.

Hat zum Beispiel die Gruppe $U_1 f \ldots U_h f$ die Form:

$$yq,\ p,\ xp,\ x^2 p + xyq$$

(die dritte Gruppe auf S. 72), so setzen wir:

$$V_1 f = p,\ \ V_2 f = 2xp + yq,\ \ V_3 f = x^2 p + xyq$$
$$W_1 f = yq.$$

Die vorstehenden Betrachtungen zeigen dann, dass die Gruppe (32) bei einer geeigneten Transformation von der Form (34) die Gestalt:

$$(35) \qquad \begin{cases} p,\ 2xp + yq,\ x^2 p + xyq \\ Z_1 yq, \ldots Z_{l-3} yq \end{cases}$$

annimmt. Dabei muss $l > 3$ sein; die Z sind ganz beliebige Functionen von z, die keine Relation:

$$C_1 Z_1 + \cdots + C_{l-3} Z_{l-3} = 0$$

mit constanten Coefficienten befriedigen.

Etwas umständlicher sind die Rechnungen, wenn die Gruppe $U_1 f \ldots U_h f$ die Curven $x = \text{const.}$ nicht dreigliedrig transformirt, doch sind sie auch da immer durchführbar.

Natürlich wird man bei der grossen Zahl der zu bestimmenden Gruppen nicht blos eine der beiden hier entwickelten Methoden zu ihrer Bestimmung anwenden, sondern man wird die Rechnung nach jeder von beiden Methoden durchführen, um sicher zu sein, dass man keine Gruppe übersehen hat.

Wir halten uns mit diesen Rechnungen nicht weiter auf. Nur eins wollen wir erwähnen. Es zeigt sich nämlich, *dass jede* transitive *Gruppe des Raumes x, y, z auf eine solche Form gebracht werden kann, dass die Coefficienten von p, q und r ganze Functionen von x, y, z und von gewissen Exponentialausdrücken: $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \ldots$ werden, unter $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$ lineare Functionen von x, y, z verstanden*)*. Höchst wahrscheinlich ist, dass ein ähnliches Gesetz auch für die *transitiven* Gruppen des Raumes von n Dimensionen gilt.

Schliesslich mag noch erwähnt werden, dass die Rechnungen der §§ 37—44 sich ohne Schwierigkeit auf Räume von beliebig vielen Dimensionen ausdehnen lassen.

Ist nämlich G eine endliche continuirliche Gruppe des Raumes $x_1 \ldots x_n$, die eine Schaar von ∞^1 ebenen $(n-1)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten invariant lässt, etwa die Schaar: $x_{n+1} = \text{const.}$ und ist g die invariante Untergruppe von G, die jede einzelne Mannigfaltigkeit: $x_{n+1} = \text{const.}$ festhält, so kann man G stets auf gewisse einfache Normalformen zurückführen, wenn g die Punkte jeder Mannigfaltigkeit: $x_{n+1} = \text{const.}$ entweder durch die allgemeine projective oder durch die allgemeine lineare oder durch die specielle lineare Gruppe in $n-1$ Veränderlichen transformirt. Die betreffenden Normalformen sind Verallgemeinerungen der Gruppen [1] . . . [12] auf

*) Lie hat die Bestimmung aller imprimitiven Gruppen des Raumes x, y, z, allerdings durch ausserordentlich weitläufige Rechnungen, schon in den Jahren 1878 und 1879 durchgeführt und dabei den mitgetheilten Satz über die transitiven Gruppen gefunden. Durch die hier entwickelten Methoden, die Lie erst während dieser Rechnungen fand, ist die Bestimmung aller imprimitiven Gruppen des Raumes x, y, z ungemein erleichtert, denn durch diese Methoden ist die ganze Aufgabe in eine grosse Anzahl von einzelnen Aufgaben zerlegt, deren jede für sich erledigt werden kann, ohne dass man vorher die übrigen erledigt zu haben braucht. Der Leser ist durch die Entwickelungen des Textes in den Stand gesetzt, jede Kategorie von imprimitiven Gruppen des Raumes x, y, z, deren Kenntniss ihm wünschenswerth ist, ohne Schwierigkeit zu bestimmen.

S. 145—154 und werden durch genau dieselben Rechnungen gefunden wie diese. Aehnliche Rechnungen führen zum Ziele, wenn g die Punkte jeder Mannigfaltigkeit durch irgend eine andre *primitive* Gruppe in $n-1$ Veränderlichen transformirt.

Ist andrerseits $\mathfrak{G}$ eine endliche continuirliche Gruppe des R_n, bei der die Schaar der ∞^{n-1} Geraden:

$$x_1 = \text{const.}, \ldots, x_{n-1} = \text{const.} \tag{36}$$

invariant bleibt, so kann man $\mathfrak{G}$ stets auf einfache Normalformen zurückführen, wenn es diese ∞^{n-1} Geraden entweder durch die allgemeine projective oder durch die allgemeine lineare oder durch die specielle lineare Gruppe des R_{n-1} transformirt. Die betreffenden Normalformen entsprechen den Gruppen [13] . . . [33] auf S. 157—170 und ergeben sich durch dieselben Rechnungen*). Aehnliches gilt, wenn $\mathfrak{G}$ die ∞^{n-1} Geraden (36) durch irgend eine andre *primitive* Gruppe des R_{n-1} transformirt.

*) Man beachte, dass diese Rechnungen im Falle $n = 2$ mit den Rechnungen der §§ 10—12 (S. 42 ff.) übereinstimmen, dass sie also für $n = 2$ alle *transitiven* imprimitiven Gruppen der Ebene liefern.

Abtheilung III.

Die projectiven Gruppen des gewöhnlichen Raumes.

Es ist nicht unsre Absicht, die projectiven Gruppen des gewöhnlichen dreifach ausgedehnten Raumes ebenso erschöpfend zu behandeln, wie die der Ebene. Wir werden zwar die primitiven sämmtlich aufstellen, die Bestimmung der imprimitiven dagegen nur soweit durchführen, dass man übersieht, in welcher Weise die noch fehlenden unter ihnen gefunden werden können; was alsdann zu thun übrig bleibt, wenn man wirklich alle projectiven Gruppen des Raumes aufstellen will, ist nicht viel und blos Sache der Geduld.

Was den Gang der Untersuchung anbetrifft, so ist Folgendes zu bemerken: Wir suchen zunächst alle Curven und Flächen des Raumes, die möglichst viele unabhängige infinitesimale projective Transformationen gestatten (Kap. 9). Unter den projectiven Gruppen, zu denen wir so gelangen, betrachten wir zwei näher, nämlich die Gruppe der Fläche zweiten Grades und die Gruppe der Euklidischen Bewegungen, von diesen beiden Gruppen bestimmen wir insbesondere alle Untergruppen (Kap. 10 und 11). Nunmehr wenden wir uns zur Aufstellung aller primitiven projectiven Gruppen des Raumes und führen sie in Kapitel 12 durch unter Benutzung der Ergebnisse von Kapitel 9 bis 11. In Kapitel 13 endlich entwickeln wir zwei Methoden zur Bestimmung aller imprimitiven projectiven Gruppen und geben eine grosse Anzahl dieser Gruppen wirklich an.

Man kann übrigens die primitiven projectiven Gruppen des Raumes auch direkt bestimmen, ohne sich auf die Untersuchungen der Kapitel 9—11 zu stützen. Man kann nämlich auf Grund des S. 123 f. Gesagten von vornherein über die Form der infinitesimalen Transformationen der primitiven projectiven Gruppen nähere Angaben machen; durch einfache Rechnungen gelingt es dann, die betreffenden Gruppen auf Normalformen zu bringen. Wir ziehen trotzdem das hier gewählte Verfahren vor und zwar um Wiederholungen zu vermeiden, denn wir werden später ganz ähnliche Rechnungen in n Veränderlichen durchführen, wo sie sich nebenbei bemerkt viel bequemer gestalten.

Kapitel 9.

Curven und Flächen des gewöhnlichen Raumes, die projective Gruppen gestatten.

Durch jede Curve oder Fläche, die überhaupt eine continuirliche Schaar von projectiven Transformationen gestattet, ist stets eine ganz bestimmte projective Gruppe definirt, die Gruppe nämlich, die von dem Inbegriff aller projectiven Transformationen gebildet wird, bei denen die betreffende Curve oder Fläche invariant bleibt. Diese Gruppe braucht allerdings nicht continuirlich zu sein, sie kann aus einer Anzahl getrennter Schaaren von Transformationen bestehen, aber unter diesen Schaaren giebt es nach Abschn. I, Kap. 18 stets eine und nur eine, die für sich eine continuirliche Gruppe bildet, das ist dann die grösste continuirliche projective Gruppe, bei der die bewusste Curve oder Fläche ihre Lage behält; auch sie ist offenbar durch die Curve oder Fläche vollständig definirt.

Besonders wichtig ist der Fall, dass die invariante Curve oder Fläche, durch welche die projective Gruppe definirt ist, isolirt liegt, also in keiner continuirlichen Schaar gleichfalls bei der Gruppe invarianter Curven oder Flächen enthalten ist; die Definition der Gruppe durch Angabe der invarianten Curve oder Fläche besitzt ja dann allen andern möglichen Definitionen gegenüber etwas ausgezeichnetes, was offenbar nicht der Fall ist, wenn unendlich viele Curven oder Flächen gleichzeitig bei der Gruppe ihre Lage behalten.

Wir werden nun in dem gegenwärtigen Kapitel alle projectiven Gruppen des Raumes aufstellen, die dadurch definirt sind, dass sie eine isolirte Curve oder Fläche invariant lassen; zugleich werden wir alle Curven und Flächen bestimmen, die mehr als zwei unabhängige infinitesimale projective Transformationen gestatten. Wir behandeln zunächst die Gruppen, bei denen eine Curve und dann die, bei denen eine Fläche invariant bleibt.

§ 46.

Die Curven des Raumes zerfallen in drei Klassen, deren eine von den geraden Linien gebildet wird, die zweite besteht aus den ebenen krummen Curven, die dritte aus den gewundenen Curven. Wir gehen diese drei Klassen der Reihe nach durch.

Jede der ∞^4 Geraden des Raumes bleibt bei einer elfgliedrigen projectiven Gruppe invariant, die durch Angabe der betreffenden Geraden vollständig definirt ist.

Betrachten wir ferner eine beliebige ebene, aber krumme Curve. Jede projective Gruppe, die diese Curve invariant lässt, muss zugleich die Ebene der Curve in Ruhe lassen; denken wir uns daher diese Ebene ins Unendliche verlegt, so verwandelt sich die Gruppe in eine Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe:

$$p,\ q,\ r,\ xp,\ yp,\ zp,\ xq,\ yq,\ zq,\ xr,\ yr,\ zr.$$

Nun enthält diese letztere gerade vier unabhängige infinitesimale Transformationen:

$$p,\ q,\ r,\ xp + yq + zr,$$

die alle Punkte der unendlich fernen Ebene stehen lassen und diese infinitesimalen Transformationen erzeugen eine viergliedrige Gruppe. Wir sehen also, dass jede ebene krumme Curve eine viergliedrige projective Gruppe gestattet, bei der freilich alle Punkte der Curve und überhaupt alle Curven der zugehörigen Ebene invariant bleiben.

Es sei jetzt G die grösste projective Gruppe, bei der eine vorgelegte ebene, aber krumme Curve C invariant bleibt; die Ebene der Curve sei wie vorhin ins Unendliche verlegt. Unter diesen Voraussetzungen werden die Punkte der unendlich fernen Ebene bei G durch eine meroedrisch imorphe Gruppe g transformirt, die genau vier Parameter weniger enthält als G und die offenbar die grösste projective Gruppe der Ebene ist, bei der die Curve C invariant bleibt. Nun wissen wir (S. 88, Satz 2), dass eine krumme Curve der Ebene, die überhaupt eine infinitesimale projective Transformation zulässt, entweder blos eine oder gerade drei unabhängige Transformationen dieser Art gestattet, also ergiebt sich, dass G, wenn es nicht mit der Gruppe $p,\ q,\ r,\ xp + yq + zr$ zusammenfällt, entweder fünf- oder siebengliedrig ist.

Nunmehr ist es leicht, gewisse Normalformen anzugeben, auf die G gebracht werden kann, jenachdem es fünf- oder siebengliedrig ist. G enthält nämlich entweder eine oder drei unabhängige infinitesimale Transformationen, die der speciellen linearen homogenen Gruppe:

$$zp,\ zq,\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp - zr,\ xr,\ yr$$

angehören und die, für sich genommen, eine mit der oben definirten Gruppe g holoedrisch isomorphe Gruppe g' erzeugen. Beachtet man, dass x, y, z auch als homogene Coordinaten der Punkte der unendlich fernen Ebene aufgefasst werden können, so erkennt man, dass g' nichts andres ist als die Gruppe g, nur geschrieben in den drei homogenen Veränderlichen x, y, z. Um daher für G Normalformen zu finden, braucht man nur die verschiedenen Normalformen von g, die aus Kap. 5 bekannt sind, in drei homogenen Veränderlichen zu schreiben und jedes-

mal die vier infinitesimalen Transformationen: $p,\ q,\ r,\ xp + yq + zr$ hinzuzufügen.

Ist g eingliedrig, so kann es nach S. 86—88 in zwei nichthomogenen Veränderlichen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ geschrieben, eine der beiden Formen:

$$\mathfrak{x}\mathfrak{p} + c\mathfrak{y}\mathfrak{q};\quad \mathfrak{p} + \mathfrak{y}\mathfrak{q}$$

erhalten, wo der Parameter c keinen der Werthe: $0,\ \pm 1,\ +2,\ +\frac{1}{2}$ annehmen darf, denn sonst liesse g nur gerade Linien oder Kegelschnitte invariant und wäre durch keine seiner invarianten Curven definirt. Demnach kann jede fünfgliedrige projective Gruppe G des Raumes, die eine ebene krumme Curve invariant lässt und durch diesen Umstand definirt ist, auf eine der beiden Formen:

$$p,\ q,\ r,\ xp + yq + zr,\ xp + cyq$$
$$(c \neq 0,\ \pm 1,\ +2,\ +\tfrac{1}{2})$$

und:

$$p,\ q,\ r,\ xp + yq + zr,\ zp + yq$$

gebracht werden (vgl. S. 110 f.).

In beiden Fällen lässt G ∞^1 verschiedene Curven der unendlich fernen Ebene invariant, unter denen es entweder drei oder zwei gerade Linien, dagegen keinen Kegelschnitt giebt; durch jede der bei G invarianten krummen Curven ist die Gruppe vollständig definirt.

Uebrig bleibt der Fall, dass g dreigliedrig ist und also aus allen projectiven Transformationen der Ebene besteht, die einen nicht ausgearteten Kegeschnitt invariant lassen. Wählen wir diesen Kegelschnitt so, dass er in homogenen Coordinaten die Gleichung:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

erhält, so bekommt G die Form:

$$p,\ q,\ r,\ xp + yq + zr,\ xq - yp,\ yr - zq,\ zp - xr.$$

Es ist das die siebengliedrige Gruppe aller projectiven Transformationen des Raumes, die den Kugelkreis invariant lassen, mit andern Worten: die Gruppe aller Euklidischen Bewegungen und Aehnlichkeitstransformationen.

Die eben gefundene Gruppe ist die einzige projective Gruppe des Raumes, die dadurch definirt ist, dass sie eine isolirte ebene krumme Curve invariant lässt.

Wir kommen zu den gewundenen Curven, die infinitesimale projective Transformationen gestatten.

Hätten wir die infinitesimalen projectiven Transformationen des Raumes bereits auf verschiedene Typen zurückgeführt, wie seinerzeit die der Ebene (s. S. 85), so würde es sehr leicht sein, überhaupt alle

gewundenen Curven anzugeben, die mindestens eine infinitesimale projective Transformation gestatten; wir brauchten dann nur unter den betreffenden Typen alle die aufzusuchen, die gewundene Curven invariant lassen, und hätten die betreffenden Curven zu bestimmen. Hier wollen wir uns aber damit begnügen, alle gewundenen Curven zu bestimmen, die mindestens zwei unabhängige infinitesimale projective Transformationen gestatten, das können wir nämlich durchführen, ohne erst jene verschiedenen Typen aufzustellen.

Es ist von vornherein klar, dass eine infinitesimale projective Transformation des Raumes, die eine gewundene Curve invariant lässt, niemals alle Punkte dieser Curve stehen lassen kann, denn bleiben alle Punkte einer gewundenen Curve in Ruhe, so giebt es sicher fünf feste Punkte, von denen niemals je vier in einer Ebene liegen, dieser Fall tritt aber bei keiner andern projectiven Transformation des Raumes ein, als bei der identischen. Hieraus folgt zunächst, dass jede m-gliedrige projective Gruppe, die eine gewundene Curve invariant lässt, auch die Punkte der Curve m-gliedrig transformirt; da aber diese Punkte eine einfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit bilden, so folgt nach Theorem 1, S. 6 weiter, dass m höchstens gleich drei sein kann und dass die betreffende Gruppe niemals zwei unabhängige infinitesimale Transformationen enthält, die vertauschbar sind. Jede gewundene Curve von der verlangten Beschaffenheit gestattet mithin sicher zwei unabhängige infinitesimale projective Transformationen $X_1 f$ und $X_2 f$, die eine zweigliedrige Gruppe von der Zusammensetzung:

$$(X_1 X_2) = X_1 f$$

erzeugen. Diese Gruppe: $X_1 f$, $X_2 f$ lässt dann (s. Abschn. I, S. 589, Satz 4) mindestens einen Punkt Π, eine hindurchgehende Gerade Γ und eine durch beide gehende Ebene E invariant.

Es sei ferner Π' ein Punkt von allgemeiner Lage auf unsrer invarianten Curve, das heisst ein solcher, der bei der Gruppe $X_1 f$, $X_2 f$ nicht invariant bleibt, und in dessen Umgebung sich die Gleichungen der Curve in der Form darstellen lassen, dass zwei von den Veränderlichen x, y, z durch die dritte vermittelst gewöhnlicher Potenzreihen ausgedrückt werden. Unter dieser Voraussetzung enthält die Gruppe $X_1 f$, $X_2 f$ sicher eine, aber auch nur eine infinitesimale Transformation: $c_1 X_1 f + c_2 X_2 f$, die den Punkt Π' in Ruhe lässt.

Die eben definirte Transformation: $c_1 X_1 f + c_2 X_2 f$ lässt natürlich mit Π' auch die zugehörige Tangente Γ' und die zugehörige Schmiegungsebene E' unsrer Curve invariant, ausserdem aber lässt sie von vornherein den Punkt Π, die Gerade Γ und die Ebene E in Ruhe.

Hieraus folgt, wie wir zeigen werden, dass bei $c_1 X_1 f + c_2 X_2 f$ ein nicht ausgeartetes Tetraeder seine Lage behält.

In der That, unter den gemachten Voraussetzungen fällt der Punkt Π' sicher nicht mit Π zusammen, ausserdem liegt er als Punkt von allgemeiner Lage einer gewundenen Curve sicher nicht auf der Ebene E; ferner können die Tangenten einer gewundenen Curve niemals eine feste Gerade schneiden, also trifft die Tangente Γ' der Curve sicher die Gerade Γ nicht; endlich können die Schmiegungsebenen einer gewundenen Curve nicht alle durch einen Punkt gehen, also geht die Ebene E' sicher nicht durch den Punkt Π. Hieraus ergiebt sich, dass wirklich die Ebenen E und E' zusammen mit den beiden Ebenen, die durch Π und Γ' und durch Π' und Γ bestimmt sind, ein nicht ausgeartetes Tetraeder bilden, das bei der infinitesimalen Transformation $c_1 X_1 f + c_2 X_2 f$ invariant bleibt.

Wir wählen das eben gefundene Tetraeder zum Coordinatentetraeder und zwar so, dass Π' die Coordinaten $x = y = z = 0$ erhält, dass die Gleichungen der Tangente Γ' und der Schmiegungsebene E' bezüglich: $y = z = 0$ und $z = 0$ werden, während E mit der unendlich fernen Ebene zusammenfällt und Γ und Π auf E durch die Ebene $x = 0$ und durch die Gerade $x = y = 0$ ausgeschnitten werden.

Unter diesen Voraussetzungen erscheinen zunächst die Gleichungen unsrer Curve in der Form:

$$(1) \qquad \begin{cases} y = a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \\ z = b_3 x^3 + b_4 x^4 + \cdots, \end{cases}$$

wo die rechten Seiten gewöhnliche Potenzreihen von x sind und wo die Constanten a_2 und b_2 sicher nicht verschwinden, denn $x = y = z = 0$ sollte ja ein Punkt von allgemeiner Lage auf der Curve sein. Ferner erhält die infinitesimale Transformation: $c_1 X_1 f + c_2 X_2 f$, weil sie das Coordinatentetraeder invariant lassen muss, die Form:

$$c_1 X_1 f + c_2 X_2 f = \alpha x p + \beta y q + \gamma z r,$$

wo keine der Constanten α, β, γ und auch keine der Differenzen $\alpha - \beta$, $\alpha - \gamma$, $\beta - \gamma$ verschwinden darf, denn sonst liesse

$$c_1 X_1 f + c_2 X_2 f$$

gar keine gewundenen, sondern nur ebene Curven invariant.

Wir haben jetzt noch zu berücksichtigen, dass unsre Curve (1) die infinitesimale Transformation: $c_1 X_1 f + c_2 X_2 f$ gestatten soll. Diese Forderung kommt analytisch darauf hinaus, dass die beiden Gleichungen:

$$\beta y = 2 a_2 \alpha x^2 + 3 a_3 \alpha x^3 + \cdots$$
$$\gamma z = 3 b_3 \alpha x^3 + 4 b_4 \alpha x^4 + \cdots$$

vermöge (1) bestehen müssen, da aber a_2 und b_3 beide von Null verschieden sind, so ist das nur möglich, wenn $\beta = 2\alpha$ und $\gamma = 3\alpha$ ist und wenn ausserdem die Gleichungen (1) die einfache Form:

$$y = a_2 x^2, \quad z = b_3 x^3 \tag{2}$$

besitzen. Hier dürfen wir endlich a_2 und b_3 ohne Weiteres gleich 1 setzen, denn bei der projectiven Transformation:

$$x_1 = x, \quad y_1 = \frac{1}{a_2} y, \quad z_1 = \frac{1}{b_3} z$$

bleibt unser Coordinatentetraeder invariant, während die Gleichungen (2) die Form:

$$y_1 = x_1^2, \quad z_1 = x_1^3$$

erhalten.

Giebt es also überhaupt eine gewundene Curve, die zwei unabhängige infinitesimale projective Transformationen des Raumes gestattet, so ist sie nothwendig eine rationale Raumcurve dritter Ordnung, deren Gleichungen durch eine geeignete projective Transformation die Gestalt:

$$y = x^2, \quad z = x^3 \tag{3}$$

erhalten können (vgl. Klein und Lie, Comptes Rendus 1870).

Wir kennen bereits eine infinitesimale projective Transformation, bei der die Curve (3) invariant bleibt, nämlich: $xp + 2yq + 3zr$; wir müssen nunmehr noch untersuchen, was für infinitesimale Transformationen von dieser Beschaffenheit ausserdem vorhanden sind.

Die Bestimmung dieser infinitesimalen Transformationen könnte man ähnlich durchführen wie auf S. 87 die Bestimmung aller infinitesimalen projectiven Transformationen der Ebene, bei denen die Curve: $y = x^c$ invariant bleibt, man müsste dann die allgemeine infinitesimale projective Transformation:

$$a_1 p + a_2 q + a_3 r + a_4 xp + \cdots + a_{15}(xzp + yzq + z^2 r)$$

des Raumes x, y, z aufschreiben und die Coefficienten $a_1 \ldots a_{15}$ in allgemeinster Weise so bestimmen, dass die Gleichung (3) invariant bleibt. Bequemer ist jedoch das folgende Verfahren:

Soll die Curve (3) bei der infinitesimalen projectiven Transformation:

$$Xf = \xi(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial z}$$

invariant bleiben, so muss es eine Function $\omega(u)$ von solcher Beschaffenheit geben, dass das Gleichungensystem:

$$x = u, \quad y = u^2, \quad z = u^3 \tag{3'}$$

in den vier Veränderlichen x, y, z, u die infinitesimale Transformation:

$$Xf + \omega(u) \frac{\partial f}{\partial u}$$

gestattet; diese Bedingung ist nothwendig, aber offenbar auch hinreichend. Die Function $\omega(u)$, die zu jeder einzelnen infinitesimalen Transformation Xf von der betreffenden Beschaffenheit gehört, ist dadurch bestimmt, dass die Gleichungen:

$$\xi(x, y, z) = \omega(u), \quad \eta(x, y, z) = 2u\omega(u), \quad \zeta(x, y, z) = 3u^2\omega(u)$$

bei der Substitution (3′) zu Identitäten werden müssen; da nun ξ, η, ζ ganze Functionen von x, y, z sind, so ist $\omega(u)$ nothwendig eine ganze Function von u, für $Xf = xp + 2yq + 3zr$ findet man insbesondere: $\omega(u) = u$.

Versuchen wir jetzt, ob $\omega(u)$ nicht auch die beiden Werthe 1 und u^2 erhalten kann.

Soll $\omega(u) = 1$ sein, so müssen die Gleichungen:

$$\xi(x, y, z) = 1, \quad \eta(x, y, z) = 2u, \quad \zeta(x, y, z) = 3u^2$$

bei der Substitution (3′) zu Identitäten werden, es ist also: $\xi = 1$, $\eta = 2x$ und $\zeta = 3y$; da nämlich Xf eine infinitesimale projective Transformation ist, so kann ζ kein Glied mit x^2 enthalten. Wirklich lässt auch die infinitesimale projective Transformation: $p + 2xq + 3yr$ die Curve (3) invariant.

Soll $\omega(u) = u^2$ sein, so müssen die Gleichungen:

$$\xi(x, y, z) = u^2, \quad \eta(x, y, z) = 2u^3, \quad \zeta(x, y, z) = 3u^4$$

vermöge (3′) zu Identitäten werden, berücksichtigt man überdies, dass Xf eine infinitesimale projective Transformation sein soll, so erkennt man, dass:

$$\xi(x, y, z) = ax^2 + by, \quad \eta(x, y, z) = axy + cz, \quad \zeta(x, y, z) = axz$$

ist, wo a, b, c den Bedingungen: $a + b = 1$, $a + c = 2$, $a = 3$ genügen müssen. Hieraus ergiebt sich: $b = -2$, $c = -1$ und wirklich bleibt die Curve (3) bei der infinitesimalen projectiven Transformation:

$$3x(xp + yq + zr) - 2yp - zq$$

invariant.

Wir haben hiermit drei unabhängige infinitesimale projective Transformationen gefunden, bei denen die Curve (3) invariant bleibt, es sind die nachstehenden:

$$(4) \qquad \begin{cases} X_1 f = p + 2xq + 3yr \\ X_2 f = xp + 2yq + 3zr \\ X_3 f = 3(x^2p + xyq + xzr) - 2yp - zq. \end{cases}$$

Da überdies nach S. 183 eine gewundene Curve des Raumes x, y, z sicher nicht mehr als drei unabhängige infinitesimale projective Transformationen gestattet, so leuchtet ein, dass $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ eine drei-

gliedrige Gruppe erzeugen, die grösste projective Gruppe, bei der die Curve (3) invariant bleibt. Es gilt also der

Satz 1. *Gestattet eine gewundene Curve des Raumes x, y, z zwei unabhängige infinitesimale projective Transformationen dieses Raumes, so gestattet sie deren gerade drei unabhängige und ist eine rationale gewundene Curve dritter Ordnung.*

Die Betrachtungen der SS. 183 bis 186 lassen sich auf den Raum von n Dimensionen übertragen; da diese Uebertragung nicht die geringste Schwierigkeit hat, theilen wir gleich jetzt ihr Ergebniss mit, um nicht später darauf zurückkommen zu müssen. Das Ergebniss lautet:

Satz 2. *Gestattet eine möglichst gekrümmte Curve des n-fach ausgedehnten Raumes R_n zwei unabhängige infinitesimale projective Transformationen dieses Raumes, so gestattet sie deren gerade drei unabhängige und ist eine möglichst gekrümmte rationale Curve n^{ter} Ordnung.*

Unter einer möglichst gekrümmten Curve des R_n verstehen wir hierbei eine Curve, die in keinem ebenen $(n-1)$fach ausgedehnten Raume liegt.

Denkt man sich das Coordinatensystem so gewählt, dass die rationale Curve n^{ter} Ordnung durch die Gleichungen:

$$x_2 = x_1^2,\ x_3 = x_1^3,\ \ldots,\ x_n = x_1^n$$

dargestellt wird, so gestattet die Curve die drei unabhängigen infinitesimalen projectiven Transformationen:

$$p_1 + 2x_1p_2 + 3x_2p_3 + \cdots + nx_{n-1}p_n$$
$$x_1p_1 + 2x_2p_2 + 3x_3p_3 + \cdots + nx_np_n$$
$$(n-1)x_2p_1 + (n-2)x_3p_2 + \cdots + x_np_{n-1} - nx_1(x_1p_1 + \cdots + x_np_n),$$

diese erzeugen natürlich eine dreigliedrige Gruppe, die grösste projective Gruppe des Raumes $x_1 \ldots x_n$, bei der die betreffende Curve invariant bleibt.

Wir wollen jetzt die Gruppe (4) etwas näher untersuchen und zwar wollen wir erstens alle bei ihr invarianten Punktfiguren bestimmen, zweitens aber die in ihr enthaltenen Untergruppen betrachten.

Um das Unendlichferne gleich mitzunehmen, schreiben wir zunächst unsre Gruppe (4) in vier homogenen Veränderlichen (s. Abschn. I, S. 579). Die Gruppe lautet dann folgendermassen:

$$(5)\qquad \begin{cases} X_1f = x_4p_1 + 2x_1p_2 + 3x_2p_3 \\ -2X_2f = x_1p_1 - x_2p_2 - 3x_3p_3 + 3x_4p_4 \\ -X_3f = 2x_2p_1 + x_3p_2 + 3x_1p_4; \end{cases}$$

alle bei ihr invarianten Punktfiguren werden nunmehr durch solche Gleichungensysteme in $x_1 \ldots x_4$ dargestellt, welche die drei infinitesimalen Transformationen X_1f, X_2f, X_3f und ausserdem noch die vierte:

$$X_4f = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4$$

gestatten. Wir brauchen also blos nach den Regeln von Abschn. I, Kap. 14 alle bei der viergliedrigen Gruppe $X_1 f \ldots X_4 f$ invarianten Gleichungensysteme zu bestimmen.

Eine invariante Gleichung erhalten wir durch Nullsetzen der Determinante von $X_1 f \ldots X_4 f$, nämlich:

$$(6) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} x_4 & 2x_1 & 3x_2 & 0 \\ x_1 & -x_2 & -3x_3 & 3x_4 \\ 2x_2 & x_3 & 0 & 3x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung stellt eine invariante Fläche vierter Ordnung dar, offenbar die Abwickelbare unsrer Curve dritter Ordnung (3); da überdies vermöge $\Delta = 0$ nicht alle dreireihigen Unterdeterminanten von Δ verschwinden, so ist klar, dass die Punkte dieser Abwickelbaren bei unsrer Gruppe transitiv transformirt werden.

Die 16 dreireihigen Unterdeterminanten von Δ können nur dann sämmtlich verschwinden, wenn entweder $x_1 \ldots x_4$ alle null sind, was keine geometrische Bedeutung hat, oder wenn die Gleichungen:

$$(7) \qquad x_2 x_4 - x_1^2 = 0, \quad x_1 x_2 - x_3 x_4 = 0, \quad x_2^2 - x_1 x_3 = 0$$

bestehen. Das ist ein invariantes Gleichungensystem, das unsre invariante Curve dritter Ordnung (3) als den Schnitt dreier Flächen zweiten Grades darstellt. Es ist hiermit bewiesen, dass unsre Gruppe ausser der Curve dritter Ordnung keine andre Curve des Raumes invariant lässt, dass also die invariante Curve dritter Ordnung isolirt ist.

Die zweireihigen Unterdeterminanten von Δ verschwinden nur für: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ sämmtlich, also lässt unsre Gruppe sicher keinen Punkt des Raumes stehen.

Damit sind alle Punktfiguren gefunden, die bei unsrer Gruppe (4) invariant bleiben; wir können uns also zur Besprechung der Untergruppen dieser Gruppe wenden.

Es ist an und für sich klar, dass die Gruppe (4) mit der allgemeinen projectiven Gruppe der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit gleichzusammengesetzt ist; in der That wird auch die Zusammensetzung der Gruppe (4) durch die Relationen:

$$(8) \qquad (X_1 X_2) = X_1 f, \quad (X_1 X_3) = 2 X_2 f, \quad (X_2 X_3) = X_3 f$$

bestimmt. Aus Kap. 2, S. 17 folgt daher, dass es in unsrer Gruppe nur einen Typus von zweigliedrigen und nur zwei Typen von eingliedrigen Untergruppen giebt und dass wir als Repräsentanten dieser Typen der Reihe nach die Untergruppen: $X_1 f$, $X_2 f$; $X_2 f$ und $X_1 f$ wählen können.

Die zweigliedrige und daher intransitive Gruppe: $X_1 f$, $X_2 f$ lässt eine Schaar von ∞^1 Flächen invariant, die durch Integration des dreigliedrigen vollständigen Systems:

$$X_1 f = 0, \quad X_2 f = 0, \quad X_4 f = 0$$

in den Veränderlichen $x_1 \ldots x_4$ gefunden wird. Die Gleichung dieser Flächenschaar lautet:

$$(9) \qquad a(x_3 x_4^2 - 3x_1 x_2 x_4 + 2x_1^3)^2 + b(x_2 x_4 - x_1^2)^3 = 0.$$

Um die übrigen invarianten Punktfiguren zu finden, die zu der Gruppe gehören, schreiben wir uns die Matrix:

$$(10) \qquad \begin{vmatrix} x_4 & 2x_1 & 3x_2 & 0 \\ x_1 & -x_2 & -3x_3 & 3x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix}$$

auf und setzen erstens ihre dreireihigen, zweitens ihre zweireihigen Determinanten alle gleich Null. Die zweireihigen liefern nur den invarianten Punkt: $x_1 = x_2 = x_4 = 0$, die dreireihigen liefern ausser der Curve dritter Ordnung selbst, noch ihre Tangente: $x_1 = x_4 = 0$ im Punkte: $x_1 = x_2 = x_4 = 0$ und endlich in der Schmiegungsebene $x_4 = 0$ dieses Punktes den invarianten Kegelschnitt:

$$(11) \qquad x_4 = 0, \quad 3x_2^2 - 4x_1 x_3 = 0.$$

Da für die invariante Ebene: $x_4 = 0$ nicht alle dreireihigen Determinanten der Matrix (10) verschwinden, so muss diese Ebene in der Flächenschaar (9) enthalten sein. Das ist in der That der Fall und zwar für $b = 4a$, dann sondert sich nämlich auf der linken Seite von (9) der Factor x_4^2 ab und wenn der weggelassen wird, bleibt eine Gleichung vierter Ordnung übrig, die augenscheinlich die Abwickelbare (6) unsrer Curve dritter Ordnung darstellt. Mit dieser Abwickelbaren hat die Ebene $x_4 = 0$ die doppeltzählende Gerade: $x_1 = x_4 = 0$ und den Kegelschnitt (11) gemein, mit den übrigen Flächen der Schaar (10) hat die Ebene $x_4 = 0$ dagegen blos die sechsfach zählende Gerade: $x_1 = x_4 = 0$ gemein, sonst nichts. Hieraus ergiebt sich, dass in der Schaar (10) keine nicht ausgeartete Fläche zweiten Grades enthalten ist, während allerdings der Fall $a = 0$ den dreifach zählenden Kegel zweiten Grades: $x_2 x_4 - x_1^2 = 0$ liefert.

Wir haben hiermit das nicht unwichtige Ergebniss gewonnen, dass es keine zweigliedrige projective Gruppe giebt, bei der eine nicht ausgeartete Fläche zweiten Grades und eine gewundene Curve dritter Ordnung gleichzeitig ihre Lage behalten. Ebensowenig giebt es eine zweigliedrige projective Gruppe, die zwei verschiedene gewundene Curven

dritter Ordnung oder die eine Curve dritter Ordnung und eine sie nicht berührende Gerade in Ruhe lässt.

Von eingliedrigen Untergruppen giebt es, wie gesagt, in unsrer Gruppe (4) zwei Typen, deren einer durch $X_2 f$, deren zweiter durch $X_1 f$ repräsentirt wird.

Die Bahncurven von $X_2 f$ findet man durch Integration des zweigliedrigen vollständigen Systems: $X_2 f = 0$, $X_4 f = 0$ in $x_1 \ldots x_4$. Sie werden durch die Gleichungen:

$$(12) \qquad \begin{cases} \lambda x_1^2 + \mu x_2 x_4 = 0, \quad \nu x_2^2 + \varrho x_1 x_3 = 0 \\ \lambda\nu x_1 x_2 - \mu\varrho x_3 x_4 = 0 \end{cases}$$

mit den zwei Paaren homogener Parameter λ, μ und ν, ϱ dargestellt und sind im Allgemeinen Curven dritter Ordnung, die von der Curve (3) in den beiden Punkten $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ und $x_1 = x_2 = x_4 = 0$ osculirt werden.

Für die Bahncurven von $X_1 f$ ergeben sich in derselben Weise die Gleichungen:

$$(13) \qquad \begin{cases} c(x_2 x_4 - x_1^2) = a x_4^2 \\ c(x_3 x_4 - x_1 x_2) = 2 a x_1 x_4 + b x_4^2 \\ c(x_2^2 - x_1 x_3) = a(x_2 x_4 - 2 x_1^2) - b x_1 x_4 \end{cases}$$

mit den drei homogenen Parametern a, b, c. Auch diese Bahncurven sind Curven dritter Ordnung; sie werden von der Curve (3) in dem Punkte $x_1 = x_2 = x_4 = 0$ osculirt.

Wir schliessen hiermit die Untersuchungen über die Curven des Raumes, die projective Transformationen gestatten, und sprechen nur noch den nachstehenden Satz aus, der aus den gewonnenen Ergebnissen folgt:

Satz 3. *Ist eine projective Gruppe des Raumes dadurch definirt, dass sie eine isolirte Curve invariant lässt, so besteht sie entweder aus den ∞^{11} Collineationen, die eine Gerade, oder aus den ∞^7, die einen nicht ausgearteten Kegelschnitt oder aus den ∞^3, die eine gewundene Curve dritter Ordnung invariant lassen.*

§ 47.

Wir fragen jetzt nach den projectiven Gruppen, die dadurch definirt sind, dass sie eine Fläche invariant lassen; in der Hauptsache beschränken wir uns auf Gruppen, die mindestens drei Parameter enthalten, in einem besonderen Paragraphen werden wir dann noch andeuten, wie man alle krummen Flächen finden kann, die gerade zwei und nicht mehr unabhängige infinitesimale projective Transformationen gestatten.

Jede Ebene des Raumes bleibt bei einer zwölfgliedrigen projectiven Gruppe invariant, die durch die betreffende Ebene vollständig bestimmt ist.

Sehr einfach lässt sich auch der Fall einer krummen abwickelbaren Fläche erledigen. Führen wir nämlich auf die projective Gruppe, bei der eine solche Fläche invariant bleibt, eine dualistische Transformation aus, so erhalten wir eine projective Gruppe, die eine krumme Curve invariant lässt; wir kommen somit auf eine im vorigen Paragraphen erledigte Aufgabe zurück.

Ist die abwickelbare Fläche kein Kegel, so geht sie bei der dualistischen Transformation in eine gewundene Curve über; gestattet daher die Fläche zwei unabhängige infinitesimale projective Transformationen, so gestattet sie deren gerade drei unabhängige und ist von der dritten Klasse, das heisst, sie ist die Abwickelbare einer Raumcurve dritter Ordnung. Die Gruppe, die durch eine solche Fläche definirt wird, ist demnach innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe mit der Gruppe (4) auf S. 186 gleichberechtigt, und die Gleichung der Fläche kann durch eine projective Transformation auf die Form (6), S. 188 gebracht werden.

Ist dagegen die invariante Fläche ein Kegel, so sind mehrere Fälle zu unterscheiden, die wir an der Hand des in § 46 Gesagten leicht überblicken können.

Jede der hierhergehörigen Gruppen enthält eine viergliedrige invariante Untergruppe, die alle Geraden durch die Kegelspitze stehen lässt. Wird als Kegelspitze der unendlich ferne Träger des Geradenbündels: $x =$ const., $y =$ const. gewählt, so erscheint diese viergliedrige Gruppe in der Gestalt:

$$r,\ xr,\ yr,\ zr; \tag{14}$$

der Kegel selbst wird ein Cylinder und seine Gleichung von z frei.

Die Gruppe (14) lässt jeden Cylinder: $\Phi(x, y) = 0$ invariant. Soll der Cylinder eine projective Gruppe mit mehr als vier Parametern gestatten, so sind zwei Fälle denkbar: entweder nämlich werden seine Erzeugenden eingliedrig oder sie werden dreigliedrig transformirt.

Im ersten Falle ist der Cylinder nicht vom zweiten Grade, und eine infinitesimale Transformation der Gruppe, bei der seine Erzeugenden wirklich transformirt werden, kann eine der beiden Formen:

$$xp + cyq \quad (c \neq 0,\ \pm 1,\ \tfrac{1}{2},\ 2);\quad p + yq$$

erhalten. Wir gelangen somit zu den beiden fünfgliedrigen Gruppen:

$$\begin{cases} r,\ xr,\ yr,\ zr,\ xp + cyq \quad (c \neq 0,\ \pm 1,\ \tfrac{1}{2},\ 2) \\ r,\ xr,\ yr,\ zr,\ p + yq; \end{cases} \tag{15}$$

jede dieser beiden Gruppen lässt ∞^1 verschiedene Cylinder invariant und ist durch jeden der betreffenden Cylinder, der nicht in eine Ebene ausartet, vollständig definirt.

Uebrig bleibt noch der Fall eines Cylinders zweiten Grades. Ist $y - \frac{1}{2}x^2 = 0$ die Gleichung dieses Cylinders, so lautet die durch ihn definirte Gruppe:

$$r,\ xr,\ yr,\ zr,\ p + xq,\ xp + 2yq,\ x^2p + xyq + xzr - yp.$$

Wir haben also den

Satz 4. *Ist eine projective Gruppe des Raumes dadurch definirt, dass sie eine isolirte abwickelbare Fläche invariant lässt, so besteht sie entweder aus den ∞^{12} Collineationen, die eine Ebene, oder aus den ∞^7, die einen nicht ausgearteten Kegel zweiten Grades, oder endlich aus den ∞^3, welche die Abwickelbare einer gewundenen Curve dritter Ordnung in sich überführen.*

Nunmehr suchen wir alle *nicht abwickelbaren* Flächen, die $r \geqq 3$ unabhängige infinitesimale projective Transformationen gestatten.

Zunächst sei $r > 3$; dann gestattet jede Haupttangentencurve der Fläche mindestens drei unabhängige infinitesimale projective Transformationen. Für jede der beiden Schaaren von Haupttangentencurven auf der Fläche giebt es daher nur zwei Möglichkeiten: entweder besteht die Schaar aus gewundenen Curven dritter Ordnung oder aus geraden Linien, denn eine Schaar von ebenen krummen Haupttangentencurven kann bei einer nicht abwickelbaren Fläche nicht auftreten. Beide Schaaren von Haupttangentencurven können nicht Curven dritter Ordnung sein, denn es gingen dann durch jeden Punkt von allgemeiner Lage auf der Fläche zwei derartige Curven, die bei einer projectiven Gruppe mit mindestens zwei Parametern invariant blieben; das aber ist nach S. 189 f. unmöglich. Ebensowenig kann die eine Schaar von Haupttangentencurven aus Geraden und die andre aus Curven dritter Ordnung bestehen, denn es ginge dann durch jeden Punkt von allgemeiner Lage auf der Fläche eine Curve dritter Ordnung und eine sie nicht berührende Gerade und der Inbegriff beider müsste mindestens zwei unabhängige infinitesimale projective Transformationen gestatten, was nach S. 189 f. ebenfalls ausgeschlossen ist. Demnach bestehen beide Schaaren von Haupttangentencurven aus Geraden und die Fläche ist vom zweiten Grade. Da es ∞^9 verschiedene nicht ausgeartete Flächen zweiten Grades giebt, so gilt der

Satz 5. *Die nicht ausgeartete Fläche zweiten Grades ist die einzige nicht abwickelbare Fläche des Raumes, die mehr als drei unabhängige infinitesimale projective Transformationen zulässt; sie gestattet deren gerade*

sechs unabhängige, die eine sechsgliedrige projective Gruppe erzeugen, und diese Gruppe ist durch die betreffende Fläche vollständig definirt.

Wir werden diese Gruppe später ausführlich besprechen.

Es sei zweitens r gerade $= 3$; unsre Aufgabe ist also jetzt, alle nicht abwickelbaren Flächen zu finden, die gerade drei und nicht mehr unabhängige infinitesimale projective Transformationen gestatten. Wir sind dabei von vornherein sicher, dass die gesuchten Flächen nicht vom zweiten Grade sein können.

Sind $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ drei unabhängige infinitesimale projective Transformationen, bei denen eine Fläche von der verlangten Beschaffenheit invariant bleibt, so gestattet jede Haupttangentencurve der Fläche mindestens zwei unabhängige infinitesimale Transformationen der von $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ erzeugten dreigliedrigen Gruppe. Hieraus folgt wie oben, dass jede der beiden Schaaren von Haupttangentencurven auf unsrer Fläche nur aus Geraden oder aus gewundenen Curven dritter Ordnung bestehen kann.

Beständen beide Schaaren von Haupttangentencurven aus Curven dritter Ordnung, so gehörte zu jedem Punkte von allgemeiner Lage auf der Fläche mindestens eine eingliedrige Gruppe:

$$c_1 X_1 f + c_2 X_2 f + c_3 X_3 f,$$

bei der der betreffende Punkt und zugleich die beiden hindurchgehenden Haupttangentencurven invariant blieben. Auf S. 190 aber sahen wir, dass zwei gewundene Curven dritter Ordnung, die bei ein und derselben infinitesimalen projectiven Transformation invariant bleiben, zwei oder wenigstens einen Punkt und zugleich die dazugehörigen Tangenten gemein haben. Demnach würden sich in jedem Punkte von allgemeiner Lage auf unsrer Fläche die beiden zugehörigen Haupttangentencurven berühren, die Fläche wäre also abwickelbar, was ausgeschlossen ist.

Beständen andrerseits beide Schaaren von Haupttangentencurven aus geraden Linien, so wäre die Fläche vom zweiten Grade, was auch nicht sein darf, also bleibt nur noch der Fall zu behandeln, dass die eine Schaar der Haupttangentencurven von Geraden, die andere von Curven dritter Ordnung gebildet wird. Wir werden sehen, dass diesem Fall wirklich eine Fläche von der verlangten Beschaffenheit entspricht.

Die gesuchte dreigliedrige Gruppe: $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ enthält offenbar eine zweigliedrige Untergruppe, bei der eine gewundene Curve dritter Ordnung invariant bleibt; wir wollen annehmen, dass $X_1 f, X_2 f$ eine solche Untergruppe ist. Nun giebt es in der projectiven Gruppe einer Curve dritter Ordnung nur ∞^1 zweigliedrige Untergruppen, die alle mit einander gleichberechtigt sind, wir können daher als Gruppe

$X_1 f$, $X_2 f$ eine beliebige unter diesen ∞^1 auswählen und etwa setzen:

$$X_1 f = p + 2xq + 3yr$$
$$X_2 f = xp + 2yq + 3zr.$$

Diese zweigliedrige Gruppe lässt auf der Curve dritter Ordnung: $y = x^2$, $z = x^3$ nur einen einzigen, unendlich fernen Punkt P invariant, dagegen lässt jede ihrer ∞^1 eingliedrigen Untergruppen:

$$X_2 f - \lambda X_1 f = (x - \lambda) p + 2(y - \lambda x) q + 3(z - \lambda y) r$$

noch einen zweiten im Endlichen gelegenen Punkt Π der Curve invariant, dessen Coordinaten augenscheinlich die Werthe:

$$x = \lambda, \; y = \lambda^2, \; z = \lambda^3$$

haben. Natürlich bleibt bei $X_2 f - \lambda X_1 f$ zugleich mit Π auch die hindurchgehende geradlinige Haupttangentencurve der gesuchten Fläche in Ruhe. Diese Gerade muss als Haupttangentencurve in der zu Π gehörigen Schmiegungsebene der Curve dritter Ordnung liegen, sie darf aber nicht die Tangente sein, weil unsre Fläche sonst mit der Abwickelbaren der Raumcurve dritter Ordnung zusammenfiele.

Um die geradlinige Haupttangentencurve, die durch Π geht, wirklich zu finden, bestimmen wir zunächst alle Geraden durch Π, die bei: $X_2 f - \lambda X_1 f$ invariant bleiben, unter denen muss ja die gesuchte Haupttangentencurve enthalten sein.

Die Gleichungen einer beliebigen durch Π gehenden Geraden haben die Form:

(A) $$x - \lambda : y - \lambda^2 : z - \lambda^3 = a : b : c;$$

soll diese Gerade bei $X_2 f - \lambda X_1 f$ invariant bleiben, so müssen die Gleichungen:

$$x - \lambda : 2(y - \lambda x) : 3(z - \lambda y) = a : b : c$$

vermöge (A) bestehen, a, b, c müssen also die Gleichungen:

$$a : 2(b - \lambda a) : 3(c - \lambda b) = a : b : c$$

befriedigen. Hieraus ergeben sich drei Möglichkeiten, nämlich:

$$a = 0, \; b = 0; \quad a = 0, \; c - 3\lambda b = 0$$
$$b - 2\lambda a = 0, \; 2c - 3\lambda b = 0,$$

die einzigen bei $X_2 f - \lambda X_1 f$ invarianten Geraden durch Π sind demnach die folgenden drei:

$$x - \lambda = 0, \quad y - \lambda^2 = 0$$
$$x - \lambda = 0, \quad z - 3\lambda y + 2\lambda^3 = 0$$
$$y - \lambda^2 = 2\lambda(x - \lambda), \quad z - \lambda^3 = 3\lambda^2 (x - \lambda).$$

Von diesen ist die erste für unsern Zweck unbrauchbar, denn sie verbindet die beiden invarianten Punkte Π und P unsrer Curve dritter Ordnung und liegt daher sicher nicht in der zu Π gehörigen Schmiegungsebene:

$$3\lambda^2 x - 3\lambda y + z - \lambda^3 = 0$$

der Curve. Die dritte Gerade ist die Tangente von Π, sie kommt also auch nicht in Betracht, dagegen liegt die zweite in der Schmiegungsebene von Π und fällt nicht mit der Tangente zusammen, sie ist also die durch Π gehende geradlinige Haupttangentencurve der gesuchten Fläche.

Lassen wir jetzt in den Gleichungen:

$$x - \lambda = 0, \quad z - 3\lambda y + 2\lambda^3 = 0$$

das λ alle möglichen Werthe annehmen, so erhalten wir alle geradlinigen Haupttangentencurven unsrer gesuchten Fläche, durch Fortschaffung von λ bekommen wir daher die Gleichung dieser Fläche selbst, sie lautet:

$$z - 3xy + 2x^3 = 0. \tag{16}$$

Das ist eine Fläche dritter Ordnung und dritter Klasse, die unter dem Namen „Cayleysche Linienfläche“ bekannt ist.

Man überzeugt sich schliesslich leicht, dass die Fläche (16) ausser den beiden infinitesimalen projectiven Transformationen $X_1 f$ und $X_2 f$ noch diese:

$$X_3 f = q + 3xr$$

gestattet. Dass sie keine von $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ unabhängige infinitesimale projective Transformation gestattet, ist nach dem Früheren klar, also erzeugen:

$$\begin{cases} X_1 f = p + 2xq + 3yr \\ X_2 f = xp + 2yq + 3zr \\ X_3 f = q + 3xr \end{cases} \tag{17}$$

eine dreigliedrige projective Gruppe, die durch die Fläche (16) vollständig definirt ist. Die Zusammensetzung dieser augenscheinlich transitiven Gruppe wird durch die Relationen:

$$(X_1 X_2) = X_1 f, \ (X_1 X_3) = 0, \ (X_2 X_3) = -2 X_3 f \tag{18}$$

bestimmt.

Um alle bei der Gruppe (17) invarianten Punktfiguren zu bestimmen, schreiben wir die Gruppe in vier homogenen Veränderlichen:

$$\begin{aligned} X_1 f &= x_4 p_1 + 2x_1 p_2 + 3x_2 p_3 \\ -2X_2 f &= x_1 p_1 - x_2 p_2 - 3x_3 p_3 + 3x_4 p_4 \\ X_3 f &= x_4 p_2 + 3x_1 p_3 \end{aligned}$$

und fügen noch:

$$X_4 f = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4$$

hinzu.

Durch Nullsetzen der Determinante:

$$(19) \qquad \begin{vmatrix} x_4 & 2x_1 & 3x_2 & 0 \\ x_1 & -x_2 & -3x_3 & 3x_4 \\ 0 & x_4 & 3x_1 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix}$$

erhalten wir zwei invariante Flächen, nämlich die Cayleysche Linienfläche:

$$(20) \qquad x_3 x_4^2 - 3x_1 x_2 x_4 + 2x_1^3 = 0$$

und die Ebene $x_4 = 0$. Die dreireihigen Unterdeterminanten von (19) liefern, gleich Null gesetzt, die invariante Gerade: $x_4 = 0$, $x_1^3 = 0$, in der die Cayleysche Linienfläche von der Ebene: $x_4 = 0$ geschnitten wird. Die zweireihigen Unterdeterminanten von (19) endlich ergeben, gleich Null gesetzt, den invarianten Punkt: $x_4 = 0$, $x_1^2 = 0$, $x_2^2 = 0$, der auf der eben erwähnten Geraden liegt.

Wir beschliessen den Paragraphen, indem wir noch einen Satz aussprechen, der aus den gegebenen Entwickelungen unmittelbar folgt:

Satz 6. *Gestattet eine Fläche des Raumes mehr als zwei unabhängige infinitesimale projective Transformationen, so ist sie entweder eine Ebene oder eine Kegelfläche oder die Abwickelbare einer gewundenen Curve dritter Ordnung oder eine Fläche zweiten Grades oder endlich die Cayleysche Linienfläche dritter Ordnung.*

Die Fläche zweiten Grades und die Cayleysche Linienfläche sind also die einzigen nicht abwickelbaren Flächen, die der Bedingung dieses Satzes genügen.

§ 48.

Gemäss unserm Versprechen auf S. 190 wollen wir jetzt kurz andeuten, wie man alle krummen Flächen des Raumes finden kann, die gerade zwei und nicht mehr unabhängige infinitesimale projective Transformationen gestatten.

Gestattet eine krumme Fläche blos zwei unabhängige infinitesimale projective Transformationen, etwa $X_1 f$ und $X_2 f$, so erzeugen diese eine zweigliedrige projective Gruppe G, bei der auch die Punkte der Fläche durch eine zweigliedrige Gruppe g transformirt werden, denn unter den infinitesimalen Transformationen: $c_1 X_1 f + c_2 X_2 f$ kann es keine geben, die alle Punkte der Fläche stehen lässt, weil sonst überhaupt alle Punkte des Raumes in Ruhe blieben. Denken wir uns

nun die Punkte auf der Fläche durch zwei Coordinaten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ bestimmt, so wird g eine zweigliedrige Gruppe in $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$, die bei geeigneter Wahl dieser Veränderlichen jedenfalls eine der vier Formen:

$$\mathfrak{q},\ \mathfrak{x}\mathfrak{q};\quad \mathfrak{q},\ \mathfrak{y}\mathfrak{q};\quad \mathfrak{p},\ \mathfrak{x}\mathfrak{p}+\mathfrak{q};\quad \mathfrak{p},\ \mathfrak{q}$$

erhalten kann (s. Kap. 3, S. 57).

Wir bemerken weiter, dass unsre Fläche sicher nicht abwickelbar ist, denn (s. S. 191) jede abwickelbare Fläche gestattet entweder keine oder eine oder mindestens drei unabhängige infinitesimale projective Transformationen. Es giebt demnach auf unsrer Fläche zwei verschiedene Schaaren von Haupttangentencurven, die natürlich beide bei der Gruppe G invariant bleiben. Hieraus aber folgt, dass die Gruppe g in $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ mindestens zwei verschiedene Schaaren von je ∞^1 Curven invariant lassen muss.

Hierdurch ist es von vornherein ausgeschlossen, dass g dem durch $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{x}\mathfrak{q}$ repräsentirten Gruppentypus angehört, denn $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{x}\mathfrak{q}$ lässt nach S. 66 blos eine Schaar von ∞^1 Curven, nämlich die Schaar: $\mathfrak{x} = \text{const.}$ invariant. Aus andern Gründen ist es unmöglich, dass g dem durch $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{y}\mathfrak{q}$ repräsentirten Typus angehört. Die beiden Schaaren von Haupttangentencurven unsrer Fläche würden nämlich in diesem Falle durch die beiden Gleichungen: $\mathfrak{x} = \text{const.}$ und $\mathfrak{y} = \text{const.}$ dargestellt und es bliebe bei G jede einzelne Curve der Schaar: $\mathfrak{x} = \text{const.}$ in Ruhe. Hieraus folgte sofort, dass die Haupttangentencurven: $\mathfrak{x} = \text{const.}$ entweder gewundene Curven dritter Ordnung oder gerade Linien wären, denn ebene krumme Curven könnten sie nicht sein, da unsre Fläche nicht abwickelbar ist. Aber auch Curven dritter Ordnung könnten sie nicht sein, da nach S. 189 f. die Gruppe G sicher nicht ∞^1 gewundene Curven dritter Ordnung zu gleicher Zeit in Ruhe lässt; also wären die Curven: $\mathfrak{x} = \text{const.}$ nothwendig gerade Linien. In der Gruppe G gäbe es ferner stets eine infinitesimale Transformation: $c_1 X_1 f + c_2 X_2 f$, bei der eine beliebig gewählte unter den Curven: $\mathfrak{y} = \text{const.}$ ihre Lage behielte; da alle Curven $\mathfrak{x} = \text{const.}$ schon von vornherein in Ruhe bleiben, so behielten bei $c_1 X_1 f + c_2 X_2 f$ zugleich alle Punkte der betreffenden Curve: $\mathfrak{y} = \text{const.}$ ihre Lage, also wäre auch diese Curve eine Gerade. Beide Schaaren von Haupttangentencurven unsrer Fläche wären daher unter der gemachten Voraussetzung gerade Linien, das heisst die Fläche wäre von der zweiten Ordnung, das aber ist ausgeschlossen, da sie nicht mehr als zwei unabhängige infinitesimale projective Transformationen gestatten soll.

Aus dem Gesagten geht hervor, dass die Gruppe G entweder dem durch $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{x}\mathfrak{p}+\mathfrak{q}$ oder dem durch $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ repräsentirten Typus angehören

muss, also erkennen wir, dass G die Punkte der invarianten Fläche transitiv transformirt. Hieraus endlich folgt, dass $X_1 f$ und $X_2 f$ durch keine Identität von der Form:

$$\varphi_1(x, y, z) X_1 f + \varphi_2(x, y, z) X_2 f \equiv 0$$

verknüpft sein können. Wir gelangen somit zu dem

Satz 7. *Gestattet eine krumme Fläche des Raumes x, y, z gerade zwei und nicht mehr unabhängige infinitesimale projective Transformationen des Raumes, etwa $X_1 f$ und $X_2 f$, so sind $X_1 f$ und $X_2 f$ durch keine Identität von der Form:*

$$\varphi_1(x, y, z) X_1 f + \varphi_2(x, y, z) X_2 f \equiv 0 \tag{21}$$

verknüpft. Die Fläche ist sicher nicht abwickelbar und auch keine Fläche zweiten Grades.

Will man alle Flächen von der hier untersuchten Beschaffenheit wirklich aufstellen, so muss man zunächst alle zweigliedrigen projectiven Gruppen des Raumes aufsuchen, zwischen deren infinitesimalen Transformationen $X_1 f$ und $X_2 f$ keine Identität (21) besteht. Jede dieser Gruppen lässt ∞^1 Flächen invariant, deren Gleichungen durch ausführbare Operationen bestimmt werden können, die aber freilich unter Umständen auch sämmtlich abwickelbar oder vom zweiten Grade sein können. Man hat daher schliesslich unter den gefundenen Flächen noch alle die auszusuchen, die weder abwickelbar noch vom zweiten Grade sind.

Wenn $X_1 f$ und $X_2 f$ nicht vertauschbar sind, so ist die Zahl der möglichen Fälle verhältnissmässig gering. Grösser ist sie, wenn $X_1 f$ und $X_2 f$ vertauschbar sind. Am einfachsten ist hier der Fall, dass $X_1 f$ und $X_2 f$ dasselbe nicht ausgeartete Tetraeder invariant lassen; wählt man dieses Tetraeder zum Coordinatentetraeder, so lauten die Gleichungen der betreffenden Flächen:

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} x_3^{\lambda_3} x_4^{\lambda_4} = \text{const.} \quad (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0).$$

Im Allgemeinen gestattet eine Fläche von dieser Form wirklich nur zwei unabhängige infinitesimale projective Transformationen.

Kapitel 10.

Die projective Gruppe einer Fläche zweiten Grades im gewöhnlichen Raume.

Jede nicht ausgeartete Fläche zweiten Grades im gewöhnlichen Raume gestattet gerade sechs unabhängige infinitesimale projective Trans-

formationen, die eine sechsgliedrige projective Gruppe erzeugen. Wählen wir das Coordinatensystem so, dass die Fläche zweiten Grades durch die Gleichung:

$$z - xy = 0 \tag{1}$$

dargestellt wird, so lautet diese sechsgliedrige Gruppe (vgl. S. 134):

$$\begin{cases} X_1 f = p + yr, \quad X_2 f = xp + zr \\ X_3 f = x(xp + yq + zr) - zq \\ X_4 f = q + xr, \quad X_5 f = yq + zr \\ X_6 f = y(xp + yq + zr) - zp, \end{cases} \tag{2}$$

sie ist die grösste continuirliche projective Gruppe, bei der die Fläche (1) invariant bleibt und ist daher durch diese Fläche vollständig definirt.

Wir bestimmen jetzt zunächst in § 49 die sämmtlichen Untergruppen der Gruppe (2), das heisst, wir theilen diese Untergruppen in der bekannten Weise in Typen ein (s. Abschn. I, S. 281) und stellen dann für jeden Typus von Untergruppen einen Repräsentanten auf. In § 50 suchen wir alle bei der Gruppe (2) invarianten Schaaren von ∞^4 Curven; die Kenntniss dieser Curvenschaaren wird uns bei der Bestimmung aller primitiven projectiven Gruppen des Raumes nützlich sein. In § 51 endlich bestimmen wir alle Untergruppen einer gewissen siebengliedrigen Gruppe, die mit der Gruppe (2) in sehr engem Zusammenhange steht.

§ 49.

Die Gruppe (2) transformirt die Punkte der Fläche (1) durch eine isomorphe Gruppe, die leicht angebbar ist. Wählen wir nämlich x und y zu Coordinaten der Punkte auf der Fläche (1), so erhalten wir nach Abschn. I, S. 233 f. die infinitesimalen Transformationen der bewussten Gruppe, indem wir in (2) die Glieder mit r weglassen und in den übrigen Gliedern $z = xy$ setzen. Es ist also:

$$p, \; xp, \; x^2 p, \; q, \; yq, \; y^2 q \tag{3}$$

die Gruppe, durch welche die Punkte von (1) bei der Gruppe (2) transformirt werden.

Die Gruppe (3) ist sechsgliedrig und mit (2) gleichzusammengesetzt; wir können daher, statt die Untergruppen von (2) direkt zu bestimmen, die von (3) aufsuchen und erhalten dann aus den Untergruppen von (3) ohne Weiteres die von (2), wenn wir die infinitesimalen Transformationen (3) der Reihe nach durch $X_1 f \ldots X_6 f$ ersetzen.

Um die Untergruppen der Gruppe (3) auf einfache Normalformen zu bringen, dürfen wir alle endlichen Transformationen:

$$(4) \qquad x_1 = \frac{x + a_1}{a_2 x + a_3}, \quad y = \frac{y + a_4}{a_5 y + a_6}$$

dieser Gruppe benutzen. Wir wollen aber ausserdem, um die Zahl der aufzuführenden Normalformen zu verringern, auch noch von der Transformation:

$$(5) \qquad x_1 = y, \; y_1 = x$$

Gebrauch machen, das heisst wir wollen die Vertauschung von x und y zulassen; da die beiden Gleichungen: $x =$ const. und $y =$ const. auf der Fläche (1) offenbar die beiden Schaaren von Erzeugenden bestimmen, so kommt das darauf hinaus, dass wir die beiden Schaaren von Erzeugenden der Fläche als gleichberechtigt betrachten. Wir dürfen das, da es projective Transformationen des Raumes giebt, welche die Fläche (1) invariant lassen und dabei ihre beiden Schaaren von Erzeugenden vertauschen.

Man überzeugt sich leicht, dass die Gruppe (3), die wir kurz G_6 nennen wollen, blos zwei invariante Untergruppen enthält, nämlich die $g_3 : p,\ xp,\ x^2p$ und die $\gamma_3 : q,\ yq,\ y^2q$. Hierauf lässt sich eine naturgemässe Eintheilung der Untergruppen der G_6 gründen und zwar unterscheiden wir zwei Arten von Untergruppen: Zur ersten Art rechnen wir alle, die weder mit γ_3 noch mit g_3 eine infinitesimale Transformation gemein haben, es ist klar, dass jede Untergruppe dieser Art höchstens drei Parameter enthalten kann. Zur zweiten Art gehören alle übrigen Untergruppen der G_6, jede von diesen hat wenigstens mit einer der beiden Gruppen g_3 und γ_3 eine oder mehrere infinitesimale Transformationen gemein, die dann für sich eine Untergruppe erzeugen (s. Abschn. I, S. 211, Satz 7).

Die eingliedrigen Untergruppen der ersten Art sind von einer infinitesimalen Transformation:

$$(\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2) p + (\beta_1 + \beta_2 y + \beta_3 y^2) q$$

erzeugt, in der weder alle drei α, noch alle drei β verschwinden dürfen. Auf Grund von S. 17 können wir diese infinitesimale Transformation vermöge einer geeigneten Transformation (4) auf eine Normalform bringen, die verschieden ausfällt, jenachdem es unter den beiden Ausdrücken: $\alpha_2^2 - 4\alpha_1\alpha_3$ und $\beta_2^2 - 4\beta_1\beta_3$ zwei, einen oder gar keinen von Null verschiedenen giebt. Diesen drei Fällen entsprechen die vier verschiedenen Normalformen:

$$xp + cyq \;\; (c \neq 0); \;\; p + yq; \;\; xp + q; \;\; p + q,$$

da wir aber die Vertauschung von x und y zulassen, so sind $p + yq$ und $xp + q$ nicht als verschieden anzusehen, in unsrer ersten Klasse brauchen wir also blos drei verschiedene Typen von eingliedrigen Untergruppen zu berücksichtigen, deren Repräsentanten sind:

$$p + q;\ p + yq;\ xp + cyq\ (c \neq 0). \tag{6}$$

Jede zweigliedrige Untergruppe der ersten Art hat die Form:

$$\Xi_1 f + \mathsf{H}_1 f,\ \Xi_2 f + \mathsf{H}_2 f,$$

wo $\Xi_1 f$, $\Xi_2 f$ nothwendig eine zweigliedrige Untergruppe der g_3 und $\mathsf{H}_1 f$, $\mathsf{H}_2 f$ eine zweigliedrige Untergruppe der γ_3 erzeugen. Hieraus folgt, dass die infinitesimalen Transformationen unsrer Gruppe nicht vertauschbar sind und also derart gewählt werden können, dass die Gleichung:

$$(\Xi_1 f + \mathsf{H}_1 f,\ \Xi_2 f + \mathsf{H}_2 f) = \Xi_1 f + \mathsf{H}_1 f$$

besteht, die sich sofort in die beiden:

$$(\Xi_1 \Xi_2) = \Xi_1 f,\ (\mathsf{H}_1 \mathsf{H}_2) = \mathsf{H}_1 f$$

zerlegt. Auf Grund von S. 17 können wir daher die Veränderlichen x und y so wählen, dass:

$$\Xi_1 f = p,\ \Xi_2 f = xp,\ \mathsf{H}_1 f = q,\ \mathsf{H}_2 f = yq$$

wird. Unsre Gruppe kann demnach immer die Form:

$$p + q,\ xp + yq \tag{7}$$

erhalten.

Jede dreigliedrige Untergruppe der ersten Art enthält nach Abschn. I, S. 591, Satz 5 sicher eine zweigliedrige Untergruppe, die natürlich auch von der ersten Art ist und daher die Form: $p + q$, $xp + yq$ erhalten kann. Ausserdem giebt es in der Gruppe noch eine infinitesimale Transformation, die wir uns auf die Form:

$$Xf = (\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2) p + y^2 q$$

gebracht denken können und zwar dürfen α_1, α_2, α_3 nicht alle verschwinden. Durch zweimal wiederholte Combination von Xf mit $xp + yq$ ergeben sich jetzt die Transformationen:

$$-\alpha_1 p + \alpha_3 x^2 p + y^2 q$$
$$+\alpha_1 p + \alpha_3 x^2 p + y^2 q,$$

die ebenfalls unsrer dreigliedrigen Gruppe angehören, da aber p und xp beide nicht auftreten dürfen, so müssen α_1 und α_2 verschwinden. Combiniren wir endlich $p + q$ mit $\alpha_3 x^2 p + y^2 q$, so finden wir:

$$2\alpha_3 xp + 2yq,$$

so dass also $\alpha_3 = 1$ sein muss. Wir gelangen demnach zu der Gruppe:

$$p + q,\ xp + yq,\ x^2 p + y^2 q. \tag{8}$$

Jetzt zu den Untergruppen der zweiten Art.

Ist g eine solche Untergruppe, so können wir annehmen, dass g mit g_3 mindestens eine infinitesimale Transformation gemein hat und mit γ_3 jedenfalls nicht mehr Transformationen als mit g_3; wäre diese Annahme nicht von vornherein erfüllt, so brauchten wir blos x mit y zu vertauschen. Die in g enthaltenen infinitesimalen Transformationen von g_3 erzeugen nun eine Untergruppe von g_3, die wir durch geeignete Wahl von x auf eine der vier Formen:

$$p,\ xp,\ x^2p;\quad p,\ xp;\quad p;\quad xp$$

bringen können. Bei jedem dieser vier Fälle können aber in g noch andre infinitesimale Transformationen der G_6 auftreten, die dann natürlich der g_3 nicht angehören dürfen. Lassen sich diese hinzutretenden Transformationen so wählen, dass sie alle der γ_3 angehören, so kann man die Normalformen der betreffenden Gruppen leicht angeben, nur muss man darauf sehen, dass von γ_3 nicht mehr infinitesimale Transformationen auftreten als von g_3. Wir stellen diese Untergruppen zusammen wie folgt:

$$(9)\qquad \begin{cases} p,\ xp,\ x^2p,\ q,\ yq & p,\ xp,\ q,\ yq \\ p,\ xp,\ x^2p,\ q & p,\ xp,\ q \\ p,\ xp,\ x^2p,\ yq & p,\ xp,\ yq \\ p,\ xp,\ x^2p & p,\ xp \\ p,\ q;\ p,\ yq;\ p;\ xp,\ q;\ xp,\ yq;\ xp, \end{cases}$$

doch muss hier die Gruppe $xp,\ q$ weggelassen werden, weil sie durch Vertauschung von x und y in die Gruppe: $p,\ yq$ übergeht.

Jede der noch fehlenden Gruppen enthält erstens gewisse und zwar höchstens zwei unabhängige infinitesimale Transformationen von g_3, die eine gewisse Gruppe $\mathfrak{g}$ erzeugen, zweitens enthält sie mindestens eine infinitesimale Transformation:

$$\Xi f + \mathsf{H} f,$$

die weder g_3 noch γ_3 angehört, dazu können endlich drittens noch infinitesimale Transformationen von γ_3 kommen. Es ist klar, dass die infinitesimalen Transformationen von $\mathfrak{g}$ mit jedem Ξf zusammen eine in g_3 enthaltene Untergruppe erzeugen, von der $\mathfrak{g}$ eine invariante Untergruppe ist. Da aber in der Gruppe $p,\ xp,\ x^2p$ einzig und allein die eingliedrigen Untergruppen vom Typus p in einer grösseren Untergruppe invariant sind und zwar p selbst in der Untergruppe $p,\ xp$, so ergiebt sich, dass $\mathfrak{g}$ durch geeignete Wahl von x auf die Form p gebracht werden kann und dass dabei die noch fehlenden Gruppen die Form:

$$p,\ xp + (\beta_1 + \beta_2 y + \beta_3 y^2) q$$

erhalten, wozu allerdings möglicherweise noch gewisse Transformationen von der Form: $(\gamma_1 + \gamma_2 y + \gamma_3 y^2) q$ hinzutreten können.

Da β_1, β_2, β_3 nicht alle verschwinden dürfen, können wir durch geeignete Wahl von y eine der beiden Normalformen:

$$p,\ xp + q;\ p,\ xp + cyq \quad (c \neq 0)$$

erreichen und es fragt sich jetzt nur noch, was für infinitesimale Transformationen $(\gamma_1 + \gamma_2 y + \gamma_3 y^2) q$ noch hinzutreten können. Im ersten Falle ergiebt sich sofort: $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$, da q nicht für sich vorkommen darf. Im zweiten Falle findet man durch Combination, dass entweder q oder $y^2 q$ noch vorhanden sein kann; durch die Transformation: $y_1 y = 1$ geht aber $y^2 q$ in $-q_1$ über und zugleich $xp + cyq$ in $xp - cy_1 q_1$, während p ungeändert bleibt, also bleiben im Ganzen nur die drei Gruppen übrig:

(10) $\quad p,\ xp + q;\ p,\ xp + cyq;\ p,\ xp + cyq,\ q \quad (c \neq 0)$.

Damit sind die Untergruppen der G_6 alle gefunden und wir haben nur noch die Gruppen (6) bis (10) in einer Tabelle zusammenzustellen:

Alle Typen von Untergruppen der Gruppe:

(3) $\boxed{p,\ xp,\ x^2 p,\ q,\ yq,\ y^2 q}$

wenn x und y als gleichberechtigt betrachtet werden:

I) Fünfgliedrige:

$\boxed{p,\ xp,\ x^2 p,\ q,\ yq}$.

II) Viergliedrige:

$\boxed{p,\ xp,\ x^2 p,\ q}$ $\boxed{p,\ xp,\ x^2 p,\ yq}$ $\boxed{p,\ xp,\ q,\ yq}$.

III) Dreigliedrige:

$\boxed{p,\ xp,\ x^2 p}$ $\boxed{p,\ xp,\ q}$ $\boxed{p,\ xp,\ yq}$

$\boxed{p + q,\ xp + yq,\ x^2 p + y^2 q}$ $\boxed{p,\ xp + cyq,\ q \quad (c \neq 0)}$.

IV) Zweigliedrige:

$\boxed{p,\ xp}$ $\boxed{p,\ xp + q}$ $\boxed{p + q,\ xp + yq}$

$\boxed{p,\ xp + cyq \quad (c \neq 0)}$ $\boxed{p,\ q}$ $\boxed{p,\ yq}$ $\boxed{xp,\ yq}$.

V) Eingliedrige:

$$\boxed{p} \qquad \boxed{p+q} \qquad \boxed{p+yq} \qquad \boxed{xp} \qquad \boxed{xp+cyq \quad (c \neq 0)} .$$

Durch diese Untergruppen werden alle Typen von Untergruppen unsrer G_6 repräsentirt und im Allgemeinen repräsentiren auch zwei verschiedene der angegebenen Untergruppen stets zwei verschiedene Typen, eine Ausnahme davon machen nur die Gruppen, die einen willkürlichen Parameter enthalten. Bei den Gruppen III, 5 liefern nämlich die beiden Parameterwerthe c und $\frac{1}{c}$ stets zwei gleichberechtigte Untergruppen der G_6, bei den Gruppen IV, 4 ebenso die beiden Parameterwerthe c und $-c$, bei den Gruppen V, 5 endlich entsprechen den Parameterwerthen: c, $-c$, $\frac{1}{c}$, $-\frac{1}{c}$ vier gleichberechtigte Untergruppen der G_6. Der Grund hierfür liegt theils in der Vertauschbarkeit von x und y, theils darin, dass man $\frac{1}{y}$ als neues y einführen kann.

Aus der oben stehenden Tabelle kann man nun sofort alle Untergruppen der projectiven Gruppe (2) ableiten. Man hat nur überall für p, xp, x^2p, q, yq, y^2q die folgenden infinitesimalen Transformationen einzusetzen:

$$(11) \qquad \begin{cases} p \equiv p + yr, \quad xp \equiv xp + zr \\ x^2p \equiv x(xp + yq + zr) - zq \\ q \equiv q + xr, \quad yq \equiv yq + zr \\ y^2q \equiv y(xp + yq + zr) - zp . \end{cases}$$

Wir unterlassen es, die Untergruppen von (2) wirklich hinzuschreiben, und machen nur noch ein paar allgemeine Bemerkungen über sie.

Auf der Fläche: $z - xy = 0$ giebt es zwei Schaaren von Erzeugenden; jede dieser Schaaren bildet eine projective einfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, die bei der Gruppe (2) und bei allen ihren Untergruppen projectiv transformirt wird. Bedenkt man nun, dass die beiden Schaaren von Erzeugenden auf der Fläche beziehungsweise durch die Gleichungen: $x = \text{const.}$ und $y = \text{const.}$ dargestellt werden, so erkennt man leicht, dass es in der Gruppe (2) nur einen Typus von solchen Untergruppen giebt, die beide Schaaren von Erzeugenden dreigliedrig transformiren; Repräsentant dieses Typus ist die Gruppe:

$$(12) \qquad \begin{cases} p + q + (x + y)r \\ xp + yq + 2zr \\ (x + y)(xp + yq + zr) - z(p + q), \end{cases}$$

die der Gruppe: $p+q,\ xp+yq,\ x^2p+y^2q$ in der Tabelle auf S. 203 f. entspricht. Alle übrigen Untergruppen transformiren jedenfalls eine der beiden Schaaren von Erzeugenden höchstens zweigliedrig und lassen demnach sicher eine Erzeugende der Fläche stehen. Die Gruppe (12) lässt keine Erzeugende stehen, dafür aber die Ebene: $x-y=0$ und ihren Pol in Bezug auf die Fläche zweiten Grades: $z-xy=0$; sie ist offenbar die grösste Untergruppe von (2), bei der diese Ebene invariant bleibt. Demnach gilt der

Satz 1. *Jede Untergruppe der sechsgliedrigen projectiven Gruppe einer nicht ausgearteten Fläche zweiten Grades lässt entweder eine Erzeugende der Fläche stehen, oder sie ist die dreigliedrige Gruppe, bei der ein nicht auf der Fläche gelegener Punkt nebst seiner Polarebene in Bezug auf die Fläche invariant bleibt.*

Ferner ist zu bemerken, dass jede Untergruppe der Gruppe (2) mit sich dualistisch ist. In der That, durch das Polarsystem:

$$z+z_1-(xy_1+x_1y)=0$$

der Fläche: $z-xy=0$ ist eine dualistische Transformation bestimmt, bei der die Fläche: $z-xy=0$ und natürlich auch ihre projective Gruppe (2) invariant bleibt. Schreiben wir diese dualistische Transformation nach Anleitung von Abschn. II, Theor. 15, S. 150 als eine homogene Berührungstransformation des Raumes x, y, z, so erhalten wir ihre Gleichungen in der Form:

$$(13)\qquad \begin{cases} x_1=-\frac{q}{r}, & y_1=-\frac{p}{r}, & z_1=-\frac{xp+yq+zr}{r} \\ p_1=yr, & q_1=xr, & r_1=-r. \end{cases}$$

Bei der homogenen Berührungstransformation (13) geht aber augenscheinlich jede infinitesimale Transformation der Gruppe (2) in sich über, also ist wirklich jede Untergruppe von (2) mit sich dualistisch und zwar vermöge der Transformation (13).

Hat man für jeden Typus von Untergruppen der Gruppe (2) einen Repräsentanten aufgestellt, so kann man noch fragen, ob diese Repräsentanten innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe des Raumes lauter verschiedene Typen repräsentiren. Wir wollen wenigstens erwähnen, dass diese Frage im Allgemeinen mit ja zu beantworten ist; unmittelbar klar ist das für alle Untergruppen von (2), die blos die Fläche: $z-xy=0$ und sonst keine Fläche zweiten Grades invariant lassen.

Endlich möge noch der Thatsache gedacht werden, dass eine projective Gruppe, die zwei verschiedene Flächen zweiten Grades invariant lässt, stets alle Flächen des durch beide bestimmten Büschels von

Flächen zweiten Grades in Ruhe lässt. Man erkennt das, wenn man für jede Untergruppe von (2) die zugehörigen invarianten Flächen zweiten Grades bestimmt.

§ 50.

Wir suchen hier alle vierfach unendlichen Curvenschaaren des Raumes, die bei der sechsgliedrigen projectiven Gruppe $\mathfrak{G}_6$ einer nicht ausgearteten Fläche zweiten Grades invariant bleiben.

Wenn eine Schaar von ∞^4 Curven bei der genannten $\mathfrak{G}_6$ invariant bleibt, so gestattet jede Curve der Schaar mindestens zwei unabhängige infinitesimale Transformationen der $\mathfrak{G}_6$ und ist daher nach § 46 entweder eben oder eine gewundene Curve dritter Ordnung. Der zweite Fall kann nicht eintreten, da eine nicht ausgeartete Fläche zweiten Grades und eine gewundene Curve dritter Ordnung niemals gleichzeitig bei einer projectiven Gruppe mit mehr als einem Parameter invariant bleiben können (s. S. 189), also ergiebt sich, dass die ganze Schaar aus lauter ebenen Curven besteht.

Es sind nun zwei Fälle denkbar, entweder nämlich sind die ∞^4 Curven der Schaar im Allgemeinen ebene krumme Curven oder sie sind sämmtlich gerade Linien. Im zweiten Falle haben wir wirklich eine bei unsrer $\mathfrak{G}_6$ invariante Schaar von ∞^4 Curven, denn es giebt ja genau ∞^4 gerade Linien und deren Inbegriff bleibt bei der $\mathfrak{G}_6$ invariant. Der erste Fall aber kann, wie man sich leicht überzeugt, gar nicht eintreten.

In der That, wir wollen annehmen, dass der erste Fall eintritt, und zwar sei C irgendeine der ∞^4 ebenen krummen Curven und es sei g die grösste in $\mathfrak{G}_6$ enthaltene Untergruppe, bei der C invariant bleibt. Bei g werden dann die Punkte der Ebene von C durch eine projective Gruppe γ transformirt, die C invariant lässt. Diese Gruppe γ ist mit g nothwendig holoedrisch isomorph, denn es giebt ausser der identischen Transformation höchstens noch eine projective Transformation, die eine nicht ausgeartete Fläche zweiten Grades und zugleich alle Punkte einer Ebene in Ruhe lässt. Demnach ist γ mindestens zweigliedrig und die ebene krumme Curve C ist ein nicht ausgearteter Kegelschnitt, so dass unsre invariante Schaar von ∞^4 Curven aus ∞^4 Kegelschnitten besteht. Die Ebenen dieser Kegelschnitte können nicht sämmtlich Tangentialebenen der invarianten Fläche zweiten Grades sein, denn sonst blieben mit jedem der Kegelschnitte zugleich die beiden Erzeugenden der Fläche invariant, die in seiner Ebene liegen, daraus aber würde folgen, dass die zu dem Kegelschnitt gehörige Gruppe γ blos eingliedrig wäre, was ein Widerspruch ist. Würden andrerseits die

Ebenen unsrer ∞^4 Kegelschnitte die Fläche zweiten Grades im Allgemeinen in nicht ausgearteten Kegelschnitten treffen, so müssten alle ∞^4 Kegelschnitte auf der Fläche liegen, denn sonst bliebe mit jedem unsrer ∞^4 Kegelschnitte zugleich noch ein andrer nicht ausgearteter Kegelschnitt derselben Ebene invariant und γ wäre wieder blos eingliedrig. Auf der Fläche zweiten Grades giebt es aber überhaupt blos ∞^3 Kegelschnitte, also kommen wir abermals auf einen Widerspruch. Der oben bezeichnete erste Fall kann demnach wirklich nicht eintreten.

Damit haben wir den

Satz 2. *Die Schaar aller Geraden ist die einzige Schaar von ∞^4 Curven, die bei der sechsgliedrigen projectiven Gruppe einer nicht ausgearteten Fläche zweiten Grades invariant bleibt.*

Aus diesem Satze folgt insbesondere, dass die gerade Linie die einzige Curve des Raumes ist, die bei der projectiven Gruppe einer nicht ausgearteten Fläche zweiten Grades genau ∞^4 verschiedene Lagen annimmt.

§ 51.

Schreibt man die projective Gruppe (2) der Fläche: $z - xy = 0$ in vier homogenen Veränderlichen $x_1 \ldots x_4$ und fügt man noch die infinitesimale Transformation: $x_1 p_1 + \cdots + x_4 p_4$ hinzu, so erhält man eine siebengliedrige Gruppe:

$$(14)\quad \begin{cases} x_4 p_1 + x_2 p_3, & x_1 p_1 - x_2 p_2 + x_3 p_3 - x_4 p_4, & x_3 p_2 + x_1 p_4 \\ x_4 p_2 + x_1 p_3, & -x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 - x_4 p_4, & x_3 p_1 + x_2 p_4 \\ & x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4, & \end{cases}$$

die grösste continuirliche lineare homogene Gruppe in $x_1 \ldots x_4$, bei der die Gleichung: $x_3 x_4 - x_1 x_2 = 0$ invariant bleibt. Diese Gruppe, die in der Transformationstheorie des vierfach ausgedehnten Raumes eine Rolle spielt, ist mit der Gruppe:

$$(15)\qquad p,\ xp,\ x^2 p,\ q,\ yq,\ y^2 q,\ r$$

des gewöhnlichen Raumes gleichzusammengesetzt; wir können daher alle Untergruppen von (14) sofort hinschreiben, wenn wir alle Untergruppen von (15) kennen. Diese Untergruppen wollen wir jetzt noch aufstellen; in Kapitel 13, bei der Bestimmung aller imprimitiven projectiven Gruppen des Raumes, wird uns das von Nutzen sein.

Da die Gruppe (15) eine ausgezeichnete infinitesimale Transformation enthält, nämlich r, und ferner eine sechsgliedrige invariante Untergruppe, nämlich die G_6: $p,\ xp,\ x^2 p,\ q,\ yq,\ y^2 q$, von der wir

die Untergruppen bereits kennen, so ist es sehr leicht, alle Untergruppen von (15) zu finden.

In der That: Enthält eine Untergruppe von (15) die infinitesimale Transformation r, so entsteht sie aus einer Untergruppe der G_6 durch blose Hinzufügung von r und zwar kann man diese Untergruppe der G_6 von vornherein auf eine der Normalformen von S. 203 f. gebracht denken. Enthält dagegen eine Untergruppe von (15) die Transformation r nicht, so hat sie die Form:

$$Z_1 f + \alpha_1 r, \ldots, Z_m f + \alpha_m r,$$

wo $Z_1 f \ldots Z_m f$ eine m-gliedrige Untergruppe der G_6 erzeugen, die wir ebenfalls in einer der Formen auf S. 203 f. annehmen können. Setzen wir insbesondere voraus, dass sich unter den infinitesimalen Transformationen $(Z_i Z_k)$ gerade $l \leqq m$ von einander unabhängige befinden und dass sich alle $(Z_i Z_k)$ aus $Z_1 f \ldots Z_l f$ allein linear ableiten lassen, so ergiebt sich ohne Weiteres, dass $\alpha_1 \ldots \alpha_l$ verschwinden und dass unsre Untergruppe die Form hat:

$$(16) \qquad Z_1 f \ldots Z_l f,\ Z_{l+1} f + \alpha_{l+1} r, \ldots, Z_m f + \alpha_m r.$$

Von den noch übrigen Parametern $\alpha_{l+1} \ldots \alpha_m$, die ganz willkürlich sind, können wir im Allgemeinen noch einen oder mehrere gleich 1 machen, indem wir die Gruppe (16) vermöge der grössten Untergruppe der G_6 transformiren, in der die Gruppe $Z_1 f \ldots Z_m f$ invariant ist.

Nur zwei Beispiele. In der Gruppe:

$$p + \alpha_1 r,\ q + \alpha_2 r,\ xp + \alpha_3 r,\ yq + \alpha_4 r$$

verschwinden α_1 und α_2, während α_3 und α_4 beliebig bleiben und auch nicht gleich 1 gemacht werden können. In der Gruppe:

$$p + \alpha_1 r,\ q + \alpha_2 r$$

kann man α_1, wenn es nicht verschwindet, durch Einführung eines neuen x gleich 1 machen; von α_2 gilt entsprechendes. Da x und y vertauscht werden können, ergeben sich demnach die folgenden drei Gruppen:

$$p,\ q;\ p,\ q + r;\ p + r,\ q + r,$$

die ebensoviele Typen von Untergruppen der Gruppe (15) repräsentiren.

Wir stellen jetzt die Untergruppen von (15) zusammen, indem wir sie nach der Parameterzahl der Gruppe ordnen, durch die x und y bei jeder von ihnen transformirt werden.

Die Untergruppen der Gruppe:

(15) $$p,\ xp,\ x^2p,\ q,\ yq,\ y^2q,\ r$$

wenn x und y als gleichberechtigt angesehen werden.

I) x und y sechsgliedrig transformirt:

$$p,\ xp,\ x^2p,\ q,\ yq,\ y^2q\ .$$

II) x und y fünfgliedrig:

$$p,\ xp,\ x^2p,\ q,\ yq + ar \qquad p,\ xp,\ x^2p,\ q,\ yq,\ r\ .$$

III) x und y viergliedrig:

$$p,\ xp,\ x^2p,\ q \qquad p,\ xp,\ x^2p,\ q + r \qquad p,\ xp,\ x^2p,\ q,\ r$$

$$p,\ xp,\ x^2p,\ yq + ar \qquad p,\ xp,\ x^2p,\ yq,\ r$$

$$p,\ xp + ar,\ q,\ yq + br \qquad p,\ xp,\ q,\ yq,\ r\ .$$

IV) x und y dreigliedrig:

$$p,\ xp,\ x^2p \qquad p,\ xp,\ x^2p,\ r$$

$$p,\ xp + ar,\ q \qquad p,\ xp + ar,\ q + r \qquad p,\ xp,\ q,\ r$$

$$p,\ xp + ar,\ yq + br \qquad p,\ xp,\ yq,\ r$$

$$p,\ xp + cyq + ar,\ q\ \ (c \neq 0) \qquad p,\ xp + cyq,\ q,\ r\ \ (c \neq 0)$$

$$p + q,\ xp + yq,\ x^2p + y^2q \qquad p + q,\ xp + yq,\ x^2p + y^2q,\ r\ .$$

V) x und y zweigliedrig:

$$p,\ xp + ar \qquad p,\ xp,\ r$$

$$p,\ xp + q + ar \qquad p,\ xp + q,\ r$$

$$p,\ xp + cyq + ar\ \ (c \neq 0) \qquad p,\ xp + cyq,\ r\ \ (c \neq 0)$$

$$p + q,\ xp + yq + ar \qquad p + q,\ xp + yq,\ r$$

$[p, q]$ $[p, q + r]$ $[p + r, q + r]$ $[p, q, r]$

$[p, yq + ar]$ $[p + r, yq + ar]$ $[p, yq, r]$

$[xp + ar, yq + br]$ $[xp, yq, r]$.

VI) x und y eingliedrig:

$[p]$ $[p + r]$ $[p, r]$

$[p + q]$ $[p + q + r]$ $[p + q, r]$

$[p + yq + ar]$ $[p + yq, r]$

$[xp + ar]$ $[xp, r]$

$[xp + cyq + ar \quad (c \neq 0)]$ $[xp + cyq, r \quad (c \neq 0)]$.

VII) x und y nullgliedrig:

$[r]$.

Invariante Untergruppen von (15) giebt es augenscheinlich nur sechs, nämlich:

$$p, xp, x^2p, q, yq, y^2q;\ p, xp, x^2p, r;\ q, yq, y^2q, r;$$
$$p, xp, x^2p;\ q, yq, y^2q;\ r$$

von diesen sind zwei in der vorstehenden Tabelle nicht mit aufgeführt, da x und y als gleichberechtigt angesehen werden.

Kapitel 11.

Die Gruppe der Euklidischen Bewegungen und der Aehnlichkeitstransformationen.

Wir behandeln hier die in der Ueberschrift genannte Gruppe ähnlich wie im vorigen Kapitel die Gruppe einer nichtausgearteten Fläche zweiten Grades.

§ 52.

Die siebengliedrige Gruppe der Euklidischen Bewegungen und der Aehnlichkeitstransformationen ist die Gruppe aller projectiven Trans-

formationen, die einen gewissen Kegelschnitt der unendlich fernen Ebene: $t = 0$ invariant lassen. Wählen wir das Coordinatensystem so, dass dieser Kegelschnitt durch die Gleichungen: $t = 0$, $xy - z^2 = 0$ dargestellt wird, so erhält unsre Gruppe die Form:

$$(1) \qquad \begin{cases} p,\ q,\ r,\ xp + yq + zr \\ 2zp + yr,\ xp - yq,\ 2zq + xr, \end{cases}$$

wofür wir kürzer:

$$p,\ q,\ r,\ U,\ S_1,\ S_2,\ S_3$$

schreiben wollen.

Verstehen wir unter: $X_1 f \ldots X_m f$ eine gewisse m-gliedrige Untergruppe der Gruppe: S_1, S_2, S_3, U, so hat jede Untergruppe γ von (1) die Form:

$$X_k f + \alpha_k p + \beta_k q + \gamma_k r \quad (k = 1 \ldots m),$$

wozu noch gewisse „freie" Translationen: $\lambda p + \mu q + \nu r$ hinzutreten können. Da die Gruppe p, q, r aller Translationen allen Transformationen der G_4: S_1, S_2, S_3, U gegenüber invariant bleibt, so können wir hier die Gruppe $X_1 f \ldots X_m f$ von vornherein durch eine geeignete Transformation der G_4 auf eine Normalform bringen.

Die möglichen Normalformen der Gruppe: $X_1 f \ldots X_m f$ können wir aus Kapitel 2 entnehmen, weil die Gruppe: S_1, S_2, S_3, U mit der dort behandelten Gruppe:

$$xq,\ \tfrac{1}{2}(yq - xp),\ yp,\ xp + yq$$

gleichzusammengesetzt ist. Es fragt sich daher nur noch, was für freie Translationen: $\lambda p + \mu q + \nu r$ in der Untergruppe γ auftreten können.

Jede infinitesimale Translation ist durch einen gewissen Punkt der unendlich fernen Ebene vollständig bestimmt und jede zweigliedrige Gruppe von Translationen durch eine gewisse Gerade dieser Ebene (s. Abschn. I, S. 559). Da nun die in γ vorhandenen freien Translationen eine invariante Untergruppe von γ erzeugen, so muss die Figur der unendlich fernen Ebene, durch welche diese Gruppe von Translationen bestimmt ist, bei γ und zugleich auch bei der Gruppe: $X_1 f \ldots X_m f$ invariant bleiben. Demnach können zwar in γ die Translationen alle frei auftreten oder es können freie Translationen ganz fehlen; es kann aber auch eine einzelne oder es können zwei unabhängige infinitesimale Translationen frei auftreten, jenachdem die Gruppe: $X_1 f \ldots X_m f$ einen Punkt oder eine Gerade der unendlich fernen Ebene invariant lässt. Zwei Punkte und ebenso zwei Gerade der unendlich fernen Ebene sind jedoch dann als gleichberechtigt anzusehen, wenn

sie durch eine solche Transformation der G_4 unter einander vertauscht werden können, bei der die Gruppe $X_1 f \ldots X_m f$ invariant bleibt.

Wir stellen zunächst die verschiedenen Typen von Gruppen: $X_1 f \ldots X_m f$ zusammen (s. S. 26) und fügen jedesmal die Translationen hinzu, die in den entsprechenden Gruppen γ frei auftreten können.

1) Die Punkte des Kegelschnitts werden dreigliedrig transformirt. Gruppe $X_1 f \ldots X_m f$: S_1, S_2, S_3; S_1, S_2, S_3, U; freie Translationen: keine oder alle.

2) Die Punkte des Kegelschnitts zweigliedrig. Gruppe $X_1 f \ldots X_m f$: S_1, $S_2 + cU$; S_1, S_2, U; freie Translationen: keine: p; p, r; alle.

3) Die Punkte des Kegelschnitts eingliedrig:

A) Gruppe $X_1 f \ldots X_m f$: S_1; $S_1 + U$; S_1, U; freie Translationen: keine; p; p, r; alle.

B) Gruppe $X_1 f \ldots X_m f$: $S_2 + cU$; S_2, U; freie Translationen: keine; p; r; p, r; p, q; alle.

4) Die Punkte des Kegelschnitts nullgliedrig. Gruppe $X_1 f \ldots X_m f$: entweder blos die identische Transformation oder U; freie Translationen: p; r; p, r; p, q; alle.

Wir wollen blos die beiden Fälle 1) und 2) vollständig behandeln und dann gleich eine Tabelle aller Untergruppen der Gruppe (1) aufstellen.

Treten *im ersten Falle* die Translationen sämmtlich frei auf, so erhalten wir ausser der Gruppe (1) selbst noch die sechsgliedrige Untergruppe:

$$(2) \qquad p,\ q,\ r,\ 2zp + yr,\ xp - yq,\ 2zq + xr,\ xp + yq + zr.$$

Treten keine Translationen frei auf, so haben wir eine Gruppe von der Form:

$$S_i + \alpha_i p + \beta_i q + \gamma_i r \quad (i = 1, 2, 3),$$

wozu noch:

$$U + \alpha_4 p + \beta_4 q + \gamma_4 r$$

kommen kann. Ist die Transformation $U + \cdots$ vorhanden, so erhalten wir durch Einführung von $x + \alpha_4$, $y + \beta_4$, $z + \gamma_4$ als neuen x, y, z sofort U selbst und erkennen sodann durch Combination, dass alle übrigen α, β, γ verschwinden, wir finden also die Gruppe:

$$(3) \qquad 2zp + yr,\ xp - yq,\ 2zq + xr,\ xp + yq + zr.$$

Tritt $U + \cdots$ nicht auf, so bringen wir durch Einführung neuer x, y, z die Grössen α_2, β_2, α_1 zum Verschwinden, durch Combination von $S_1 + \cdots$, $S_2 + \cdots$ ergiebt sich sodann $\beta_1 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$ und durch Combination von S_1 und S_2 mit $S_3 + \cdots$ auch noch: $\beta_3 = \alpha_3 = \gamma_3 = 0$. Wir bekommen somit die Gruppe:

$$(4) \qquad 2zp + yr,\ xp - yq,\ 2zq + xr.$$

Im zweiten Falle haben wir zwei Transformationen:

$$S_1 + \alpha_1 p + \beta_1 q + \gamma_1 r$$
$$S_2 + cU + \alpha_2 p + \beta_2 q + \gamma_2 r,$$

zu denen noch $U + \cdots$ treten kann, doch brauchen wir auf diesen Fall nicht einzugehen.

a) *Keine freien Translationen.* Neues y und neues z ergeben: $\alpha_1 = \gamma_1 = 0$. Durch Combination erhalten wir ferner die Transformation:

$$S_1 + \beta_1 (c-1) q - 2\gamma_2 p - \beta_2 r,$$

also ist $\beta_2 = \gamma_2 = 0$ und auch β_1 verschwindet, wenn nicht c den Werth 2 hat. Endlich kann α_2 durch Einführung eines neuen x gleich Null gemacht werden, ausgenommen wenn $c = -1$ ist. Hat c den Werth 2 und ist $\beta_1 \neq 0$, so können wir die betreffende Gruppe:

$$S_1 + \beta_1 q,\ S_2 + 2U$$

durch die Substitution:

$$x_1 = \beta_1^{\,2} \cdot x,\quad y_1 = y,\quad z_1 = \beta_1 z$$

auf eine einfachere Form bringen. Ist andrerseits $c = -1$ und $\alpha_2 \neq 0$, so wenden wir die Transformation:

$$x_1 = -\frac{1}{\alpha_2} x,\quad y_1 = -\alpha_2 y,\quad z_1 = z$$

an. Beide Transformationen gehören der Gruppe S_1, S_2, S_3, U an und lassen jede einzelne der ∞^1 Gruppen: S_1, $S_2 + cU$ invariant.

Damit haben wir die Gruppen:

$$(5) \qquad \begin{cases} 2zp + yr,\ (c+1)xp + (c-1)yq + czr \\ 2zp + yr + q,\ 3xp + yq + 2zr \\ 2zp + yr,\ \quad 2yq + zr + p, \end{cases}$$

zu denen noch, wenn eine Transformation: $U + \cdots$ auftritt, diese kommt:

$$2zp + yr,\ xp - yq,\ xp + yq + zr.$$

b) *Die Translation p tritt frei auf.* Ein neues y ergiebt $\gamma_1 = 0$, durch Combination findet man, dass β_2 null ist und dass β_1 verschwindet, wenn $c \neq 2$. Endlich kann γ_2 durch Einführung eines neuen z zum Verschwinden gebracht werden, so lange $c \neq 0$. Auf diese Weise ergeben sich die Gruppen:

$$(6) \qquad \begin{cases} 2zp + yr,\ (c+1)xp + (c-1)yq + czr,\ p \\ 2zp + yr + q,\ 3xp + yq + 2zr,\ p \\ 2zp + yr,\ \quad xp - yq + r,\ p, \end{cases}$$

zu denen noch:

(7) $$2zp + yr,\ xp - yq,\ xp + yq + zr,\ p$$

kommt.

c) *Die Translationen p, r treten frei auf.* Es ergiebt sich $\beta_1 = 0$, solange $c \neq 2$, β_2 kann null gemacht werden, solange $c \neq 1$, also:

(8) $$\begin{cases} 2zp + yr,\ (c+1)xp + (c-1)yq + czr,\ p,\ r \\ 2zp + yr + q,\ 3xp + yq + 2zr,\ p,\ r \\ 2zp + yr,\ 2xp + zr + q,\ p,\ r \end{cases}$$

und ausserdem:

(9) $$2zp + yr,\ xp - yq,\ xp + yq + zr,\ p,\ r.$$

d) *Alle Translationen frei:*

(10) $$\begin{cases} 2zp + yr,\ (c+1)xp + (c-1)yq + czr,\ p,\ q,\ r \\ 2zp + yr,\ xp - yq,\ xp + yq + zr,\ p,\ q,\ r. \end{cases}$$

So fährt man fort und erhält schliesslich die folgende Tabelle:

Die Untergruppen der siebengliedrigen Gruppe:

(1) $$\boxed{p,\ q,\ r,\ 2zp + yr,\ xp - yq,\ 2zq + xr,\ xp + yq + zr}$$

die den unendlich fernen Kegelschnitt: $t = 0$, $xy - z^2 = 0$ invariant lässt.

I) Die Punkte des Kegelschnitts werden dreigliedrig transformirt:

$$\boxed{2zp + yr,\ xp - yq,\ 2zq + xr,\ p,\ q,\ r}$$

$$\boxed{2zp + yr,\ xp - yq,\ 2zq + xr}$$

$$\boxed{2zp + yr,\ xp - yq,\ 2zq + xr,\ xp + yq + zr}.$$

II) Die Punkte des Kegelschnitts zweigliedrig:

$$\boxed{2zp + yr,\ (c+1)xp + (c-1)yq + czr,\ p,\ q,\ r}$$

$$\boxed{2zp + yr,\ xp - yq,\ xp + yq + zr,\ p,\ q,\ r}$$

$$\boxed{2zp + yr,\ (c+1)xp + (c-1)yq + czr,\ p,\ r}$$

$$\boxed{2zp + yr + q,\ 3xp + yq + 2zr,\ p,\ r}$$

$2zp + yr,\ 2xp + zr + q,\ p,\ r$

$2zp + yr,\ xp - yq,\ xp + yq + zr,\ p,\ r$

$2zp + yr,\ (c+1)xp + (c-1)yq + czr,\ p$

$2zp + yr + q,\ 3xp + yq + 2zr,\ p$

$2zp + yr,\ xp - yq + r,\ p$

$2zp + yr,\ xp - yq,\ xp + yq + zr,\ p$

$2zp + yr,\ (c+1)xp + (c-1)yq + czr$

$2zp + yr + q,\ 3xp + yq + 2zr$

$2zp + yr,\ 2yq + zr + p$ $\qquad$ $2zp + yr,\ xp - yq,\ xp + yq + zr$.

III) Die Punkte des Kegelschnitts eingliedrig:

A) Ein doppeltzählender Punkt des Kegelschnitts fest:

$2zp + yr,\ p,\ q,\ r$ $\qquad$ $2zp + yr + xp + yq + zr,\ p,\ q,\ r$

$2zp + yr,\ xp + yq + zr,\ p,\ q,\ r$

$2zp + yr,\ p,\ r$ $\qquad$ $2zp + yr + q,\ p,\ r$

$2zp + yr + xp + yq + zr,\ p,\ r$ $\qquad$ $2zp + yr,\ xp + yq + zr,\ p,\ r$

$2zp + yr,\ p$ $\qquad$ $2zp + yr + q,\ p$

$2zp + yr + xp + yq + zr,\ p$ $\qquad$ $2zp + yr,\ xp + yq + zr,\ p$

$2zp + yr$ $\qquad$ $2zp + yr + q$

$2zp + yr + xp + yq + zr$ $\qquad$ $2zp + yr,\ xp + yq + zr$.

B) Zwei getrennte Punkte des Kegelschnitts fest:

$(c+1)xp+(c-1)yq+czr,\ p,\ q,\ r$ | $xp-yq,\ xp+yq+zr,\ p,\ q,\ r$

$(c+1)xp+(c-1)yq+czr,\ p,\ q$ | $xp-yq+r,\ p,\ q$

$xp-yq,\ xp+yq+zr,\ p,\ q$

$(c+1)xp+(c-1)yq+czr,\ p,\ r$ | $2xp+zr+q,\ p,\ r$

$xp-yq,\ xp+yq+zr,\ p,\ r$

$(c+1)xp+(c-1)yq+czr,\ p$ | $xp-yq+r,\ p$

$2xp+zr+q,\ p$ | $xp-yq,\ xp+yq+zr,\ p$

$(c+1)xp+(c-1)yq+czr,\ r$ | $2xp+zr+q,\ r$

$xp-yq,\ xp+yq+zr,\ r$

$(c+1)xp+(c-1)yq+czr$ | $xp-yq+r$

$2xp+zr+q$ | $xp-yq,\ xp+yq+zr$.

IV) Die Punkte des Kegelschnitts nullgliedrig:

$p,\ q,\ r$ | $p,\ q$ | $p,\ r$ | p | r

$xp+yq+zr,\ p,\ q,\ r$ | $xp+yq+zr,\ p,\ q$ | $xp+yq+zr,\ p,\ r$

$xp+yq+zr,\ p$ | $xp+yq+zr,\ r$ | $xp+yq+zr$.

Zu bemerken ist, dass in den Gruppen: III, B, 1, 3, 13, 16 die Parameterwerthe c und $-c$ gleichberechtigt sind, da in der Gruppe: S_1, S_2, S_3, U die Transformation:

$$x_1 = y,\ y_1 = x,\ z_1 = z$$

enthalten ist. Ferner sei erwähnt, dass die Gruppen I, 1; IV, 1, 6 die einzigen invarianten Untergruppen der Gruppe (1) sind. Da es

überdies zuweilen wünschenswerth ist, alle Untergruppen von gleicher Parameterzahl beisammen zu haben, so geben wir noch eine Tabelle, in der die Untergruppen nach ihrer Gliederzahl geordnet sind:

2	*Sechsgliedrige:*	I, 1; II, 2.
4	*Fünfgliedrige:*	II, 1, 6; III, A, 3, B, 2.
12	*Viergliedrige:*	I, 3; II, 3, 4, 5, 10; III, A, 1, 2, 7, B, 1, 5, 8; IV, 6.
18	*Dreigliedrige:*	I, 2; II, 7, 8, 9, 14; III, A, 4, 5, 6, 11, B, 3, 4, 6, 7, 12, 15; IV, 1, 7, 8.
17	*Zweigliedrige:*	II, 11, 12, 13; III, A, 8, 9, 10, 15, B, 9, 10, 11, 13, 14, 19; IV, 2, 3, 9, 10.
9	*Eingliedrige:*	III, A, 12, 13, 14, B, 16, 17, 18; IV, 4, 5, 11.

Die in der vorstehenden Tabelle zusammengestellten Gruppen repräsentiren lauter verschiedene Typen von Untergruppen der Gruppe (1), es kann aber unter ihnen solche geben, die innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe des Raumes mit einander gleichberechtigt sind. Möglich ist das natürlich nur bei solchen Gruppen, die ausser dem Kegelschnitt: $t = 0$, $xy - z^2 = 0$ noch einen andern Kegelschnitt invariant lassen.

Da eine Translation niemals einen im Endlichen liegenden Kegelschnitt invariant lässt, erkennt man leicht, dass es unter allen den aufgeführten Gruppen nur wenige giebt, bei denen ein nicht in der unendlich fernen Ebene liegender Kegelschnitt invariant bleibt, es sind das nur die Gruppen: II, 11 für $c = 1$, ferner III, A, 12 und endlich III, B, 16 für $c = 0, \frac{1}{2}, 1, 2, 3$; die Werthe $c = -1, -\frac{1}{2}, -2, -3$ brauchen wir hier nicht besonders anzuführen, da sie schon innerhalb der Gruppe (1) dieselben Typen liefern, wie bezüglich: $c = +1, +\frac{1}{2}, +2, +3$ (s. oben S. 216). Aber auch von diesen Gruppen sind nur die zu $c = \frac{1}{2}$ und zu $c = 3$ gehörigen innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe mit einander gleichberechtigt.

Andrerseits lassen die Gruppen III, A sämmtlich die ∞^1 Kegelschnitte:

$$t = 0, \quad xy - z^2 + ay^2 = 0$$

invariant, die Gruppen III, B ebenso die ∞^1 Kegelschnitte:

$$t = 0, \quad xy - az^2 = 0,$$

die Gruppen IV endlich alle unendlich fernen Kegelschnitte überhaupt. Trotzdem giebt es unter den Gruppen III, A und III, B keine, die innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe mit einer der übrigen gleichberechtigt ist, während allerdings die Gruppen IV, 2, 4, 7, 9

bezüglich mit den Gruppen IV, 3, 5, 8, 10 durch projective Transformationen ähnlich sind.

Wenn man also die Gruppen IV, 3, 5, 8, 10 weglässt, erhält man im Wesentlichen lauter Gruppen, die auch innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe verschiedene Typen von Untergruppen repräsentiren.

§ 53.

Bei den bisherigen Untersuchungen über die Gruppe, der dieses Kapitel gewidmet ist, wählten wir das Coordinatensystem so, dass der zur Gruppe gehörige invariante Kegelschnitt reell wurde. Wir erhielten auf diese Weise die Gruppe (1) und hatten den Vortheil, dass die Untergruppen dieser Gruppe in sehr einfachen Formen erschienen. Von jetzt an wollen wir die gewöhnliche Darstellungsweise unsrer Gruppe zu Grunde legen, wir wollen also den invarianten Kegelschnitt mit dem unendlich fernen imaginären Kugelkreis:

$$t = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

zusammenfallen lassen, so dass die Gruppe der Euklidischen Bewegungen und der Aehnlichkeitstransformationen die Gestalt:

(11) $$p,\ q,\ r,\ xq - yp,\ yr - zq,\ zp - xr,\ xp + yq + zr$$

erhält. Die sechsgliedrige invariante Untergruppe von (11):

(12) $$p,\ q,\ r,\ xq - yp,\ yr - zq,\ zp - xr$$

ist dann nichts andres als die Gruppe aller Euklidischen Bewegungen.

Wir stellen uns zunächst die Aufgabe, alle Flächen zu bestimmen, die bei der Gruppe (11) aller Euklidischen Bewegungen und Aehnlichkeitstransformationen gerade ∞^4 verschiedene Lagen annehmen.

Da die Gruppe (11) siebengliedrig ist, so gestattet jede Fläche von der verlangten Beschaffenheit gerade drei unabhängige infinitesimale Transformationen von (11) (s. Abschn. I, S. 482, Satz 10); diese infinitesimalen Transformationen erzeugen eine dreigliedrige Untergruppe von (11), sie sind überdies projectiv, also ist die Fläche nach S. 196, Satz 6 entweder eine Ebene oder die Abwickelbare einer gewundenen Curve dritter Ordnung oder eine Cayleysche Linienfläche oder eine Fläche zweiten Grades oder endlich ein Kegel.

Ebenen giebt es überhaupt blos ∞^3 verschiedene, also sind die von vornherein ausgeschlossen. Die Abwickelbare einer gewundenen Curve dritter Ordnung und die Cayleysche Linienfläche gestatten allerdings beide je drei unabhängige infinitesimale projective Transformationen, aber keine der beiden dreigliedrigen Gruppen, die von diesen Transformationen erzeugt werden, lässt einen Kegelschnitt in-

variant (s. S. 186 ff. und S. 195 f.), also kommen auch diese Flächen nicht in Betracht.

Lässt eine dreigliedrige projective Gruppe $\mathfrak{g}_3$ ausser dem Kugelkreis noch eine nicht ausgeartete Fläche zweiten Grades invariant, so muss sie die Punkte der unendlich fernen Ebene dreigliedrig transformiren, denn die grösste continuirliche Untergruppe von $\mathfrak{g}_3$, bei der alle unendlich fernen Punkte in Ruhe bleiben, lässt zugleich alle Punkte der Fläche und also überhaupt alle Punkte des Raumes invariant und fällt demnach mit der identischen Transformation zusammen. Hieraus folgt, dass unsre dreigliedrige Gruppe auf der unendlich fernen Ebene keine andre Punktfigur in Ruhe lässt, als den Kugelkreis; die Fläche zweiten Grades muss somit die unendlich ferne Ebene gerade im Kugelkreis schneiden, sie muss eine *Kugel* sein. Wirklich gestattet auch jede Kugel gerade ∞^3 Transformationen der Gruppe (11), nämlich die ∞^3 Rotationen um ihren Mittelpunkt.

Zu bestimmen sind jetzt nur noch die Kegel, die gerade drei unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe (11) gestatten.

Liegt die Spitze eines solchen Kegels im Endlichen, so nimmt sie bei der Gruppe (11) gerade ∞^3 verschiedene Lagen an; da nun der Kegel im Ganzen ∞^4 Lagen erhalten soll, so muss seine Schnittcurve auf der unendlich fernen Ebene gerade ∞^1 verschiedene Lagen bekommen und demnach von den ∞^3 Collineationen der unendlich fernen Ebene, die den Kugelkreis invariant lassen, genau ∞^2 gestatten. Die einzigen Curven von dieser Beschaffenheit sind aber die Tangenten des Kugelkreises, denn bei jeder zweigliedrigen projectiven Gruppe der Ebene, die einen Kegelschnitt invariant lässt, bleibt ausser dem Kegelschnitt nur noch eine Tangente des Kegelschnitts und sonst keine Curve der Ebene invariant. Demnach ist unser Kegel kein wirklicher, sondern ein ausgearteter Kegel.

Nehmen wir daher an, dass die Spitze unsers Kegels auf der unendlich fernen Ebene liegt und zwar zunächst ausserhalb des Kugelkreises in dem Punkte P. Dieser Punkt nimmt bei der Gruppe (11) ∞^2 verschiedene Lagen an, halten wir daher P fest, so muss der Kegel selbst noch ∞^2 verschiedene Lagen annehmen können. Nun enthält die Gruppe (11) im Ganzen ∞^5 Transformationen, die P invariant lassen, unter diesen giebt es aber wieder ∞^1, die überhaupt alle Geraden durch P stehen lassen, nämlich die ∞^1 Translationen, die nach P gerichtet sind. Bei festgehaltnem P werden demnach die ∞^2 Geraden durch P blos durch eine viergliedrige Gruppe g_4 transformirt, die ausser der Ebene des Kugelkreises auch noch die beiden Tangenten von P an den Kugelkreis in Ruhe lässt. Es fragt sich

daher: giebt es einen Kegel mit P als Spitze, der bei der Gruppe g_4 gerade ∞^2 verschiedene Lagen annimmt oder, was auf dasselbe hinauskommt, gerade ∞^2 Transformationen von g_4 gestattet? Um diese Frage zu beantworten, kleiden wir sie anders ein. Die ∞^2 Geraden durch P bilden nämlich ein ebenes Bündel, das bei g_4 projectiv transformirt wird; ersetzen wir die Geraden dieses Bündels durch die Punkte einer Ebene, so geht die unendlich ferne Ebene in eine Gerade über und die beiden Tangenten von P aus an den Kugelkreis verwandeln sich in zwei Punkte dieser Geraden. Unsre Frage ist demnach gleichbedeutend mit der folgenden: welche Curve der Ebene gestattet ∞^2 projective Transformationen, bei denen eine Gerade mit zwei darauf liegenden Punkten invariant bleibt? Die einzige Curve von dieser Beschaffenheit ist offenbar die Gerade, also besteht jeder Kegel von der oben verlangten Beschaffenheit blos aus einer Ebene durch P, das heisst, er ist wieder kein wirklicher Kegel.

Endlich möge die Spitze S unsers Kegels auf dem Kugelkreise selbst gelegen sein.

Hält man die Spitze S fest, so muss der Kegel selbst noch ∞^3 verschiedene Lagen annehmen. In der Gruppe (11) giebt es aber ∞^6 verschiedene Transformationen, die S in Ruhe lassen, und unter diesen sind wieder genau ∞^1, die alle Geraden durch S stehen lassen, also werden bei festgehaltenem S die ∞^2 Geraden durch S durch eine fünfgliedrige Gruppe g_5 transformirt, die ausser S selbst noch die unendlich ferne Ebene und die Tangente des Kugelkreises im Punkte S invariant lässt. Giebt es nun in dem Geradenbündel durch S einen wirklichen Kegel, der bei g_5 gerade ∞^3 verschiedene Lagen annimmt und also ∞^2 Transformationen der g_5 zulässt? Wir kleiden diese Frage wieder anders ein, indem wir das Geradenbündel, dessen Träger S ist, durch die Punkte einer Ebene ersetzen. Die Frage lautet dann so: giebt es eine krumme Curve der Ebene, die ∞^2 Collineationen gestattet, bei denen ausserdem noch eine Gerade und ein darauf liegender Punkt ihre Lage behalten? Die einzige krumme Curve von dieser Beschaffenheit ist offenbar ein Kegelschnitt, der die betreffende Gerade in dem betreffenden Punkte berührt. Also ist der einzige Kegel von der verlangten Beschaffenheit ein nicht ausgearteter Kegel zweiten Grades, dessen Spitze auf dem Kugelkreise liegt, während er die unendlich ferne Ebene längs der zu seiner Spitze gehörigen Tangente des Kugelkreises berührt.

Damit ist der folgende Satz gewonnen:

Satz 1. *Die einzigen Flächen, die bei der siebengliedrigen Gruppe:*

(11) $\quad p,\ q,\ r,\ xq - yp,\ yr - zq,\ zp - xr,\ xp + yq + zr$

der Euklidischen Bewegungen und der Aehnlichkeitstransformationen gerade ∞^4 verschiedene Lagen annehmen, sind erstens die Kugeln und zweitens alle die nicht ausgearteten Kegel zweiten Grades, die einen Punkt des Kugelkreises zur Spitze haben und die ausserdem die unendlich ferne Ebene längs der zu dem betreffenden Punkt gehörigen Kugelkreistangente berühren.

Die Kugeln sind also die einzigen *reellen* Flächen, die bei der Gruppe (11) gerade ∞^4 verschiedene Lagen annehmen.

Nunmehr suchen wir ebenso alle Curven, die bei der Gruppe (11) gerade ∞^4 verschiedene Lagen annehmen.

Jede solche Curve ist nach § 46 entweder eben oder eine gewundene Curve dritter Ordnung, denn sie gestattet gerade ∞^3 verschiedene Transformationen der Gruppe (11). Diese ∞^3 Transformationen bilden eine Gruppe γ_3, die auf der unendlich fernen Ebene ausser dem Kugelkreis sicher noch eine andre Punktfigur invariant lässt, die also die Punkte der unendlich fernen Ebene sicher nicht dreigliedrig transformirt. Hieraus folgt, dass γ_3 mindestens eine infinitesimale Transformation enthält, bei der alle Punkte der unendlich fernen Ebene in Ruhe bleiben. Nun aber haben alle infinitesimalen Transformationen dieser Art, die in der Gruppe (11) enthalten sind, die Form:

$$a_1 p + a_2 q + a_3 r + a_4 (xp + yq + zr)$$

und ihre Bahncurven sind, wie man sich leicht überzeugt, sämmtlich gerade Linien, also können die in Rede stehenden Curven, wenn sie im Endlichen liegen, nur gerade Linien sein, im Unendlichen können sie aber nicht liegen, da jede Curve der unendlich fernen Ebene bei der Gruppe (11) blos ∞^3 verschiedene Lagen annimmt. In der That gestattet jede Gerade von allgemeiner Lage ∞^3 Transformationen der Gruppe (11), schneidet sie den Kugelkreis, so gestattet sie deren sogar ∞^4. Also:

Satz 2. *Die geraden Linien sind die einzigen Curven des Raumes, die bei der siebengliedrigen Gruppe der Euklidischen Bewegungen und der Aehnlichkeitstransformationen genau ∞^4 verschiedene Lagen annehmen.*

Verbindet man diesen Satz mit dem Satze 1, so erkennt man, dass die Plückersche Liniengeometrie und die neuere Kugelgeometrie unter allen möglichen Versinnlichungen eines vierfach ausgedehnten Raumes eine ausgezeichnete Stellung einnehmen. Allerdings liesse sich auch auf die ∞^4 Kegel, die in dem Satze 1 vorkommen, eine Geometrie gründen, aber diese wäre imaginär und kann daher nicht in Betracht kommen.

Jetzt wollen wir alle Curven bestimmen, die bei der sechsgliedrigen Gruppe:

(12) $$p,\ q,\ r,\ xq - yp,\ yr - zq,\ zp - xr$$

der Euklidischen Bewegungen gerade ∞^4 verschiedene Lagen annehmen.

Jede Curve dieser Art gestattet ∞^2 Transformationen der Gruppe (12), ist sie daher keine Gerade, so muss sie entweder eine gewundene Curve dritter Ordnung oder eine ebene krumme Curve sein.

Eine gewundene Curve dritter Ordnung kann sicher nicht mehr als ∞^2 Bewegungen gestatten. Andrerseits haben wir gesehen, dass es nur eine Art von zweigliedrigen projectiven Gruppen giebt, die eine Curve dritter Ordnung invariant lassen. Jede solche Gruppe (s. S. 189) hielt einen Punkt der Curve fest und ausserdem in der zu diesem Punkt gehörigen Schmiegungsebene einen nicht ausgearteten Kegelschnitt, der auf der abwickelbaren Fläche der Curve lag. Verlegen wir daher den betreffenden Kegelschnitt in den Kugelkreis, so erhalten wir die allgemeinste gewundene Curve dritter Ordnung, die ∞^2 Bewegungen gestattet, sie ist dadurch gekennzeichnet, dass ihre Abwickelbare den Kugelkreis enthält. Jede solche Curve nimmt offenbar bei der Gruppe (12) ∞^4 verschiedene Lagen an, auch überzeugt man sich leicht, dass es im Ganzen nur ∞^4 derartige Curven giebt.

Soll eine ebene krumme Curve bei der Gruppe der Bewegungen ∞^4 verschiedene Lagen annehmen, so darf sie nicht in der unendlich fernen Ebene liegen, denn dann würde sie ja bei allen Translationen invariant bleiben und blos ∞^3 verschiedene Lagen annehmen. Die zweigliedrige Gruppe g_2 von Bewegungen, bei der unsre Curve invariant bleibt, lässt daher ausser der unendlich fernen Ebene noch eine andere Ebene E invariant, in der die invariante Curve liegt. Ferner ist sicher, dass g_2 sowohl die Punkte der unendlich fernen Ebene als die von E zweigliedrig transformirt, denn die grösste continuirliche Untergruppe von g_2, die alle Punkte einer dieser beiden Ebenen in Ruhe lässt, hält in der andern Ebene alle Tangenten an die darin liegende Curve fest und somit alle Punkte auch dieser Ebene und überhaupt alle Punkte des Raumes, sie fällt demnach mit der identischen Transformation zusammen. Da bei g_2 auch die Punkte von E zweigliedrig transformirt werden, so ist die in E liegende invariante Curve ein nicht ausgearteter Kegelschnitt. Auf diesem Kegelschnitt kann ebenso wie auf dem Kugelkreis nur ein Punkt invariant bleiben, folglich muss der Kegelschnitt den Kugelkreis berühren. Hieraus ergiebt sich endlich, dass die gemeinsame Abwickelbare beider Kegelschnitte, die natürlich auch bei der g_2 invariant bleibt, ein Kegel zweiten Grades ist, dessen Spitze im Endlichen liegt. Damit stossen

wir aber auf einen Widerspruch, denn unsre g_2 müsste offenbar aus ∞^2 Rotationen um die Kegelspitze bestehen, sie liesse daher auch die ∞^1 Kugeln um die Kegelspitze invariant und diese Kugeln würden die Ebene E in ∞^1 invarianten Kegelschnitten schneiden; die Punkte von E würden also im Widerspruch mit dem oben Gezeigten bei g_2 blos eingliedrig transformirt.

Demnach giebt es keine ebene krumme Curve, die bei der Gruppe aller Bewegungen ∞^4 verschiedene Lagen annimmt, und wir haben den

Satz 3. *Die ∞^4 Geraden und die ∞^4 gewundenen Curven dritter Ordnung, deren abwickelbare Flächen den Kugelkreis enthalten, sind die einzigen Curven des Raumes, die bei der Gruppe aller Euklidischen Bewegungen genau ∞^4 verschiedene Lagen annehmen.*

Durch das Vorstehende sind wir in den Stand gesetzt, überhaupt alle Schaaren von ∞^4 Curven anzugeben, die bei der Gruppe aller Euklidischen Bewegungen invariant bleiben. Jede Curve einer solchen Schaar gestattet nämlich mindestens ∞^2 Bewegungen, die Schaar besteht daher entweder aus den ∞^4 Geraden, oder aus den ∞^4 in Satz 3 bezeichneten Curven dritter Ordnung oder endlich sie besteht aus ∞^4 ebenen Curven, die alle in der unendlich fernen Ebene liegen. Es wäre leicht, auch diese letzten Curvenschaaren genauer zu bestimmen, doch wollen wir uns dabei nicht aufhalten und nur noch eine Bemerkung hinzufügen.

Die Schaar der ∞^4 Geraden wird nämlich in den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z durch die zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = 0$$

definirt. Die Schaar der ∞^4 Curven dritter Ordnung dagegen, von denen in Satz 3 die Rede ist, genügt einer Differentialgleichung erster Ordnung, denn alle Tangenten dieser Curven treffen den Kugelkreis; die betreffende Differentialgleichung lautet:

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = 0.$$

Endlich genügt jede andre Schaar von ∞^4 Curven, die bei der Gruppe der Bewegungen invariant bleibt, der endlichen Gleichung:

$$t = 0,$$

da sie aus lauter Curven der unendlich fernen Ebene: $t = 0$ besteht. Hieraus ergiebt sich der

Satz 4. *Bleibt ein System von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung von der Form:*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \alpha\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right)$$
$$\frac{d^2z}{dx^2} = \beta\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right)$$

bei der Gruppe aller Euklidischen Bewegungen invariant, so hat es die Form:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = 0$$

und seine Integralcurven sind die ∞^4 Geraden des Raumes.

Kapitel 12.

Die primitiven projectiven Gruppen des gewöhnlichen Raumes.

Um die in der Ueberschrift genannten Gruppen zu bestimmen, gehen wir davon aus, dass wir in Kap. 7 bereits alle Typen von primitiven Gruppen des Raumes aufgestellt haben. Durch Benutzung der in Kapitel 9—11 gewonnenen Ergebnisse werden wir ohne Schwierigkeit dazu gelangen, auch alle Typen von primitiven projectiven Gruppen des Raumes zu ermitteln. In einem zweiten Paragraphen werden wir dann noch zwei besondere Kategorien von primitiven projectiven Gruppen des Raumes für sich betrachten und eine neue, direktere Methode zur Bestimmung der betreffenden Gruppen entwickeln.

§ 54.

Jede primitive projective Gruppe des Raumes ist nothwendig mit einer der acht primitiven Gruppen ähnlich, die in dem Theoreme 9 auf S. 139 zusammengestellt sind. Wollen wir daher alle primitiven projectiven Gruppen finden, so müssen wir diese acht Gruppen der Reihe nach durchgehen und für jede einzelne unter ihnen feststellen, ob sie mit einer projectiven Gruppe ähnlich ist. Tritt dieser Fall ein, so müssen wir noch untersuchen, ob die betreffende Gruppe mit mehreren projectiven Gruppen ähnlich sein kann, die innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe des Raumes nicht mit einander gleichberechtigt sind.

Aber, wie entscheidet man denn, ob eine beliebige vorgelegte Gruppe des Raumes mit einer projectiven Gruppe ähnlich ist?

Eine jede projective Gruppe ist als solche daran kenntlich, dass sie die Schaar aller ∞^4 Geraden invariant lässt, oder, was auf dasselbe hinauskommt, das System der beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = 0,$$

wofür wir kürzer: $y'' = 0$, $z'' = 0$ schreiben wollen. Soll daher eine beliebige Gruppe G des Raumes mit einer projectiven Gruppe ähnlich sein, so muss sie erstens mindestens ein System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung von der Form:

$$(1) \qquad y'' = \alpha(x, y, z, y', z'), \quad z'' = \beta(x, y, z, y', z')$$

invariant lassen und es muss zweitens unter den bei G invarianten Systemen von der Form (1) mindestens eines geben, das durch Einführung neuer Veränderlicher x, y, z die Form:

$$(2) \qquad y'' = 0, \quad z'' = 0$$

erhalten kann. Diese Bedingungen sind offenbar nothwendig und hinreichend.

Gehen wir jetzt die acht primitiven Gruppen auf S. 139 f. der Reihe nach durch.

Fünf von diesen Gruppen können wir mit einem Schlage erledigen, nämlich die allgemeine projective, die allgemeine lineare, die specielle lineare, die Gruppe der Euklidischen Bewegungen und der Aehnlichkeitstransformationen und endlich die Gruppe der Euklidischen Bewegungen selbst. Alle diese Gruppen liegen bereits in projectiver Form vor und enthalten die Gruppe der Euklidischen Bewegungen. Da wir von dieser letzteren Gruppe gezeigt haben (s. S. 223 f.), dass sie ausser dem Systeme: $y'' = z'' = 0$ kein andres System Differentialgleichungen von der Form (1) invariant lässt, so ergiebt sich, dass jede Transformation, die eine der genannten Gruppen wieder in eine projective Gruppe überführt, selbst projectiv sein muss, dass also jede projective Gruppe, die mit einer der genannten Gruppen ähnlich ist, innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe selbst mit ihr gleichberechtigt ist.

Auch die zehngliedrige conforme Gruppe macht keine Schwierigkeiten; sie umfasst nämlich ebenfalls die Gruppe der Euklidischen Bewegungen und da sie überdies gewisse nicht projective infinitesimale Transformationen enthält, so lässt sie nicht einmal das System (2) invariant. Es giebt demnach überhaupt kein System von der Form (1), das bei der conformen Gruppe invariant bleibt, das heisst: diese Gruppe ist überhaupt mit keiner projectiven Gruppe ähnlich.

Die sechsgliedrige Gruppe einer nicht ausgearteten Fläche zweiten Grades ist schon projectiv, sie lässt überdies nach S. 207, Satz 2 keine andre Schaar von ∞^4 Curven des Raumes invariant, als die Schaar der ∞^4 Geraden. Hieraus folgt, dass diese Gruppe mit einer

projectiven Gruppe stets nur durch eine projective Transformation ähnlich sein kann.

Nunmehr haben wir nur noch die zehngliedrige projective Gruppe eines linearen Complexes zu untersuchen.

Was für Schaaren von ∞^4 Curven bleiben bei dieser Gruppe, die wir kurz G_{10} nennen wollen, invariant? Jede Curve einer solchen Schaar gestattet mindestens sechs unabhängige infinitesimale projective Transformationen, sie ist daher nach § 46 entweder eine Gerade oder ein nicht ausgearteter Kegelschnitt. Da die Schaar aller Geraden sowieso bei der Gruppe invariant bleibt, handelt es sich also nur darum, ob eine invariante Schaar von ∞^4 Kegelschnitten auftreten kann.

Nehmen wir an, dass es eine solche Schaar giebt. Halten wir dann einen beliebigen Kegelschnitt der Schaar fest, so bleibt gleichzeitig der Pol seiner Ebene in Bezug auf den linearen Complex in Ruhe, da aber der Kegelschnitt mindestens ∞^6 Transformationen unsrer G_{10} zulässt, so muss dieser Pol auf dem Kegelschnitt liegen und es ergiebt sich zugleich, dass der Kegelschnitt blos ∞^6 Transformationen der G_{10} zulässt, die natürlich eine sechsgliedrige projective G_6 bilden. Denken wir uns nun durch alle Punkte des Kegelschnitts die zugehörigen Complexebenen gelegt, die alle durch den Pol der Kegelschnittebene gehen, so erhalten wir ∞^1 Ebenen, die einen nicht ausgearteten Kegel zweiten Grades umhüllen. Auch dieser Kegel muss nothwendig bei der G_6 invariant bleiben. Nun aber gestattet schon die Figur, die aus einem Kegelschnitt und einem Punkte darauf besteht, blos ∞^6 projective Transformationen des Raumes und diese ∞^6 Transformationen lassen keinen Kegel zweiten Grades invariant, also kommen wir auf einen Widerspruch, das heisst: es giebt gar keine Schaar von ∞^4 Kegelschnitten, die bei unsrer G_{10} invariant bleibt.

Demnach lässt die zehngliedrige projective Gruppe eines linearen Complexes nur eine einzige Schaar von ∞^4 Curven invariant, nämlich die der ∞^4 Geraden, es ist also auch das System: $y'' = 0$, $z'' = 0$ das einzige bei der Gruppe invariante System Differentialgleichungen von der Form (1). Damit ist bewiesen, dass auch diese Gruppe mit einer projectiven Gruppe nur durch eine projective Transformation ähnlich sein kann.

Die Bestimmung aller primitiven projectiven Gruppen ist hiermit vollendet und wir können das Theorem aussprechen:

Theorem 11. *Es giebt im dreifach ausgedehnten Raume nur sieben verschiedene Typen von primitiven projectiven Gruppen; Repräsentanten dieser sieben Typen sind die nachstehenden sieben Gruppen:*

1) *die fünfzehngliedrige allgemeine projective Gruppe selbst* (s. S. 124, [1]),

2) *die zwölfgliedrige allgemeine lineare Gruppe* (s. S. 124, [2]),

3) *die elfgliedrige specielle lineare Gruppe* (s. S. 124, [3]),

4) *die siebengliedrige Gruppe der Euklidischen Bewegungen und der Aehnlichkeitstransformationen* (s. S. 132, [6]),

5) *die sechsgliedrige Gruppe der Euklidischen Bewegungen* (s. S. 132, [5]),

6) *die sechsgliedrige projective Gruppe einer nicht ausgearteten Fläche zweiten Grades* (s. S. 134, [7]),

7) *die zehngliedrige projective Gruppe eines nicht ausgearteten linearen Complexes* (s. S. 125, [4]).

Jede primitive projective Gruppe des Raumes ist mit einer dieser sieben Gruppen durch eine projective Gruppe ähnlich und kann überdies durch eine nicht projective Transformation niemals wieder in eine projective Gruppe übergeführt werden.

§ 55.

Wir entwickeln jetzt die in der Einleitung des Kapitels angekündigte zweite Methode zur Bestimmung gewisser primitiver projectiver Gruppen des Raumes.

Ist G eine primitive projective Gruppe des Raumes und ist g die grösste Untergruppe von G, bei der ein Punkt P von allgemeiner Lage invariant bleibt, so kann g die ∞^2 Richtungen durch den Punkt P nur auf drei verschiedene Weisen transformiren, nämlich entweder in allgemeinster Weise, oder so, dass ein ebenes Büschel von ∞^1 Richtungen seine Lage behält, oder endlich so, dass ein nicht ausgearteter Kegel zweiten Grades von Richtungen invariant bleibt (vgl. S. 123 f.). Sehen wir von dem ersten Falle ab, der nur auf die allgemeine projective, die allgemeine lineare und die specielle lineare Gruppe führt, so bleiben nur zwei Möglichkeiten übrig, entweder nämlich lässt G eine Pfaffsche Gleichung:

$$\alpha(x, y, z)\,dx + \beta(x, y, z)\,dy + \gamma(x, y, z)\,dz = 0 \tag{3}$$

invariant, die natürlich nicht integrabel sein darf, oder eine Gleichung zweiten Grades von der Form:

$$\alpha_{11}dx^2 + \alpha_{22}dy^2 + \alpha_{33}dz^2 + 2\alpha_{12}dx\,dy + 2\alpha_{23}dy\,dz + 2\alpha_{31}dz\,dx = 0 \tag{4}$$

mit nicht verschwindender Determinante. Diese beiden Fälle wollen wir jetzt nach einer neuen Methode behandeln und die primitiven projectiven Gruppen bestimmen, die unter sie gehören.

Zunächst sei G eine primitive projective Gruppe, bei der die nicht integrable Pfaffsche Gleichung (3) invariant bleibt.

Wir betrachten x, y, z als Functionen einer Hülfsveränderlichen t, die bei der gesuchten Gruppe G gar nicht transformirt wird, und setzen:

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{d^2x}{dt^2} = x'', \quad \frac{dy}{dt} = y', \ldots,$$

dann ist:

$$\alpha(x, y, z)\, x' + \beta(x, y, z)\, y' + \gamma(x, y, z)\, z' = 0 \tag{5}$$

eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung, die bei G invariant bleibt. Ausserdem lässt G noch als projective Gruppe ein System von zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung invariant, nämlich:

$$x' : y' : z' = x'' : y'' : z'', \tag{6}$$

denn durch dieses wird offenbar die Schaar der ∞^4 Geraden des Raumes definirt.

Differentiiren wir (5) nach t, so muss die erhaltene Gleichung mit (5) zusammen ein bei G invariantes System bilden; auch wenn wir zu diesem System noch die Gleichungen (6) hinzunehmen, müssen wir ein invariantes System erhalten. Demnach stellen die vier Gleichungen (5), (6) und:

$$\begin{cases} \alpha_x x'^2 + \beta_y y'^2 + \gamma_z z'^2 + (\alpha_y + \beta_x)\, x'y' + (\beta_z + \gamma_y)\, y'z' + \\ \qquad + (\gamma_x + \alpha_z)\, z'x' = 0 \end{cases} \tag{7}$$

ein bei G invariantes Gleichungensystem dar. Es ist nun klar, dass die in diesem Systeme enthaltenen Gleichungen erster Ordnung, nämlich (5) und (7), für sich ebenfalls ein bei G invariantes Gleichungensystem bilden müssen, da aber G primitiv sein soll, so kann dieses Gleichungensystem: (5) und (7) nicht aus zwei unabhängigen Gleichungen bestehen, es würde ja sonst eine bei G invariante Zerlegung des Raumes x, y, z in ∞^2 Curven bestimmen. Demnach muss die Gleichung (7) eine Folge von (5) sein, oder, wie wir es auch ausdrücken können: die Gleichung (5) in den sechs Veränderlichen: x, y, z, x', y', z' muss die infinitesimale Transformation:

$$Wf = x' \frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} + z' \frac{\partial f}{\partial z}$$

gestatten.

Mit Berücksichtigung von Abschn. I, Theor. 15, S. 117 ergiebt sich jetzt, dass die Gleichung (5) auf die Form einer Relation zwischen den Lösungen der Differentialgleichung: $Wf = 0$ gebracht werden kann. Wählen wir daher, um möglichste Symmetrie zu erreichen, unter den Lösungen von $Wf = 0$ die folgenden sechs aus:

(8) $x', y', z', \quad yz' - zy' = u, \quad zx' - xz' = v, \quad xy' - yx' = w,$

zwischen denen die Relation:

(9) $$x'u + y'v + z'w = 0$$

besteht, so können wir die Gleichung (5) durch ein System zweier Gleichungen von der Form:

(10) $$\Omega(x', y', z', u, v, w) = 0, \quad x'u + y'v + z'w = 0$$

ersetzen. Da überdies die Gleichung (5) auch noch die infinitesimale Transformation:

$$x' \frac{\partial f}{\partial x'} + y' \frac{\partial f}{\partial y'} + z' \frac{\partial f}{\partial z'}$$

gestattet, so muss das Gleichungensystem (10) seinerseits die infinitesimale Transformation:

$$x' \frac{\partial f}{\partial x'} + y' \frac{\partial f}{\partial y'} + z' \frac{\partial f}{\partial z'} + u \frac{\partial f}{\partial u} + v \frac{\partial f}{\partial v} + w \frac{\partial f}{\partial w}$$

gestatten, wir können daher annehmen, dass Ω eine homogene Function seiner Argumente ist.

Augenscheinlich sind die sechs Veränderlichen: x', y', z', u, v, w, zwischen denen die Relation (9) besteht, nichts anderes als die homogenen Coordinaten der Geraden des Raumes x, y, z; das mit der Gleichung (5) äquivalente Gleichungensystem (10) stellt demnach eine Schaar von ∞^3 Geraden dar, einen sogenannten Liniencomplex. Dieser Complex bleibt selbstverständlich bei unsrer projectiven Gruppe G invariant.

Aus der Gleichung (5) ergiebt sich, dass durch jeden Punkt x, y, z von allgemeiner Lage ∞^1 Complexgerade gehen und dass diese ∞^1 Geraden ein ebenes Büschel bilden. Sind nun P_1 und P_2 irgend zwei Punkte von allgemeiner Lage, so schneiden sich die Ebenen der zugehörigen Büschel von Complexgeraden in einer Geraden γ, die zu der Geraden P_1P_2 sicher windschief ist; unserm Complex gehören dann augenscheinlich überhaupt alle die ∞^2 Geraden an, von denen die beiden Geraden P_1P_2 und γ getroffen werden. Ist ferner $\mathfrak{g}$ irgend eine der übrigen Complexgeraden, also eine, die P_1P_2 und γ jedenfalls nicht beide trifft, so kann man zunächst für jeden Punkt von $\mathfrak{g}$, sodann aber überhaupt für jeden Punkt des Raumes x, y, z das zugehörige ebene Büschel von Complexgeraden finden; wir brauchen das wohl nicht näher auszuführen. Durch die ausgewählten Complexgeraden ist somit unser Complex vollständig bestimmt und zwar ist er, wie seine Construction zeigt, ein linearer Complex; das Gleichungensystem (10), durch das er dargestellt wird, kann daher auf die Form:

$$(11)\qquad \begin{cases} a_1x' + a_2y' + a_3z' + b_1u + b_2v + b_3w = 0 \\ x'u + y'v + z'w = 0 \end{cases}$$

gebracht werden, wo die a und b Constanten sind.

Schliesslich ist noch zu bemerken, dass unser linearer Complex (11) nicht ausgeartet sein darf, er darf also nicht aus allen ∞^3 Geraden bestehen, die eine feste Gerade schneiden. Träte nämlich dieser Fall ein, so würden die ∞^1 Ebenen durch die feste Gerade sämmtlich Integralflächen der Pfaffschen Gleichung (3) sein, diese Gleichung wäre also gegen unsre Voraussetzung integrabel. Dass der Complex (11) nicht ausgeartet sein darf, kommt analytisch darauf hinaus, dass der Ausdruck: $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ von Null verschieden sein muss.

Hiermit ist bewiesen, dass jede primitive projective Gruppe des Raumes x, y, z, die eine nicht integrable Pfaffsche Gleichung (3) invariant lässt, einen nicht ausgearteten linearen Complex in sich überführt. Die betreffende Pfaffsche Gleichung, durch die der lineare Complex vollständig bestimmt ist, hat die Form:

$$(12)\qquad \begin{cases} a_1dx + a_2dy + a_3dz + \\ + b_1(y\,dz - z\,dy) + b_2(z\,dx - x\,dz) + b_3(x\,dy - y\,dx) = 0, \end{cases}$$

wo die Constanten a, b der Bedingung: $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \neq 0$ genügen müssen.

Nach einem Satze der Liniengeometrie kann jeder nicht ausgeartete lineare Complex durch eine projective Transformation in jeden andern übergeführt werden, wir können uns daher die Pfaffsche Gleichung (12) von vornherein auf die uns schon bekannte Form:

$$(13)\qquad dz + x\,dy - y\,dx = 0$$

gebracht denken (vgl. S. 125). Nunmehr ist es leicht einzusehen, dass es nur eine primitive projective Gruppe giebt, bei der die Pfaffsche Gleichung (13) invariant bleibt, nämlich die zehngliedrige projective Gruppe des nicht ausgearteten Complexes, der durch (13) bestimmt ist. Wir wollen uns aber nicht damit aufhalten, dies nachzuweisen.

Es sei jetzt zweitens G eine primitive projective Gruppe, bei der eine Gleichung zweiten Grades:

$$(4)\qquad \begin{cases} \alpha_{11}dx^2 + \alpha_{22}dy^2 + \alpha_{33}dz^2 + 2\alpha_{12}dx\,dy + 2\alpha_{23}dy\,dz + \\ + 2\alpha_{31}dz\,dx = 0 \end{cases}$$

mit nicht verschwindender Determinante invariant bleibt.

Wir betrachten wieder x, y, z als Functionen einer Hülfsveränderlichen t und bilden die Differentialgleichung:

$$(14)\quad \alpha_{11}x'^2 + \alpha_{22}y'^2 + \alpha_{33}z'^2 + 2\alpha_{12}x'y' + 2\alpha_{23}y'z' + 2\alpha_{31}z'x' = 0,$$

die ebenfalls bei G invariant bleibt. Genau in derselben Weise wie oben erkennen wir nun, dass die Gleichung (14) in den sechs Veränderlichen x, y, z, x', y', z' die infinitesimale Transformation:

$$Wf = x' \frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} + z' \frac{\partial f}{\partial z}$$

gestattet, dass sie sich also durch ein System zweier Gleichungen von der Form:

$$\omega(x', y', z', u, v, w) = 0, \quad x'u + y'v + z'w = 0 \tag{15}$$

ersetzen lässt, wo ω eine homogene Function seiner Argumente ist.

Das Gleichungensystem (15) stellt offenbar einen Liniencomplex dar, dessen ∞^3 Gerade sämmtlich Integralcurven der Gleichung (4) sind. Durch jeden Punkt x, y, z von allgemeiner Lage gehen ∞^1 Complexgerade, die einen nicht ausgearteten Kegel zweiten Grades bilden. Hieraus lässt sich schliessen, dass wir es mit einem Complexe zweiten Grades zu thun haben, dass also ω gleich einer ganzen homogenen Function zweiten Grades von x', y', z', u, v, w gesetzt werden kann. Die nähere Begründung dieses Schlusses unterdrücken wir, sie ist ja überhaupt Sache der Liniengeometrie.

Es steht also jetzt fest, dass jede primitive projective Gruppe G, die eine Gleichung von der Form (4) invariant lässt, einen Liniencomplex zweiten Grades in sich überführt. Dieser Complex hat eine Singularitätenfläche, die natürlich ebenfalls bei G invariant bleibt. Nun aber folgt aus S. 196, Satz 6, dass es unter den projectiven Gruppen, die eine krumme Fläche invariant lassen, blos eine primitive giebt, nämlich die sechsgliedrige projective Gruppe einer nicht ausgearteten Fläche zweiten Grades, andrerseits sind alle projectiven Gruppen, die zwei oder mehr getrennte Ebenen invariant lassen, sicher imprimitiv, also ergiebt sich, dass die Singularitätenfläche unsers Complexes keine allgemeine Fläche vierter Ordnung sein kann, sie muss vielmehr zerfallen und zwar entweder in eine doppelt zählende wirkliche Fläche zweiten Grades oder in eine vierfach zählende Ebene. Im ersten Falle besteht der Complex aus den ∞^3 Tangenten der Fläche zweiten Grades, im zweiten Falle muss offenbar auf der vierfach zählenden Ebene ein Kegelschnitt liegen, der bei G invariant bleibt, der Complex besteht dann aus den ∞^3 Geraden, die diesen Kegelschnitt treffen.

Auf diese Weise erkennen wir, dass es nur drei Typen von primitiven projectiven Gruppen giebt, bei denen eine Gleichung (4) mit nicht verschwindender Determinante invariant bleibt. Repräsentanten dieser drei Typen sind die sechsgliedrige projective Gruppe

einer nicht ausgearteten Fläche zweiten Grades, die siebengliedrige Gruppe der Euklidischen Bewegungen und der Aehnlichkeitstransformationen, endlich die sechsgliedrige Gruppe der Euklidischen Bewegungen.

Hiermit ist das Ziel des gegenwärtigen Paragraphen erreicht.

Kapitel 13.

Die imprimitiven projectiven Gruppen des gewöhnlichen Raumes.

Wir haben gesehen, dass fast jede primitive projective Gruppe des Raumes entweder eine Fläche oder eine krumme Curve, also überhaupt eine Punktfigur invariant lässt; eine Ausnahme hiervon machten blos die allgemeine projective Gruppe selbst und die zehngliedrige projective Gruppe eines linearen Complexes. Wir werden jetzt zunächst zeigen, dass von den imprimitiven projectiven Gruppen des Raumes dasselbe gilt, nur ohne Ausnahme: jede imprimitive projective Gruppe lässt mindestens eine Punktfigur invariant, das heisst entweder eine Fläche oder eine Curve oder einen Punkt.

Auf Grund der Entwickelungen von Kapitel 9 werden wir ferner ohne jede Schwierigkeit alle imprimitiven projectiven Gruppen angeben können, die keine ebene Punktfigur, also keinen Punkt, keine Gerade und auch keine Ebene invariant lassen. Um alle übrigen imprimitiven Gruppen zu finden, giebt es dann zwei verschiedene Wege, die beide ausführlich besprochen werden sollen. Wir werden dabei so weit gehen, dass zur wirklichen Aufstellung aller Typen von imprimitiven projectiven Gruppen des Raumes nur noch gewisse vollständig übersehbare Rechnungen erforderlich sind, die keine andre Schwierigkeit mehr darbieten, als dass sie einige Geduld und Ausdauer verlangen.

Im letzten Paragraphen des Kapitels setzen wir schliesslich noch kurz auseinander, wie man alle Typen von Untergruppen der zehngliedrigen projectiven Gruppe des linearen Complexes bestimmen kann.

§ 56.

Ist eine imprimitive projective Gruppe des Raumes intransitiv, so lässt sie sogar unendlich viele Flächen oder Curven invariant. Es lässt sich aber zeigen, dass auch jede imprimitive projective Gruppe, die transitiv ist, mindestens eine Punktfigur in Ruhe lässt.

Nehmen wir zunächst an, dass unsre imprimitive aber transitive

projective Gruppe G dreigliedrig ist, also mit andern Worten einfach transitiv.

Um zu beweisen, dass G mindestens eine Punktfigur invariant lässt, schreiben wir die infinitesimalen Transformationen $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ von G in vier homogenen Veränderlichen $x_1 \ldots x_4$ (s. Abschn. I, S. 578 f.) und fügen die infinitesimale Transformation:

$$X_4 f = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4$$

hinzu, die mit $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ zusammen eine viergliedrige lineare homogene Gruppe in $x_1 \ldots x_4$ erzeugt. Die Determinante Δ der vier infinitesimalen Transformationen $X_1 f \ldots X_4 f$ kann nicht identisch verschwinden, sonst hätten ja die vier Gleichungen:

$$X_1 f = 0, \ldots, X_4 f = 0$$

eine Lösung: $\omega\left(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}\right)$ gemein und es blieben daher die ∞^1 Flächen:

$$\omega\left(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}\right) = \text{const.}$$

bei unsrer Gruppe G invariant, was wegen der Transitivität von G ausgeschlossen ist. Demnach ist $\Delta = 0$ eine Gleichung, die bei der Gruppe: $X_1 f \ldots X_4 f$ und also auch bei G invariant bleibt, das heisst, es giebt jedenfalls eine Fläche, die bei G ihre Lage behält.

Wir kommen zu den imprimitiven projectiven Gruppen des Raumes, die transitiv sind, die aber mehr als drei, sagen wir m Parameter enthalten.

Ist g eine Gruppe dieser Art, so müssen wir unterscheiden, ob bei g eine Schaar von ∞^1 Flächen: $\varphi(x, y, z) = \text{const.}$ invariant bleibt, oder ob es keine solche Flächenschaar giebt, sondern nur eine invariante Schaar von ∞^2 Curven: $\alpha(x, y, z) = \text{const.}$, $\beta(x, y, z) = \text{const.}$

Im ersten Falle gestattet jede der ∞^1 Flächen $m - 1$, also mindestens drei unabhängige infinitesimale Transformationen von g, sie ist daher (s. S. 196, Satz 6) entweder eine Ebene oder eine Fläche zweiten Grades oder ein Kegel oder die Abwickelbare einer gewundenen Curve dritter Ordnung oder endlich eine Cayleysche Linienfläche dritter Ordnung. Hieraus folgt, dass die invariante Flächenschaar immer eine Umhüllungsfigur — Fläche, Curve oder Punkt — besitzt, die natürlich ebenfalls bei g invariant bleibt. Besteht die Schaar insbesondere aus ∞^1 Kegeln, so bilden die ∞^1 Kegelspitzen eine invariante Curve, die unter Umständen auch auf einen invarianten Punkt zusammenschrumpfen kann. Aehnlich ist es bei einer invarianten Schaar von ∞^1 Cayleyschen Linienflächen, denn auf jeder solchen Fläche

giebt es einen ausgezeichneten Punkt, der für sie dieselbe Rolle spielt wie für den Kegel seine Spitze (vgl. S. 196).

Nunmehr ist noch der zweite Fall zu erledigen, dass unsre m-gliedrige Gruppe g zwar keine Schaar von ∞^1 Flächen, wohl aber eine Schaar von ∞^2 Curven: $\alpha(x, y, z) = \text{const.}$, $\beta(x, y, z) = \text{const.}$ invariant lässt. Es ist dann sicher, dass diese ∞^2 Curven sich nicht in eine invariante Schaar von ∞^1 Flächen anordnen lassen, mit andern Worten: es giebt keine solche Function: $\omega(\alpha, \beta)$, dass die Schaar der ∞^1 Flächen: $\omega(\alpha, \beta) = \text{const.}$ bei g invariant bleibt.

Wir führen $\alpha(x, y, z)$, $\beta(x, y, z)$ und eine dritte geeignete Function γ von x, y, z als neue unabhängige Veränderliche ein, dabei bekommen die infinitesimalen Transformationen von g die Gestalt:

$$X_k f = \varphi_k(\alpha, \beta)\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \chi_k(\alpha, \beta)\frac{\partial f}{\partial \beta} + \psi_k(\alpha, \beta, \gamma)\frac{\partial f}{\partial \gamma}$$
$$(k = 1 \ldots m).$$

Nach Abschn. I, S. 307, Satz 4 erzeugen die m verkürzten infinitesimalen Transformationen:

$$\overline{X}_k f = \varphi_k(\alpha, \beta)\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \chi_k(\alpha, \beta)\frac{\partial f}{\partial \beta} \quad (k = 1 \ldots m)$$

in den zwei Veränderlichen α, β ihrerseits eine Gruppe $\bar{g}$, die mit g isomorph ist und die angiebt, in welcher Weise die ∞^2 Curven: $\alpha(x, y, z) = \text{const.}$, $\beta(x, y, z) = \text{const.}$ bei g unter einander vertauscht werden. Diese Gruppe $\bar{g}$ ist in unserm Falle offenbar primitiv, sie ist daher mindestens fünfgliedrig und ausserdem mit einer projectiven Gruppe der Ebene ähnlich. Da nun jede projective Gruppe der Ebene die Schaar der ∞^2 Geraden invariant lässt, so ergiebt sich, dass bei $\bar{g}$ eine Schaar von ∞^2 Curven: $\Pi(\alpha, \beta; a, b) = 0$ invariant bleibt; hieraus aber folgt, dass bei g selbt eine Schaar von ∞^2 Flächen invariant bleibt, nämlich diese:

$$\Pi(\alpha(x, y, z), \quad \beta(x, y, z); a, b) = 0.$$

Da g ebenso wie $\bar{g}$ mindestens fünfgliedrig ist, so gestattet jede Fläche dieser invarianten Schaar mindestens drei unabhängige infinitesimale Transformationen von g und gehört in Folge dessen zu einer der fünf Flächenarten, die beim ersten Falle namhaft gemacht sind. Hieraus endlich können wir schliessen, dass die ∞^2 Flächen: $\Pi = 0$ unter allen Umständen eine Umhüllungsfigur — Fläche, Curve oder Punkt — besitzen, die natürlich ebenfalls bei g invariant bleibt.

Hiermit ist der vorhin angekündigte Satz gewonnen:

Satz 1. *Jede imprimitive projective Gruppe des gewöhnlichen Raumes lässt entweder eine Fläche oder eine Curve oder einen Punkt invariant.*

Wollen wir auch die primitiven Gruppen mit einschliessen, so können wir uns folgendermassen ausdrücken:

Theorem 12. *Im gewöhnlichen Raume giebt es nur zwei projective Gruppen, die weder eine Fläche, noch eine Curve, noch einen Punkt invariant lassen; es sind das erstens die fünfzehngliedrige allgemeine projective Gruppe und zweitens die zehngliedrige projective Gruppe eines nicht ausgearteten linearen Complexes**).

§ 57.

Auf Grund des Satzes 1 können wir die imprimitiven projectiven Gruppen des Raumes in zwei Klassen eintheilen: in die erste rechnen wir alle Gruppen dieser Art, die einen Punkt, eine Gerade oder eine Ebene, kurz also eine *ebene Punktfigur* invariant lassen, in die zweite alle Gruppen, die keine ebene Punktfigur, sondern entweder eine krumme Fläche oder eine gewundene Curve invariant lassen. Da die zur zweiten Klasse gehörigen Gruppen voraussichtlich weit weniger zahlreich sind als die zur ersten gehörigen, sollen zunächst sie bestimmt werden.

Ein- und zweigliedrige projective Gruppen können unter ihnen nicht vorkommen, denn die lassen nach Abschn. I, S. 585 und 589 stets mindestens einen Punkt, eine hindurchgehende Gerade und eine durch beide gehende Ebene invariant. Mithin können nur Gruppen mit mindestens drei Parametern in Frage kommen.

Bleibt bei einer solchen Gruppe eine krumme Fläche invariant, so kann das nur eine nicht ausgeartete Fläche zweiten Grades oder die Abwickelbare einer gewundenen Curve dritter Ordnung sein; dass die Kegel und die Cayleysche Linienfläche auszuschliessen sind, ist klar, denn in beiden Fällen bliebe zugleich ein Punkt in Ruhe. Bleibt andrerseits bei der Gruppe eine gewundene Curve invariant, so kann das nur eine von der dritten Ordnung sein.

Nun aber ist die sechsgliedrige projective Gruppe einer nicht ausgearteten Fläche zweiten Grades primitiv, gehört also nicht hierher, ausserdem lässt jede Untergruppe dieser Gruppe entweder eine Erzeugende der Fläche invariant oder eine Ebene nebst ihrem Pole in Bezug auf die Fläche (s. S. 205). Demnach bleibt einzig und allein die dreigliedrige projective Gruppe einer gewundenen Curve dritter Ordnung übrig:

---

*) Lie, Archiv for Math. Bd. 10, 1884.

Satz 2. *Die dreigliedrige projective Gruppe einer gewundenen Curve dritter Ordnung ist die einzige imprimitive projective Gruppe des gewöhnlichen Raumes, die weder einen Punkt, noch eine Gerade, noch eine Ebene invariant lässt* *).

Jetzt sind noch alle imprimitiven projectiven Gruppen zu bestimmen, bei denen ein Punkt oder eine Gerade oder eine Ebene invariant bleibt. Sehen wir der Einfachheit wegen Gruppen, die zu einander dualistisch sind, als nicht von einander verschieden an, so können wir uns auf die Gruppen beschränken, die entweder eine Ebene oder eine Gerade in Ruhe lassen.

Die projectiven Gruppen, bei denen eine Gerade ihre Lage behält, sind sämmtlich imprimitiv, nicht so die, bei denen eine Ebene in Ruhe bleibt. Unter den letzteren giebt es nämlich offenbar vier Typen von primitiven Gruppen, deren Repräsentanten die folgenden vier Gruppen sind: die allgemeine lineare Gruppe, die specielle lineare, die Gruppe der Euklidischen Bewegungen und der Aehnlichkeitstransformationen, endlich die Gruppe der Euklidischen Bewegungen selbst. Dagegen ist zu beachten, dass auch diese vier Gruppen bei dualistischer Umformung imprimitive Gruppen liefern.

Die Anzahl der noch fehlenden imprimitiven Gruppen ist recht gross, es erscheint daher empfehlenswerth, gleich zwei verschiedene Methoden zu ihrer Bestimmung zu entwickeln, durch die Anwendung beider und die Vergleichung ihrer Ergebnisse erhält man ja erst Gewissheit darüber, dass man keine Gruppe vergessen hat. Zwei solche Methoden bieten sich nun hier ganz unmittelbar. Erstens nämlich kann man damit beginnen, dass man alle projectiven Gruppen sucht, die eine Ebene stehen lassen, hat man die gefunden, so erhält man durch dualistische Umformung alle die, bei denen ein Punkt in Ruhe bleibt, und es fehlen dann nur noch die wenigen, die eine Gerade, aber weder einen Punkt noch eine Ebene invariant lassen. Zweitens aber kann man auch so verfahren, dass man erst alle projectiven Gruppen sucht, die eine Gerade festhalten, die ordnen sich schon von selbst paarweise als dualistisch zusammen; zu diesen hat man noch alle Gruppen hinzuzufügen, die keine Gerade, dagegen entweder eine Ebene oder einen Punkt stehen lassen. Beide Male sind natürlich die oben aufgeführten vier primitiven Gruppen wegzulassen.

An und für sich verdient kaum eine dieser beiden Methoden vor der andern den Vorzug, und es ist, wie schon gesagt, empfehlenswerth, sie beide anzuwenden, um einen Prüfstein für die Richtigkeit der Rech-

*) Lie, Archiv for Math. Bd. 10, 1884.

nung zu haben. Wir werden deshalb beide Methoden ausführlich besprechen und genau auseinandersetzen, was für Rechnungen zu ihrer Durchführung erforderlich sind. Dagegen werden wir diese Rechnungen selbst nur soweit ausführen, als zum vollen Verständniss der Methoden erforderlich ist; auf die wirkliche Aufstellung aller imprimitiven projectiven Gruppen des Raumes verzichten wir.

Zunächst zeigen wir, wie man alle projectiven Gruppen des Raumes finden kann, die eine Ebene oder einen Punkt invariant lassen, sodann wie man alle bestimmt, die eine Gerade festhalten*).

§ 58.

Die projectiven Gruppen des Raumes, die eine Ebene oder einen Punkt invariant lassen.

Vorerst fragen wir nur nach allen Gruppen, die eine Ebene invariant lassen. Die invariante Ebene verlegen wir durch eine projective Transformation ins Unendliche, dann handelt es sich um die Untergruppen der G_{12}:

$$(1) \qquad p,\ q,\ r,\ xp,\ yp,\ zp,\ xq,\ yq,\ zq,\ xr,\ yr,\ zr,$$

der sogenannten allgemeinen linearen Gruppe.

Es kommt uns jetzt sehr zu statten, dass wir in Kapitel 6 alle Untergruppen der G_9:

$$(2) \qquad xp,\ yp,\ zp,\ xq,\ yq,\ zq,\ xr,\ yr,\ zr$$

bestimmt haben.

Nach Abschn. I, S. 570 f. lässt sich nämlich die Bestimmung aller Untergruppen unsrer G_{12} auf die Bestimmung aller Untergruppen der allgemeinen linearen homogenen Gruppe (2) zurückführen. Da wir nun in Kapitel 6 bereits alle Untergruppen der G_9 aufgestellt haben, so brauchen wir nur noch auseinanderzusetzen, wie man aus den Untergruppen der G_9 die der G_{12} finden kann. Das soll jetzt geschehen.

Jede Untergruppe g der G_{12} enthält eine gewisse Zahl, etwa m unabhängige infinitesimale Transformationen, aus denen sich keine infinitesimale Translation: $\lambda p + \mu q + \nu r$ linear ableiten lässt, diese infinitesimalen Transformationen haben die Form:

$$(3) \qquad X_k f + \alpha_k p + \beta_k q + \gamma_k r \quad (k = 1 \ldots m),$$

*) In der schon angeführten Arbeit, Archiv for Math. Bd. X, 1884, hat Lie bereits alle projectiven Gruppen des Raumes aufgestellt, welche die unendlich ferne Ebene invariant lassen und ihre Punkte acht-, sechs- oder fünfgliedrig transformiren.

wo $X_1 f \ldots X_m f$ unabhängige infinitesimale Transformationen der G_9 sind, die ihrerseits eine Untergruppe der G_9 erzeugen. Ausserdem enthält g noch eine gewisse Zahl, etwa l unabhängige infinitesimale Translationen:

$$\lambda_k p + \mu_k q + \nu_k r \quad (k = 1 \ldots l), \tag{4}$$

die wir kurz als *freie* Translationen bezeichnen. Nun ist die Gruppe der Translationen: p, q, r in der Gruppe G_{12} invariant, sie bleibt also auch bei allen Transformationen der G_9 invariant. Demnach können wir uns die Gruppe: $X_1 f \ldots X_m f$ und damit zugleich auch die betreffende Untergruppe g der G_{12} von vornherein auf eine der Normalformen gebracht denken, die S. 116 ff. zusammengestellt sind. Es bedarf dann in jedem einzelnen Falle nur noch der Bestimmung der Constanten α_k, β_k, γ_k und der etwa vorhandenen freien Translationen (4).

Enthält g überhaupt freie Translationen, aber nicht alle drei: p, q, r, so fragt es sich, was für Translationen frei auftreten können. Diese Frage lässt sich genau so beantworten wie auf S. 211 f. Die freien Translationen (4) von g erzeugen nämlich eine ein- oder zweigliedrige invariante Untergruppe $\mathfrak{g}$ von g und diese Untergruppe $\mathfrak{g}$ wird auf der unendlich fernen Ebene entweder durch einen Punkt oder durch eine Gerade abgebildet. Das Bild von $\mathfrak{g}$ bleibt natürlich bei g und also auch bei der Gruppe: $X_1 f \ldots X_m f$ invariant. Demnach muss man zunächst alle Geraden und alle Punkte der unendlich fernen Ebene bestimmen, die bei: $X_1 f \ldots X_m f$ invariant bleiben. Giebt es keine invariante Gerade und auch keinen invarianten Punkt, so enthält g entweder gar keine freien Translationen oder es enthält alle drei: p, q, r. Jeder invariante Punkt dagegen zeigt, dass die Translation, deren Bild er ist, frei auftreten kann und entsprechendes gilt für jede invariante Gerade. Jedoch braucht man nicht immer alle invarianten Punkte und alle invarianten Geraden zu berücksichtigen. Lässt nämlich die Gruppe: $X_1 f \ldots X_m f$ zum Beispiel zwei verschiedene Punkte invariant, so sind die dann als gleichberechtigt anzusehen, wenn es in der G_9 eine Transformation giebt, die sie untereinander vertauscht und zugleich die Gruppe: $X_1 f \ldots X_m f$ in sich überführt; diese Transformation der G_9 vertauscht eben dann auch die beiden Translationen untereinander, die durch die beiden invarianten Punkte abgebildet werden.

Hat man die Translationen bestimmt, die in g frei auftreten können, so muss man noch die möglichen Werthe der Constanten α_k, β_k, γ_k ermitteln. Im Allgemeinen wird man bei Anwendung der Klammeroperation finden, dass gewisse dieser Constanten null sein müssen und dass andre durch Relationen verknüpft sind. Die dann noch übrig

bleibenden kann man zum Theil durch geeignete Transformationen der G_{12} gleich Null oder gleich 1 machen. Man darf dabei erstens alle Translationen:

$$x' = x + a, \quad y' = y + b, \quad z' = z + c$$

benutzen und zweitens alle Transformationen der G_9, bei denen sowohl die Gruppe: $X_1 f \ldots X_m f$ als die Gruppe der freien Translationen invariant bleibt.

Wir stellen jetzt zusammen, was für Translationen in der Gruppe g frei auftreten können, wenn man als Gruppe $X_1 f \ldots X_m f$ der Reihe nach die einzelnen Gruppen der Tabelle auf S. 116 ff. einsetzt.

I, 1, 2 : freie Translationen: keine; alle.
II, 1, 2 : freie Translationen: keine; p, q; alle.
II, 3, 4 : keine; q; alle.
III, 1, 2 : keine; p, q; alle.
III, 3, 4 : keine; q; alle.
III, 5, 6 : keine; q; p, q; alle.
IV, 1, 2 : keine; q; p, q; alle.
IV, 3, 4 : keine; q; p, q; alle.
IV, 5, 6, 7, 8: keine; q; p, q; alle.
IV, 9, 10 : keine; r; p, q; alle.
V, 1, 2 : keine; alle.
V, 3, 4 : keine; r; p, q; alle.
V, 5, 6, 7 : keine; p; q; p, q; alle.
V, 8, 9, 10 : keine; q; p, q; q, r; alle.
V, 11, 12 : keine; p; q; p, q; q, r; alle.
V, 13—17 : keine; q; p, q; alle.
V, 18, 19 : keine; q; p, q; alle.
V, 20, 21 : keine; q; p, q; alle.
V, 22, 23 : keine; q; p, q; alle.
VI, 1, 2, 3 : keine; p; q; p, q; q, r; alle.
VI, 4, 5 : keine; p; q; p, q; alle.
VI, 6, 7 : keine; q; p, q; q, r; alle.
VI, 8, 9 : keine; q; p, q; alle.
VI, 10, 11, 12: keine; q; p, q; alle, bei VI, 11 auch noch: p.
VI, 13, 14, 15: keine; q; p, q; alle, bei VI, 14 auch noch: q, r.
VI, 16—19 : keine; q; p, q; alle.
VI, 20—22 : keine; q; p; p, q; q, r; alle.
VI, 23, 24 : keine; q; p, q; alle.
VII, 1, 2 : keine; q; p, q; alle.
VII, 3, 4 : keine; p; q; p, q; p, r; alle.

VII, 5, 6, 7 : keine; q; p, q; alle.
VII, 8, 9 : keine; p; q; p, q; p, r; alle.
VII, 10, 11, 12 : keine; p; q; p, q; q, r; alle.
VIII, 1 : keine; p; p, q; alle.

Endlich kann g auch aus lauter Translationen bestehen, wenn nämlich die Gruppe: $X_1 f \ldots X_m f$ sich auf die identische Transformation reducirt. In diesem Falle kann g eine der drei Formen: p; p, q; p, q, r annehmen.

Hiermit ist alles soweit vorbereitet, dass man durch einfache Rechnungen alle projectiven Gruppen finden kann, die eine Ebene invariant lassen. Wir wollen uns aber hier begnügen, unter den betreffenden Gruppen erstens die aufzustellen, bei denen keine Gerade invariant bleibt und zweitens die, bei denen kein Punkt seine Lage behält.

Lässt eine projective Gruppe des Raumes eine Ebene invariant, dagegen keine Gerade, so transformirt sie die Punkte der invarianten Ebene entweder in allgemeinster Weise, oder sie lässt auf der Ebene einen Punkt und weiter keine Punktfigur in Ruhe oder sie führt einen Kegelschnitt der Ebene in sich über, sie transformirt also die Punkte der invarianten Ebene entweder acht- oder sechs- oder fünf- oder dreigliedrig, denn auf dem etwaigen invarianten Kegelschnitt darf natürlich kein Punkt in Ruhe bleiben, sonst behielte auch die zugehörige Tangente ihre Lage.

Aus Abschnitt I, Theor. 102, S. 574 können wir entnehmen, dass es nur vier Typen von projectiven Gruppen giebt, die eine Ebene invariant lassen und die Punkte dieser Ebene in allgemeinster Weise, das heisst achtgliedrig, transformiren. Verlegen wir die invariante Ebene ins Unendliche, so erhalten wir als Repräsentanten dieser vier Typen die vier Gruppen:

$$(5) \quad \begin{cases} zp,\ zq,\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp - zr,\ xr,\ yr \\ zp,\ zq,\ xp,\ yp,\ xq,\ yq,\ xr,\ yr,\ zr \end{cases}$$

$$(6) \quad \begin{cases} zp,\ zq,\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp - zr,\ xr,\ yr,\ p,\ q,\ r \\ zp,\ zq,\ xp,\ yp,\ xq,\ yq,\ xr,\ yr,\ zr,\ p,\ q,\ r. \end{cases}$$

Ebenso giebt es nur vier Typen von projectiven Gruppen, die in der unendlich fernen Ebene einen Kegelschnitt invariant lassen und dessen Punkte dreigliedrig transformiren. Aus der Tabelle auf S. 214 entnehmen wir die folgenden Repräsentanten dieser vier Typen:

$$(7)\quad \begin{cases} 2zp + yr,\ xp - yq,\ 2zq + xr \\ 2zp + yr,\ xp - yq,\ 2zq + xr,\ xp + yq + zr \end{cases}$$

$$(8)\quad \begin{cases} 2zp + yr,\ xp - yq,\ 2zq + xr,\ p,\ q,\ r \\ 2zp + yr,\ xp - yq,\ 2zq + xr,\ xp + yq + zr,\ p,\ q,\ r. \end{cases}$$

Noch bleiben die Gruppen zu bestimmen, die blos einen Punkt der unendlich fernen Ebene in Ruhe lassen.

Nehmen wir an, dass g eine solche Gruppe ist und dass g die Punkte der unendlich fernen Ebene sechsgliedrig transformirt; dann hat die zu g gehörige Gruppe: $X_1 f \ldots X_m f$ eine der beiden Formen:

$$zp,\ zq,\ xq,\ xr,\ xp,\ yq,\ zr$$
$$zp,\ zq,\ xq,\ xr,\ xp - zr,\ yq + c(xp + yq + zr)$$

(s. S. 116 II, 4 und 3), demnach hat g selbst, wenn von den freien Translationen abgesehen wird, eine der beiden Formen:

$$(A)\quad \begin{cases} zp + \alpha_1 p + \beta_1 q + \gamma_1 r \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ zr + \alpha_7 p + \beta_7 q + \gamma_7 r \end{cases}$$

$$(B)\quad \begin{cases} zp + \alpha_1 p + \beta_1 q + \gamma_1 r \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ yq + c(xp + yq + zr) + \alpha_6 p + \beta_6 q + \gamma_6 r. \end{cases}$$

Freie Translationen treten in g entweder gar nicht auf oder es kommt nur q vor oder es sind p, q, r alle drei vorhanden.

Im Falle (A) bringt man die in g sicher vorhandene Transformation:

$$(9)\qquad xp + yq + zr + \alpha p + \beta q + \gamma r$$

auf die Form: $xp + yq + zr$, indem man: $x + \alpha$, $y + \beta$, $z + \gamma$ als neue x, y, z einführt. Durch Combination erkennt man sodann, dass alle α_k, β_k, γ_k verschwinden. So einfach gestaltet sich übrigens die Rechnung immer, wenn eine Transformation (9) auftritt, mögen nun freie Translationen vorhanden sein oder nicht. Im Falle (A) erhalten wir demnach die drei Gruppen:

$$(10)\qquad \begin{cases} zp,\ zq,\ xq,\ xr,\ xp,\ yq,\ zr \\ zp,\ zq,\ xq,\ xr,\ xp,\ yq,\ zr,\ q \end{cases}$$

$$(11)\qquad zp,\ zq,\ xq,\ xr,\ xp,\ yq,\ zr,\ p,\ q,\ r,$$

von diesen kommen aber die beiden ersten hier nicht in Betracht, da sie die Gerade: $x = z = 0$ invariant lassen.

Treten bei (B) gar keine Translationen frei auf, so erhält man

zunächst, wenn man $x + \alpha_5$ und $z - \gamma_5$ als neue x und z einführt, die Transformation:

$$xp - zr + \beta_5 q.$$

Combinirt man diese mit den übrigen, so erkennt man, dass

$$\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1,\ \beta_2,\ \gamma_2,\ \alpha_3,\ \beta_3,\ \alpha_4,\ \beta_4,\ \gamma_4,\ \alpha_6,\ \gamma_6$$

sämmtlich verschwinden. Durch Bildung der Ausdrücke:

$$(zp,\ xq + \gamma_3 r),\ (zp,\ xr),\ (xq + \gamma_3 r,\ zq + \alpha_2 p)$$

ergiebt sich ferner: $\gamma_3 = 0$, $\beta_5 = 0$ und $\alpha_2 = \gamma_3 = 0$. Endlich kann man, wenn $c \neq -1$ ist, auch β_6 durch Einführung eines neuen y gleich Null machen, ist aber $c = -1$ und $\beta_6 \neq 0$, so kann man β_6 durch Einführung eines neuen z gleich -1 machen. Man findet demnach die beiden Gruppen:

$$(12)\quad \begin{cases} zp,\ zq,\ xq,\ xr,\ xp - zr,\ yq + c(xp + yq + zr) \\ zp,\ zq,\ xq,\ xr,\ xp - zr,\ xp + zr + q, \end{cases}$$

die allerdings beide die Gerade: $x = z = 0$ invariant lassen.

Tritt im Falle (B) blos die Translation q frei auf, so führt man neue x und z derart ein, dass α_5 und γ_5 verschwinden, dann zeigt sich durch Combination sofort, dass $\alpha_1,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \gamma_4,\ \alpha_6,\ \gamma_6$ alle null werden und dass $\gamma_3 = -\alpha_2$ ist. Hat c einen von 1 verschiedenen Werth, so ist auch $\alpha_2 = 0$, ist aber $c = 1$, so kann $\alpha_2 = -\gamma_3$ durch Einführung eines neuen z den Werth 1 erhalten. Somit ergeben sich die beiden Gruppen:

$$(13)\quad zp,\ zq,\ xq,\ xr,\ xp - zr,\ yq + c(xp + yq + zr),\ q$$

$$(14)\quad zp,\ zq + p,\ xq - r,\ xr,\ xp - zr,\ xp + 2yq + zr,\ q,$$

von denen die erste wiederum die Gerade $x = z = 0$ invariant lässt; die zweite lässt den linearen Complex invariant, der durch die Gleichung: $dy - x\,dz + z\,dx = 0$ dargestellt wird.

Treten im Falle (B) schliesslich alle Translationen $p,\ q,\ r$ auf, so haben wir die Gruppe:

$$(15)\quad zp,\ zq,\ xq,\ xr,\ xp - zr,\ yq + c(xp + yq + zr),\ p,\ q,\ r.$$

Jetzt bleiben noch alle Gruppen zu bestimmen, bei denen die unendlich ferne Ebene und ein Punkt auf ihr invariant bleibt, während die Punkte der unendlich fernen Ebene fünfgliedrig transformirt werden. Die Gruppe $X_1 f \ldots X_m f$, die zu einer solchen Gruppe g gehört, kann eine der beiden Formen:

$$zp,\ zq,\ xq,\ xr,\ xp - zr$$

$$zp,\ zq,\ xq,\ xr,\ xp - zr,\ xp + yq + zr$$

(s. S. 117, III, 3 und 4) erhalten; freie Translationen treten entweder nicht auf, oder es ist q vorhanden oder alle drei: $p,\ q,\ r$.

Da die Rechnung, die zur Bestimmung dieser Gruppen führt, fast auf eine Wiederholung der vorhin gemachten Rechnungen hinauskommt, so begnügen wir uns, die Gruppen zusammenstellen, die sich ergeben. Es sind die folgenden:

$$(16)\quad \begin{cases} zp,\ zq,\ xq,\ xr,\ xp - zr,\ xp + yq + zr \\ zp,\ zq,\ xq,\ xr,\ xp - zr,\ xp + yq + zr,\ q \\ zp,\ zq,\ xq,\ xr,\ xp - zr \\ zp,\ zq,\ xq,\ xr,\ xp - zr,\ q. \end{cases}$$

$$(17)\quad \begin{cases} zp,\ zq,\ xq,\ xr,\ xp - zr,\ xp + yq + zr,\ p,\ q,\ r \\ zp,\ zq + p,\ xq - r,\ xr,\ xp - zr,\ q \\ zp,\ zq,\ xq,\ xr,\ xp - zr,\ p,\ q,\ r. \end{cases}$$

Die Gruppen (16) lassen wieder die Grade: $x = z = 0$ invariant.

Hiermit sind alle projectiven Gruppen des Raumes gefunden, die eine Ebene, aber keine Gerade in Ruhe lassen, es sind das im Ganzen blos vierzehn Typen, deren Repräsentanten die Gruppen: (5), (6), (7), (8), (11), (14), (15) und (17) sind. Zu bemerken ist, dass zwei dieser Gruppen je einen wesentlichen Parameter enthalten, wir haben es daher hier im Grunde mit je ∞^1 verschiedenen Typen oder mit zwei Typengattungen zu thun (vgl. Abschn. I, S. 447 f.). Endlich erwähnen wir, dass es unter den genannten vierzehn Gruppen vier primitive giebt, nämlich die Gruppen (6) und (8), alle übrigen sind imprimitiv und zwar lässt jede von ihnen mindestens eine Schaar von ∞^2 Geraden invariant, dagegen giebt es im Allgemeinen keine invariante Schaar von ∞^1 Ebenen.

Lässt eine projective Gruppe G die unendlich ferne Ebene stehen, nicht aber einen Punkt des Raumes, so transformirt sie die Punkte der unendlich fernen Ebene entweder acht- oder sechs- oder fünf- oder dreigliedrig. Im ersten Falle hat G offenbar eine der beiden Formen (6) auf S. 240, denn die Gruppen (5) lassen beide den Punkt: $x = y = z = 0$ in Ruhe. Im vierten Falle lässt G einen Kegelschnitt auf der unendlich fernen Ebene stehen und kann daher auf eine der beiden Formen (8) gebracht werden, denn die Gruppen (7) halten den Punkt: $x = y = z = 0$ fest. Uebrig bleiben also nur der zweite und dritte Fall, wo beide Male eine Gerade der unendlich fernen Ebene ihre Lage behält.

Lässt G eine Gerade der unendlich fernen Ebene stehen und transformirt es die Punkte der Ebene sechsgliedrig, so kann die zu G gehörige Gruppe $X_1 f \ldots X_m f$ auf eine der beiden Formen:

$$zp,\ zq,\ xp,\ yp,\ xq,\ yq,\ zr$$
$$zp,\ zq,\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq + c(xp + yq + zr)$$

gebracht werden (s. S. 116 unter II). Hieraus ergiebt sich, dass G, abgesehen von den freien Translationen, eine der beiden Formen hat:

$$\text{(C)} \qquad \begin{cases} zp + \alpha_1 p + \beta_1 q + \gamma_1 r \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ zr + \alpha_7 p + \beta_7 q + \gamma_7 r \end{cases}$$

$$\text{(D)} \qquad \begin{cases} zp + \alpha_1 p + \beta_1 q + \gamma_1 r \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ xp + yq + c(xp + yq + zr) + \alpha_6 p + \beta_6 q + \gamma_6 r. \end{cases}$$

Freie Translationen treten entweder gar nicht auf oder es kommen blos p und q vor oder endlich alle drei: $p,\ q,\ r$.

Im Falle (C) bekommen wir ohne Weiteres die Gruppen:

$$\text{(18)} \qquad zp,\ zq,\ xp,\ yp,\ xq,\ yq,\ zr$$

$$\text{(19)} \qquad \begin{cases} zp,\ zq,\ xp,\ yp,\ xq,\ yq,\ zr,\ p,\ q \\ zp,\ zq,\ xp,\ yp,\ xq,\ yq,\ zr,\ p,\ q,\ r, \end{cases}$$

von denen allerdings die erste den Punkt $x = y = z = 0$ stehen lässt.

Treten im Falle (D) gar keine Translationen auf, so führen wir $x + \alpha_4,\ y - \beta_4,\ z + \alpha_1$ bezüglich als neue $x,\ y,\ z$ ein, dann werden $\alpha_4,\ \beta_4,\ \alpha_1$ gleich Null und durch Combination erkennt man, dass alle $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ verschwinden. Wir finden so die Gruppe:

$$\text{(20)} \qquad zp,\ zq,\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq + c(xp + yq + zr),$$

die allerdings den Punkt: $x = y = z = 0$ stehen lässt.

Treten p und q auf, so erkennt man durch Combination, dass $\gamma_1 \ldots \gamma_5$ null sind; ist $c \neq 0$, so kann man durch Einführung eines neuen z auch $\gamma_6 = 0$ machen, ist $c = 0$, so kann γ_6 einen der beiden Werthe 0 oder 1 annehmen. Demnach haben wir die beiden Gruppen:

$$\text{(21)} \qquad \begin{cases} zp,\ zq,\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq + c(xp + yq + zr),\ p,\ q \\ zp,\ zq,\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq + r,\ p,\ q. \end{cases}$$

Hierzu kommt endlich noch, wenn $p,\ q$ und r alle auftreten, die Gruppe:

$$\text{(22)} \qquad zp,\ zq,\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq + c(xp + yq + zr),\ p,\ q,\ r.$$

Transformirt G die Punkte der unendlich fernen Ebene blos fünfgliedrig, so kann die zugehörige Gruppe $X_1 f \ldots X_m f$ eine der beiden Formen:

$$zp,\ zq,\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq + zr$$
$$zp,\ zq,\ xq,\ xp - yq,\ yp$$

erhalten (s. S. 117 unter III). Hieraus ergeben sich leicht für G selbst die Formen:

$$(23) \qquad \begin{cases} zp,\ zq,\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq + zr \\ zp,\ zq,\ xq,\ xp - yq,\ yp \end{cases}$$

$$(24) \qquad \begin{cases} zp,\ zq,\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq + zr,\ p,\ q \\ zp,\ zq,\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq + zr,\ p,\ q,\ r \\ zp,\ zq,\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ p,\ q \\ zp,\ zq,\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ p,\ q,\ r. \end{cases}$$

Damit sind alle projectiven Gruppen des Raumes $x,\ y,\ z$ gefunden, die eine Ebene, aber keinen Punkt invariant lassen, es giebt deren dreizehn Typen, die durch die Gruppen (6), (8), (19), (21), (22), (24) repräsentirt werden. Zwei dieser Typen enthalten je einen wesentlichen Parameter.

Nehmen wir an, wir hätten die im Vorstehenden an einigen Beispielen durchgeführte Rechnung für alle Fälle vollendet. Dann hätten wir allerdings alle projectiven Gruppen, die eine Ebene invariant lassen, aber unsre Aufgabe wäre damit noch nicht zum Abschluss gebracht. Die von uns aufgestellten Gruppen würden nämlich zwar innerhalb der allgemeinen linearen Gruppe (1) auf S. 237 lauter verschiedene Typen von Untergruppen repräsentiren, es müsste aber noch festgestellt werden, ob es unter ihnen nicht solche giebt, die innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe mit einander gleichberechtigt sind; derartige Gruppen würden dann natürlich innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe ein und denselben Typus repräsentiren, wir hätten daher von ihnen jedesmal nur eine zu berücksichtigen und die übrigen als überflüssig wegzulassen.

Sollen zwei Untergruppen der Gruppe (1), die innerhalb dieser Gruppe nicht gleichberechtigt sind, es doch innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe sein, so müssen sie offenbar ausser der unendlich fernen Ebene noch eine andre Ebene in Ruhe lassen. Um daher die überflüssigen unter den gefundenen Untergruppen der Gruppe (1) auszuscheiden, müssen wir diese Gruppen noch einzeln durchgehen und bei einer jeden untersuchen, ob sie etwa eine im Endlichen gelegene Ebene stehen lässt; die betreffende Ebene müssen wir durch eine projective Transformation ins Unendliche verlegen und dann zusehen, ob wir dadurch eine Untergruppe von (1) erhalten, die innerhalb dieser Gruppe mit einer der andern von uns gefundenen Untergruppen von (1) gleichberechtigt ist. Haben wir auf diese Weise alle überflüssigen

Untergruppen von (1) beseitigt, so können wir sagen, dass wir für jeden Typus solcher projectiver Gruppen, die eine Ebene invariant lassen, einen und nur einen Repräsentanten besitzen.

Es bleiben jetzt noch alle projectiven Gruppen zu bestimmen, die einen Punkt invariant lassen; die aber finden wir sofort aus denen, die eine Ebene invariant lassen, durch dualistische Umformung. Offenbar erhalten wir dabei nur aus den Untergruppen von (1), die keinen Punkt stehen lassen, neue Typen von projectiven Gruppen. Haben wir daher alle Untergruppen von (1) bestimmt, so kennen wir zugleich alle projectiven Gruppen, die einen Punkt invariant lassen, wenn wir nur zu den Gruppen (6), (8), (19), (21), (22), (24) noch die dualistischen hinzufügen.

Eine hierzu geeignete dualistische Transformation ist die auf S. 205 unter (13) angegebene, die durch das Polarsystem der Fläche zweiten Grades: $z - xy = 0$ bestimmt ist; diese Transformation führt nämlich die unendlich ferne Ebene in den unendlich fernen Punkt der Geraden: $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ über. Wenden wir sie auf die genannten Gruppen an, so erhalten wir die Gruppen:

$$(6') \quad \begin{cases} p,\ q,\ r,\ xp + 2yq + zr,\ yp,\ xq,\ xp - yq,\ xr,\ yr, \\ x(xp + yq + zr),\ y(xp + yq + zr) \\ p,\ q,\ r,\ xp,\ yp,\ xq,\ yq,\ xr,\ yr,\ zr,\ x(xp + yq + zr), \\ y(xp + yq + zr) \end{cases}$$

$$(8') \quad \begin{cases} r,\ xr,\ yr,\ p - 2y(xp + yq + zr),\ xp - yq, \\ q - 2x(xp + yq + zr) \\ r,\ xr,\ yr,\ zr,\ p - 2y(xp + yq + zr),\ xp - yq, \\ q - 2x(xp + yq + zr) \end{cases}$$

$$(19') \quad \begin{cases} xr,\ yr,\ xp,\ yp,\ xq,\ yq,\ zr,\ x(xp + yq + zr), \\ y(xp + yq + zr) \\ r,\ xr,\ yr,\ xp,\ yp,\ xq,\ yq,\ zr,\ x(xp + yq + zr), \\ y(xp + yq + zr) \end{cases}$$

$$(21') \quad \begin{cases} xr,\ yr,\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq - czr,\ x(xp + yq + zr), \\ y(xp + yq + zr) \\ xr,\ yr,\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq + r,\ x(xp + yq + zr), \\ y(xp + yq + zr) \end{cases}$$

$$(22') \quad \begin{cases} r,\ xr,\ yr,\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq - czr,\ x(xp + yq + zr), \\ y(xp + yq + zr) \end{cases}$$

$$(24') \begin{cases} xr,\ yr,\ xq,\ xp-yq,\ yp,\ zr,\ x(xp+yq+zr),\ y(xp+yq+zr) \\ r,\ xr,\ yr,\ xq,\ xp-yq,\ yp,\ zr,\ x(xp+yq+zr),\ y(xp+yq+zr) \\ xr,\ yr,\ xq,\ xp-yq,\ yp,\ x(xp+yq+zr),\ y(xp+yq+zr) \\ r,\ xr,\ yr,\ xq,\ xp-yq,\ yp,\ x(xp+yq+zr),\ y(xp+yq+zr). \end{cases}$$

Es sind das die Repräsentanten aller Typen von projectiven Gruppen, bei denen ein Punkt, aber keine Ebene invariant bleibt.

Die Gruppen (8′) lassen den Cylinder: $4xy - 1 = 0$ invariant, sie erhalten eine etwas einfachere Form, wenn man: $y - \frac{1}{2}x^2 = 0$ zum invarianten Cylinder wählt (vgl. S. 192).

§ 59.

Die projectiven Gruppen des Raumes, die eine Gerade invariant lassen.

Jede der ∞^4 Geraden des Raumes gestattet eine elfgliedrige projective Gruppe; verlegen wir die Gerade durch eine projective Transformation derart, dass sie in die Axe des Ebenenbüschels: $z = \text{const.}$ übergeht, so erhält die zugehörige elfgliedrige projective Gruppe die Gestalt:

$$(25) \quad p,\ q,\ r,\ xp,\ yp,\ zp,\ xq,\ yq,\ zq,\ zr,\ z(xp+yq+zr).$$

Es handelt sich also jetzt darum, die Untergruppen der Gruppe (25) zu bestimmen.

Statt die Untergruppen der Gruppe (25) selbst zu bestimmen, suchen wir zunächst die Untergruppen einer gewissen gleichzusammengesetzten Gruppe des vierfach ausgedehnten Raumes R_4. Zu dieser Gruppe des R_4 gelangen wir folgendermassen:

Die Gerade des Raumes x, y, z kann auch als ein ausgearteter linearer Complex dieses Raumes aufgefasst werden, denn die ∞^3 Geraden, die eine feste Gerade schneiden. bilden einen ausgearteten linearen Complex. Zum Beispiel stellt die Gleichung:

$$(26) \qquad dz + \lambda(x\,dy - y\,dx) = 0$$

so lange $\lambda \neq 0$ ist, einen nicht ausgearteten Complex dar, ist aber $\lambda = 0$, so stellt sie den ausgearteten Complex aller Geraden dar, welche die Axe des Ebenenbüschels: $z = \text{const.}$ treffen. Dem entsprechend geht die zehngliedrige projective Gruppe des linearen Complexes (26) (vgl. S. 125) für $\lambda = 0$ in eine zehngliedrige Gruppe:

$$(27) \quad \begin{cases} p,\ q,\ r,\ xq,\ xp-yq,\ yp,\ xp+yq+2zr,\ zp,\ zq, \\ z(xp+yq+zr) \end{cases}$$

über, die in der Gruppe (25) als invariante Untergruppe enthalten ist.

Nun ist die zehngliedrige Gruppe eines nicht ausgearteten linearen Complexes nach S. 140 gleichzusammengesetzt mit der Gruppe aller conformen Transformationen des Raumes x, y, z, diese letztere Gruppe aber ist ihrerseits gleichzusammengesetzt mit der projectiven Gruppe einer nicht ausgearteten Fläche zweiten Grades im R_4 oder, was auf dasselbe hinauskommt, mit der Gruppe der nichteuklidischen Bewegungen des R_4; wir werden später auf diesen Zusammenhang zurückkommen (in Kap. 18). Demnach ist auch die Gruppe eines nicht ausgearteten Complexes im R_3 gleichzusammengesetzt mit der Gruppe der nichteuklidischen Bewegungen im R_4. Es liegt daher recht nahe zu vermuthen, dass die Gruppe (27) als Ausartung der Gruppe des linearen Complexes mit der Gruppe der Euklidischen Bewegungen im R_4 gleichzusammengesetzt ist, denn diese letztere Gruppe ist ja eine Ausartung der Gruppe der nichteuklidischen Bewegungen. Die Gruppe (25) selbst wird dann gleichzusammengesetzt sein mit der Gruppe der Euklidischen Bewegungen und der Aehnlichkeitstransformationen im R_4.

In der That verhält es sich so. Die Gruppe der Euklidischen Bewegungen und der Aehnlichkeitstransformationen im R_4 besteht aus allen projectiven Transformationen des R_4, bei denen die unendlich ferne ebene dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit M_3 des R_4 und in dieser M_3 eine nicht ausgeartete Fläche zweiten Grades in Ruhe bleibt. Sind x_1, x_2, x_3, x_4 rechtwinklige Coordinaten des R_4, ist ferner $t = 0$ die Gleichung der unendlich fernen ebenen M_3 und sind endlich:

$$t = 0, \quad x_1 x_2 - x_3 x_4 = 0 \tag{28}$$

die Gleichungen der invarianten Fläche zweiten Grades in dieser M_3, so hat die genannte Gruppe des R_4 die folgende Gestalt*):

$$\left\{\begin{array}{cc} p_1, p_2, p_3, p_4, & x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 = U \\ x_4 p_1 + x_2 p_3 = S_1, & x_3 p_1 + x_2 p_4 = T_1 \\ x_1 p_1 - x_2 p_2 + x_3 p_3 - x_4 p_4 = S_2, & x_1 p_1 - x_2 p_2 - x_3 p_3 + x_4 p_4 = T_2 \\ x_3 p_2 + x_1 p_4 = S_3, & x_4 p_2 + x_1 p_3 = T_3. \end{array}\right. \tag{29}$$

*) In Bd. 5 der Math. Annalen hat Lie gezeigt, dass die allgemeine projective Gruppe des dreifach ausgedehnten Raumes mit der Gruppe aller Berührungstransformationen, die Krümmungslinien in Krümmungslinien überführen, isomorph ist; gleichzeitig bemerkte er, dass die zuerst genannte Gruppe mit der Gruppe aller conformen Transformationen des vierfach ausgedehnten Raumes gleichzusammengesetzt ist. Er zeigte ferner, dass die grösste projective Gruppe des R_3, die eine Gerade invariant lässt, mit der Gruppe aller Aehnlichkeitstransformationen des R_4 gleichzusammengesetzt ist. In Bd. 10 des norwegischen Archivs führte er sodann die Bestimmung aller projectiven Gruppen des R_3, die eine Gerade invariant lassen, auf die Bestimmung aller Gruppen von Aehnlichkeitstransformationen des R_4 zurück.

Diese Gruppe ist wirklich mit der Gruppe (25) gleichzusammengesetzt. Man erkennt das sofort, wenn man die infinitesimalen Transformationen beider Gruppen einander in der Weise zuordnet, wie es die nachstehende Tabelle angiebt:

$$(30)\quad \begin{cases} S_1 \equiv xq, & S_2 \equiv yq - xp, & S_3 \equiv yp \\ T_1 \equiv r, & T_2 \equiv xp + yq + 2zr, & T_3 \equiv -z(xp + yq + zr) \\ p_1 \equiv q, & p_2 \equiv -zp, \quad p_3 \equiv -zq, & p_4 \equiv p \\ & U \equiv xp + yq. & \end{cases}$$

Die Beziehung zwischen beiden Gruppen wird noch klarer, wenn man Folgendes beachtet: Die Transformationen: S_1, S_2, S_3 lassen die ∞^1 Erzeugenden:

$$(31)\quad t = 0, \quad \lambda x_1 - \mu x_3 = 0, \quad \mu x_2 - \lambda x_4 = 0$$

der Fläche (28) invariant — bei den ihnen entsprechenden Transformationen der Gruppe (25) bleiben alle Ebenen des Büschels: $z = \text{const.}$ in Ruhe. Andrerseits lassen die Transformationen: T_1, T_2, T_3 alle ∞^1 Erzeugenden:

$$(32)\quad t = 0, \quad \lambda x_1 - \mu x_4 = 0, \quad \mu x_2 - \lambda x_3 = 0$$

der Fläche (28) stehen — die entsprechenden Transformationen von (25) halten alle Punkte auf der Axe des Ebenenbüschels: $z = \text{const.}$ fest. Endlich bleiben bei den Transformationen: p_1, p_2, p_3, p_4, U alle Punkte der unendlich fernen ebenen M_3, also auch alle Erzeugenden der Fläche (28) in Ruhe — die entsprechenden Transformationen von (25) halten alle Ebenen $z = \text{const.}$ und alle Punkte auf der Axe dieses Ebenenbüschels fest.

Wir sehen hieraus, dass den ∞^1 Ebenen durch die Gerade, die bei der Gruppe (25) invariant bleibt, die ∞^1 Erzeugenden (31) der Fläche (28) zugeordnet sind, und den ∞^1 Punkten der genannten Geraden die ∞^1 Erzeugenden (32) der Fläche (28).

Den Zusammenhang zwischen den beiden Gruppen (25) und (29) wollen wir zunächst benutzen, um eine dualistische Transformation des Raumes x, y, z aufzustellen, bei der die Gruppe (25) invariant bleibt.

Bei der Transformation:

$$(33)\quad x_1' = x_1, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = x_4, \quad x_4' = x_3$$

bleibt nämlich die Fläche (28) invariant, es werden aber ihre beiden Schaaren von Erzeugenden mit einander vertauscht; zu gleicher Zeit bleibt die Gruppe (29) invariant, es werden aber ihre infinitesimalen Transformationen unter einander vertauscht. Im Raume x, y, z entspricht nun der Transformation (33) eine gewisse Transformation, bei der die Ebenen: $z = \text{const.}$ mit den Punkten ihrer Axe vertauscht

werden. Diese Transformation erhalten wir, wenn wir die infinitesimalen Transformationen der Gruppe (25) einander so zuordnen, wie die entsprechenden infinitesimalen Transformationen (29) einander durch die Transformation (33) zugeordnet werden. Auf diese Weise bekommen wir für die gesuchte Transformation des Raumes x, y, z die Gleichungen:

$$x'q' = r, \quad y'q' - x'p' = xp + yq + 2zr$$
$$r' = xq, \quad x'p' + y'q' + 2z'r' = yq - xp$$

und die Transformation selbst wird:

$$(34) \qquad \begin{cases} x' = \frac{r}{q}, & y' = \frac{xp + yq + zr}{q}, & z' = -\frac{p}{q} \\ p' = -zq, & q' = q, & r' = xq. \end{cases}$$

Sie ist eine homogene Berührungstransformation, die aus der Gleichung:

$$(35) \qquad y' - y + xz' - x'z = 0$$

abgeleitet ist (vgl. Abschn. II, Theor. 15, S. 150). Da nun die Gleichung (35) augenscheinlich einen linearen Complex bestimmt, so ist die Transformation (34) offenbar nichts andres als die dualistische Transformation, die zu diesem linearen Complexe gehört.

Damit ist wirklich eine dualistische Transformation des Raumes x, y, z gefunden, bei der die Gruppe (25) invariant bleibt.

Wir gehen jetzt dazu über, die Untergruppen der G_{11} (29) zu bestimmen; haben wir die gefunden, so können wir vermöge der Tabelle (30) sofort alle Untergruppen von (25) hinschreiben.

Wesentlich erleichtert wird uns die Untersuchung der G_{11} (29) dadurch, dass die infinitesimalen Transformationen:

$$(36) \qquad S_1, S_2, S_3, T_1, T_2, T_3, U$$

eine siebengliedrige Untergruppe G_7 von (29) erzeugen, die mit der Gruppe:

$$(37) \qquad p, xp, x^2p, q, yq, y^2q, r$$

gleichzusammengesetzt ist, denn von dieser letzteren Gruppe haben wir auf S. 207 ff. alle Untergruppen bestimmt. Allerdings betrachteten wir damals in der Gruppe (37) x und y als gleichberechtigt, aber das schadet nichts, denn es kommt auf dasselbe hinaus, als wenn wir die beiden Schaaren von Erzeugenden der Fläche (28) als gleichberechtigt ansehen, und das wieder ist gleichbedeutend mit der Ausführung der dualistischen Transformation (34).

Zur Bestimmung aller Untergruppen der G_{11} (29) führen uns nun ähnliche Betrachtungen wie auf S. 211 und auf S. 237 f. Wir können uns daher kurz fassen.

Jede Untergruppe g der G_{11} enthält erstens gewisse etwa m unabhängige infinitesimale Transformationen:

$$X_k f + \alpha_{k1} p_1 + \alpha_{k2} p_2 + \alpha_{k3} p_3 + \alpha_{k4} p_4 \quad (k = 1 \ldots m),$$

wo $X_1 f \ldots X_m f$ eine m-gliedrige Untergruppe der G_7 (36) erzeugen, und zweitens gewisse freie Translationen:

$$\beta_{j1} p_1 + \beta_{j2} p_2 + \beta_{j3} p_3 + \beta_{j4} p_4 \quad (j = 1 \ldots \nu),$$

die für sich genommen eine invariante Untergruppe von g erzeugen. Dabei können wir voraussetzen, dass die Gruppe: $X_1 f \ldots X_m f$ eine der Normalformen besitzt, die in der Tabelle auf S. 209 f. verzeichnet sind.

Um zu entscheiden, was für freie Translationen in g auftreten können, muss man untersuchen, was für ebene Mannigfaltigkeiten die Gruppe: $X_1 f \ldots X_m f$ auf der unendlich fernen ebenen M_3 des R_4 invariant lässt. Jeder solchen Mannigfaltigkeit entspricht eine gewisse Gruppe von Translationen, die von den freien Translationen der Gruppe g erzeugt sein kann. Man braucht aber in vielen Fällen nicht alle die betreffenden Mannigfaltigkeiten zu berücksichtigen, denn es kann in der Gruppe (36) Transformationen geben, bei denen die Gruppe: $X_1 f \ldots X_m f$ invariant bleibt, während die bewussten Mannigfaltigkeiten unter einander vertauscht werden; überdies ist nicht zu vergessen, dass die beiden Schaaren von Erzeugenden der F_2 (28) als gleichberechtigt betrachtet werden.

Hat man unter den verschiedenen Gruppen von freien Translationen, die in g auftreten können, eine gewählt, etwa die Gruppe γ, so muss man noch alle Gruppen g bestimmen, die gerade die Translationen von γ frei enthalten. Durch Combination findet man zunächst, dass gewisse von den Constanten α_{k1}, α_{k2}, α_{k3}, α_{k4} verschwinden; die noch übrig bleibenden kann man wenigstens zum Theil durch geeignete Transformationen der G_{11} (29) wegschaffen, man darf aber dabei nur solche Transformationen der G_{11} benutzen, bei denen sowohl die Gruppe γ als die $(m+4)$-gliedrige Gruppe:

$$X_1 f \ldots X_m f, \; p_1 \ldots p_4$$

invariant bleibt.

Jetzt wollen wir noch in einer Tabelle für jede der verschiedenen Normalformen der Gruppe: $X_1 f \ldots X_m f$ angeben, welche freien Translationen auftreten können. Wir geben dabei jedesmal an, wie die Gruppe: $X_1 f \ldots X_m f$ die F_2 (28) transformirt.

I. *Die F_2 wird sechsgliedrig transformirt:*

$$S_1, S_2, S_3, T_1, T_2, T_3; \quad S_1, S_2, S_3, T_1, T_2, T_3, U;$$

freie Translationen: keine; alle.

II. *Die F_2 fünfgliedrig*, eine Erzeugende der einen Schaar bleibt fest:

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ T_1,\ T_2 + aU;\quad S_1,\ S_2,\ S_3,\ T_1,\ T_2,\ U;$$

freie Translationen: keine; $p_1,\ p_4$; alle.

III. *Die F_2 viergliedrig:*

A) Eine doppeltzählende Erzeugende der einen Schaar bleibt fest:

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ T_1;\quad S_1,\ S_2,\ S_3,\ T_1 + U;\quad S_1,\ S_2,\ S_3,\ T_1,\ U;$$

freie Translationen: keine; $p_1,\ p_4$; alle.

B) Zwei Erzeugende der einen Schaar fest:

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\quad T_2 + aU;\quad S_1,\ S_2,\ S_3,\ T_2,\ U;$$

Translationen: keine; $p_1,\ p_4$; alle.

C) Von jeder Schaar eine Erzeugende:

$$S_1,\ S_2 + aU,\ T_1,\ T_2 + bU;\quad S_1,\ S_2,\ T_1,\ T_2,\ U;$$

Translationen: keine; p_1; $p_1,\ p_4$; $p_1,\ p_3,\ p_4$; alle.

IV. *Die F_2 dreigliedrig:*

A) Alle Erzeugenden der einen Schaar:

$$S_1,\ S_2,\ S_3;\quad S_1,\ S_2,\ S_3,\ U.$$

Translationen: keine; $p_1,\ p_4$; alle.

B) Eine Erzeugende der einen, eine doppeltzählende der andern Schaar:

$$S_1,\ S_2 + aU,\ T_1;\quad S_1,\ S_2 + aU,\ T_1 + U;\ S_1,\ S_2,\ T_1,\ U;$$

Translationen: keine; p_1; $p_1,\ p_3$; $p_1,\ p_4$; $p_1,\ p_3,\ p_4$; alle.

C) Eine Erzeugende der einen, zwei der andern Schaar:

$$S_1,\ S_2 + aU,\quad T_2 + bU;\quad S_1,\ S_2,\ T_2,\ U;$$

Translationen: keine; p_1; $p_1,\ p_4$; $p_1,\ p_3$; $p_1,\ p_3,\ p_4$; alle.

D) Von jeder Schaar eine Erzeugende:

$$S_1,\ S_2 + cT_2 + aU,\quad T_1\ (c \neq 0);\quad S_1,\ S_2 + cT_2,\ T_1,\ U\ (c \neq 0);$$

Translationen: keine; p_1; $p_1,\ p_4$; $p_1,\ p_3,\ p_4$; alle. Ist $c = 1$, so bleiben noch ∞^1 Tangenten der F_2 in Ruhe; es können daher auch die Translationen: $p_1,\ p_3 + p_4$ frei auftreten.

E) Ein Punkt ausserhalb der Fläche nebst seiner Polarebene:

$$S_1 + T_1,\ S_2 + T_2,\ S_3 + T_3;\quad S_1 + T_1,\ S_2 + T_2,\ S_3 + T_3,\ U;$$

Translationen: keine; $p_3 - p_4$; $p_1,\ p_2,\ p_3 + p_4$; alle.

V. *Die F_2 zweigliedrig.*

A) Von der einen Schaar eine, von der andern alle Erzeugende:

$$S_1,\ S_2 + aU;\quad S_1,\ S_2,\ U;$$

Translationen: keine; p_1; $p_1,\ p_3$; $p_1 p_4$; $p_1,\ p_3,\ p_4$; alle.

B) Von der einen Schaar eine Erzeugende, von der andern eine doppeltzählende:

$$S_1,\ S_2 + T_1 + aU;\quad S_1,\ S_2 + T_1,\ U;$$

Translationen: keine; p_1; p_1, p_3; p_1, p_4; p_1, p_3, p_4; alle.

C) Von der einen Schaar eine Erzeugende, von der andern zwei:

$$S_1,\ S_2 + cT_2 + a\,U\ (c \neq 0);\quad S_1,\ S_2 + cT_2,\ U\ (c \neq 0);$$

Translationen: keine; p_1; p_1, p_3; p_1, p_4; p_1, p_3, p_4; alle; ist $c = 1$, so kommt noch der Fall: $p_1, p_3 + p_4$ hinzu.

D) Von jeder Schaar eine Erzeugende und in der hierdurch bestimmten Tangentialebene noch ein Punkt ausserhalb der F_2:

$$S_1 + T_1,\ S_2 + T_2 + aU;\quad S_1 + T_1,\ S_2 + T_2,\ U;$$

Translationen: keine; p_1; $p_3 - p_4$; $p_1, p_3 + \lambda p_4$; p_1, p_3, p_4; $p_1, p_2, p_3 + p_4$; alle.

E) Von jeder Schaar eine doppeltzählende Erzeugende:

$$S_1,\ T_1;\quad S_1,\ T_1 + U;\quad S_1 + U,\ T_1 + U;\quad S_1,\ T_1,\ U;$$

Translationen: keine; p_1; p_1, p_3; $p_1, p_3 + p_4$; p_1, p_3, p_4; alle.

F) Von der einen Schaar eine doppeltzählende, von der andern zwei:

$$S_1,\ T_2 + aU;\quad S_1 + U,\ T_2 + aU;\quad S_1,\ T_2,\ U;$$

Translationen: keine; p_1; p_1, p_3; p_1, p_4; p_1, p_3, p_4; alle.

G) Von jeder Schaar zwei:

$$S_2 + aU,\ T_2 + bU;\quad S_2,\ T_2,\ U;$$

Translationen: keine; p_1; p_1, p_2; p_1, p_4; p_1, p_3, p_4; alle.

VI. *Die F_2 eingliedrig:*

A) Von der einen Schaar eine doppeltzählende Erzeugende, von der andern alle:

$$S_1;\quad S_1 + U;\quad S_1,\ U;$$

Translationen: keine; p_1; p_1, p_3; p_1, p_4; $p_1, p_3 + p_4$; p_1, p_3, p_4; alle.

B) Von jeder Schaar eine doppeltzählende:

$$S_1 + T_1;\quad S_1 + T_1 + U;\quad S_1 + T_1,\ U;$$

Translationen: keine; p_1; $p_3 - p_4$; $p_1, p_3 + \lambda p_4$; p_1, p_3, p_4; $p_1, p_2, p_3 + p_4$; alle.

C) Von der einen Schaar eine doppelt zählende, von der andern zwei:

$$S_1 + T_2 + aU;\quad S_1 + T_2,\ U;$$

Translationen: keine; p_1; p_1, p_3; p_1, p_4; p_1, p_3, p_4; alle.

D) Von der einen Schaar zwei, von der andern alle:

$$S_2 + aU;\ S_2,\ U;$$

Translationen: keine; p_1; p_1, p_2; p_1, p_3; p_1, p_4; p_1, p_3, p_4; alle.

E) Von jeder Schaar zwei:

$$S_2 + cT_2 + aU\ (c \neq 0);\ S_2 + cT_2,\ U\ (c \neq 0);$$

Translationen: keine; p_1; p_1, p_2; p_1, p_4; p_1, p_3, p_4; alle. Ist $c = 1$, so kommt noch der Fall: $p_1, p_3 + p_4$ hinzu.

VII. *Die F_2 nullgliedrig:*

Die Gruppe: $X_1 f \ldots X_m f$ hat hier entweder die Form U oder sie schrumpft auf die identische Transformation zusammen.

Freie Translationen: keine; p_1; $p_3 - p_4$; p_1, p_4; $p_1, p_3 + p_4$; p_1, p_2; p_1, p_3, p_4; $p_1, p_2, p_3 + p_4$; alle.

Hiermit ist alles soweit vorbereitet, dass man durch ziemlich einfache Rechnungen alle Untergruppen der G_{11} (29) auf Normalformen bringen kann. Hat man das gethan, so findet man vermöge der Tabelle (30) auf S. 249 sogleich Normalformen für die Untergruppen der Gruppe (25). Doch darf man nicht vergessen, dass bei der Bestimmung aller Untergruppen von (29) die beiden Schaaren von Erzeugenden der Fläche als gleichberechtigt angesehen worden sind, man muss daher zu den Untergruppen von (25), die man erhält, noch die dualistischen hinzufügen, am besten mit Benutzung der dualistischen Transformation (34). Uebrigens ist es keineswegs nöthig, zu allen Untergruppen von (25) die dualistischen hinzuzufügen, in einer Anzahl von Fällen liefert die dualistische Transformation (34) keine neuen Gruppen.

Auf diese Weise findet man Normalformen für alle Untergruppen der Gruppe (25) und damit Repräsentanten für alle Typen solcher projectiver Gruppen des Raumes x, y, z, die eine Gerade invariant lassen. Aber man erhält im Allgemeinen für jeden solchen Typus mehrere Repräsentanten. Die Gruppen, die man findet, sind nämlich zwar innerhalb der Gruppe (25) nicht mit einander gleichberechtigt, aber es kann unter ihnen solche geben, die innerhalb der fünfzehngliedrigen allgemeinen projectiven Gruppe mit einander gleichberechtigt sind. Man hat daher bei jeder einzelnen der gefundenen Gruppen zu untersuchen, ob sie ausser der Axe des Ebenenbüschels: $z = \text{const.}$ noch eine andre Gerade invariant lässt. Thut sie das nicht, so ist ist sie innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe mit keiner andern der gefundenen Gruppen gleichberechtigt; thut sie es, so führt man

die betreffende Gerade durch eine projective Transformation in die Axe des Ebenenbüschels: $z =$ const. über und erkennt dann leicht, ob die Untergruppe durch geeignete Wahl dieser Transformation in eine andre der gefundenen Untergruppen verwandelt werden kann.

Wir haben nunmehr gezeigt, wie man alle projectiven Gruppen finden kann, die eine Gerade invariant lassen und sogar die Mittel angegeben, um für jeden Typus von solchen Gruppen einen und nur einen Repräsentanten zu erhalten. Die wirkliche Durchführung der erforderlichen Rechnungen unterlassen wir und begnügen uns damit, alle projectiven Gruppen aufzustellen, die zwar eine Gerade, aber weder eine Ebene noch einen Punkt in Ruhe lassen.

Soll eine Untergruppe von (25) keinen Punkt und auch keine Ebene invariant lassen, so darf die ihr entsprechende Untergruppe von (29) jedenfalls keine Erzeugende der E_2 (28) invariant lassen, es kommen daher nur die beiden Fälle: I und IV, E in Betracht.

Im ersten Falle enthält die betreffende Untergruppe jedenfalls sechs infinitesimale Transformationen von der Form:

$$S_i + \alpha_{i1} p_1 + \cdots + \alpha_{i4} p_4, \quad T_i + \beta_{i1} p_1 + \cdots + \beta_{i4} p_4 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

und ausserdem möglicherweise noch eine von der Form:

$$U + \alpha_1 p_1 + \cdots + \alpha_4 p_4.$$

Freie Translationen treten entweder gar keine auf oder alle.

Kommen alle Translationen frei vor, so haben wir die beiden Gruppen:

$$(38) \qquad \begin{cases} S_1, S_2, S_3, T_1, T_2, T_3, p_1, p_2, p_3, p_4 \\ S_1, S_2, S_3, T_1, T_2, T_3, U, p_1, p_2, p_3, p_4. \end{cases}$$

Kommt keine freie Translation vor und tritt $U + \cdots$ nicht auf, so macht man $\alpha_{21} \ldots \alpha_{24}$ durch Einführung neuer $x_1 \ldots x_4$ gleich Null und erkennt sodann durch Combination, dass alle α und β verschwinden; tritt die Transformation $U + \cdots$ auf, so bringt man sie zuerst durch Einführung neuer $x_1 \ldots x_4$ auf die Form U und findet nachher durch Combination, dass alle α und β null werden. Das giebt die beiden Gruppen:

$$(39) \qquad \begin{cases} S_1, S_2, S_3, T_1, T_2, T_3 \\ S_1, S_2, S_3, T_1, T_2, T_3, U. \end{cases}$$

Im zweiten Falle enthält die betreffende Untergruppe von (29) jedenfalls drei Transformationen von der Form:

$$S_i + T_i + \alpha_{i1} p_1 + \cdots + \alpha_{i4} p_4 \quad (i = 1, 2, 3),$$

wozu noch eine von der Form:

$$U + \alpha_1 p_1 + \cdots + \alpha_4 p_4$$

treten kann. Freie Translationen kommen nach S. 252 entweder nicht vor oder es kommt $p_3 - p_4$ vor oder p_1, p_2, $p_3 + p_4$ oder endlich alle: p_1, p_2, p_3, p_4.

Tritt $U + \cdots$ auf, so bekommen wir ohne Weiteres die Gruppen:

$$(40) \quad \begin{cases} S_1 + T_1,\ S_2 + T_2,\ S_3 + T_3,\ U \\ S_1 + T_1,\ S_2 + T_2,\ S_3 + T_3,\ U,\ p_3 - p_4 \\ S_1 + T_1,\ S_2 + T_2,\ S_3 + T_3,\ U,\ p_1, p_2, p_3 + p_4 \\ S_1 + T_1,\ S_2 + T_2,\ S_3 + T_3,\ U,\ p_1, p_2, p_3, p_4. \end{cases}$$

Tritt $U + \cdots$ nicht auf, so ist eine kleine Rechnung nöthig.

Es gebe zunächst keine freien Translationen. Durch Einführung neuer x_1 und x_2 macht man α_{21} und α_{22} gleich Null. Combinirt man dann $S_1 + T_1 + \cdots$ und $S_3 + T_3 + \cdots$ mit $S_2 + T_2 + \cdots$, so kommt:

$$2(S_1 + T_1) + 2\alpha_{11} p_1 - 2\alpha_{12} p_2 - (\alpha_{23} + \alpha_{24}) p_1$$
$$2(S_3 + T_3) - 2\alpha_{31} p_1 + 2\alpha_{32} p_2 + (\alpha_{23} + \alpha_{24}) p_2,$$

also ergiebt sich:

$$\alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{14} = \alpha_{31} = \alpha_{33} = \alpha_{34} = 0, \quad \alpha_{23} + \alpha_{24} = 0.$$

Ferner wird:

$$(S_1 + T_1 + \alpha_{11} p_1,\ S_3 + T_3 + \alpha_{32} p_2) = -(S_2 + T_2) + (\alpha_{11} - \alpha_{32})(p_3 + p_4),$$

demnach muss $\alpha_{23} = \alpha_{24} = 0$ sein und $\alpha_{11} = \alpha_{32}$. Durch Einführung eines neuen x_4 wird endlich α_{11} und damit auch $\alpha_{32} = 0$ und wir finden die Gruppe:

$$(41) \qquad S_1 + T_1,\ S_2 + T_2,\ S_3 + T_3.$$

In den übrigen Fällen ergeben sich auf genau dieselbe Weise die Gruppen:

$$(42) \quad \begin{cases} S_1 + T_1,\ S_2 + T_2,\ S_3 + T_3,\ p_3 - p_4 \\ S_1 + T_1,\ S_2 + T_2,\ S_3 + T_3,\ p_1, p_2, p_3 + p_4 \\ S_1 + T_1,\ S_2 + T_2,\ S_3 + T_3,\ p_1, p_2, p_3, p_4. \end{cases}$$

Damit sind alle Untergruppen der G_{11} (29) gefunden, die keine Erzeugende der Fläche (28) in Ruhe lassen.

Die Untergruppen von (25), die den Gruppen (38) bis (42) entsprechen, lauten folgendermassen:

$$(43)\quad \begin{cases} xq,\ xp-yq,\ yp,\ r,\ xp+yq+2zr,\ z(xp+yq+zr) \\ xq,\ xp-yq,\ yp,\ r,\ xp+yq+2zr,\ z(xp+yq+zr),\ xp+yq \\ xq,\ xp-yq,\ yp,\ r,\ xp+yq+2zr,\ z(xp+yq+zr),\ p,\ q,\ zp,\ zq \\ xq+r,\ yq+zr,\ yp-z(xp+yq+zr) \\ xq+r,\ yq+zr,\ yp-z(xp+yq+zr),\ xp+yq \\ xq+r,\ yq+zr,\ yp-z(xp+yq+zr),\ p+zq \\ xq+r,\ yq+zr,\ yp-z(xp+yq+zr),\ xp+yq,\ p+zq \\ xq+r,\ yq+zr,\ yp-z(xp+yq+zr),\ q,\ zp,\ p-zq \\ xq+r,\ yq+zr,\ yp-z(xp+yq+zr),\ xp+yq,\ q,\ zp,\ p-zq \\ xq+r,\ yq+zr,\ yp-z(xp+yq+zr),\ p,\ q,\ zp,\ zq \\ xq+r,\ yq+zr,\ yp-z(xp+yq+zr),\ xp+yq,\ p,\ q,\ zp,\ zq. \end{cases}$$

Es sind das zusammen mit der Gruppe (25) selbst die Repräsentanten aller Typen von projectiven Gruppen, bei denen eine Gerade, aber weder ein Punkt noch eine Ebene invariant bleibt.

Zum Schlusse wollen wir noch alle invarianten Untergruppen der Gruppe (29) bestimmen, um die invarianten Untergruppen von (25) angeben zu können.

Die Gruppe (29) lässt auf der unendlich fernen ebenen M_3 keine ebene Mannigfaltigkeit invariant, jede ihrer invarianten Untergruppen enthält daher entweder alle Translationen $p_1 \ldots p_4$ oder gar keine. Enthielte sie gar keine, so hätten alle ihre infinitesimalen Transformationen die Form:

$$\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \alpha_3 S_3 + \beta_1 T_1 + \beta_2 T_2 + \beta_3 T_3 + \sum_1^4{}^i \gamma_i p_i,$$

wo die α, β nicht alle verschwinden dürften, durch Combination mit $p_1 \ldots p_4$ käme man aber sofort auf einen Widerspruch; also muss sie alle Translationen enthalten.

Die Translationen $p_1 \ldots p_4$ erzeugen, für sich genommen, schon eine invariante Untergruppe von (29). Umfasst nun eine invariante Untergruppe von (29) ausser $p_1 \ldots p_4$ noch andre infinitesimale Transformationen, so kann man die stets so wählen, dass sie eine invariante Untergruppe der G_7 (36) erzeugen, die invarianten Untergruppen dieser G_7 können wir aber nach S. 210 sofort hinschreiben. Demnach ergiebt sich, dass unsre G_{11} (29) die folgenden invarianten Untergruppen enthält:

$$(44)\quad \begin{cases} p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4;\ p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ U \\ p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ S_1,\ S_2,\ S_3;\ p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ S_1,\ S_2,\ S_3,\ U \\ p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ T_1,\ T_2,\ T_3;\ p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ T_1,\ T_2,\ T_3,\ U \\ p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ S_1,\ S_2,\ S_3,\ T_1,\ T_2,\ T_3. \end{cases}$$

Damit sind auch die invarianten Untergruppen von (25) gefunden, wir brauchen sie aber wohl nicht erst hinzuschreiben.

Die Methoden zur Bestimmung aller projectiven Gruppen des Raumes x, y, z, die entweder einen Punkt oder eine Gerade oder eine Ebene invariant lassen, sind hiermit zur Genüge besprochen. Wir machen zum Schlusse nochmals darauf aufmerksam, dass die Entwickelungen des gegenwärtigen und des vorhergehenden Paragraphen eine wirksame Prüfung der Rechnungsergebnisse ermöglichen, andrerseits aber ergänzen sie auch einander. In § 58 haben wir ja alle projectiven Gruppen bestimmt, die einen Punkt oder eine Ebene, aber keine Gerade invariant lassen — diese Gruppen mussten uns natürlich in dem gegenwärtigen Paragraphen entgehen. Dagegen konnten die Gruppen, bei denen eine Gerade, aber kein Punkt und auch keine Ebene invariant bleibt, in § 58 nicht mit berücksichtigt werden — sie sind dafür in dem gegenwärtigen aufgestellt.

Hat man alle projectiven Gruppen des Raumes x, y, z bestimmt, so kann man ohne Schwierigkeit auch alle linearen homogenen Gruppen in vier Veränderlichen finden; man braucht zu diesem Zwecke nur die in Kapitel 6 entwickelten Methoden anzuwenden.

§ 60.

Die einzige primitive projective Gruppe des Raumes x, y, z, deren Untergruppen wir noch nicht näher untersucht haben, ist die zehngliedrige projective Gruppe eines nicht ausgearteten linearen Complexes*). Wir wollen in aller Kürze angeben, wie man ihre Untergruppen leicht finden kann.

Wird der lineare Complex durch die Gleichung:

$$dz + x\,dy - y\,dx = 0 \tag{45}$$

dargestellt, so lautet nach S. 125 seine zehngliedrige projective Gruppe folgendermassen:

$$\left\{\begin{array}{c} p - yr,\ q + xr,\ r \\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq + 2zr \\ zp - y(xp + yq + zr),\ zq + x(xp + yq + zr) \\ z(xp + yq + zr). \end{array}\right. \tag{46}$$

*) In seiner Dissertation (Archiv for Math. og Naturv. Bd. 15, 1892) hat Herr Knothe eine sorgfältige Bestimmung aller Untergruppen der genannten Gruppe geliefert. Die Methoden, die er dabei benutzt, rühren von Lie her, der Herrn Knothe die im Folgenden auseinandergesetzte Behandlung dieses Problems mitgetheilt hatte.

Wie entscheidet man nun, was für Typen von Untergruppen diese Gruppe (46) enthält und wie findet man für jeden Typus einen Repräsentanten?

Unter den primitiven projectiven Gruppen des Raumes x, y, z (s. S. 226 f.) giebt es offenbar keine, die in der Gruppe eines linearen Complexes enthalten sein kann, demnach ist jede Untergruppe von (46) imprimitiv und lässt daher nach S. 236 entweder eine gewundene Curve dritter Ordnung oder eine Gerade oder einen Punkt mit der hindurchgehenden Complexebene invariant.

Bleibt bei einer Untergruppe von (46) weder eine Gerade noch ein Punkt invariant, so ist sie nothwendig die dreigliedrige projective Gruppe einer gewundenen Curve dritter Ordnung. Diese Curve muss dem Complex angehören. Da nun bekanntlich jede der ∞^7 Curven dritter Ordnung des Complexes durch eine projective Transformation, die den Complex invariant lässt, in jede andre übergeführt werden kann, so sind die betreffenden dreigliedrigen Untergruppen von (46) alle innerhalb (46) mit einander gleichberechtigt und bilden nur einen Typus von Untergruppen. Zum Repräsentanten dieses Typus wählen wir die Gruppe:

$$(47) \qquad \begin{cases} p + 2xq - yr, \; xp + 2yq + 3zr \\ zq + x(xp + yq + zr) - \frac{2}{3}yp \end{cases}$$

bei der die dem Complexe (45) angehörige Curve dritter Ordnung:

$$(48) \qquad y = x^2, \quad z = -\frac{x^3}{3}$$

invariant bleibt (vgl. S. 186).

Lässt eine Untergruppe von (46) eine Gerade invariant, so ist das entweder eine Nichtcomplexgerade oder eine Complexgerade.

Die grösste Untergruppe von (46), bei der eine Nichtcomplexgerade invariant bleibt, ist sechsgliedrig und kann die Form:

$$(49) \qquad \begin{cases} xq, \; xp - yq, \; yp \\ r, \; xp + yq + 2zr, \; z(xp + yq + zr) \end{cases}$$

erhalten, wenn wir als invariante Gerade die Axe des Ebenenbüschels: $z =$ const. wählen. Die Gruppe (49) ist aber augenscheinlich mit der sechsgliedrigen projectiven Gruppe einer nicht ausgearteten Fläche zweiten Grades gleichzusammengesetzt, ihre Untergruppen können daher nach S. 203 f. sofort angegeben werden und es bleibt nur noch zu untersuchen, ob es unter den so erhaltenen Untergruppen von (49) solche giebt, die innerhalb (46) mit einander gleichberechtigt sind.

Die grösste Untergruppe von (46), bei der eine Complexgerade invariant bleibt, ist siebengliedrig und hat die Form:

$$(50)\qquad \begin{cases} p - yr,\ q + xr,\ xq,\ yq + zr \\ r,\ xp + zr,\ zq + x(xp + yq + zr), \end{cases}$$

wenn wir zur invarianten Complexgeraden die Axe des Ebenenbüschels: $x =$ const. wählen. Die Gruppe (50) nun ist gleichzusammengesetzt mit der siebengliedrigen Gruppe der Euklidischen Bewegungen und der Aehnlichkeitstransformationen (s. S. 211). Man erkennt das aus der Tabelle:

$$(51)\qquad \begin{cases} r \equiv p,\ q + xr \equiv -r,\ xq \equiv q \\ xp + zr \equiv xp - yq,\ yq + zr \equiv xp + yq + zr \\ p - yr \equiv 2zp + yr,\ zq + x(xp + yq + zr) \equiv -(2zq + xr) \end{cases}$$

in der beide Gruppen holoedrisch isomorph auf einander bezogen sind. Auf Grund der Entwickelungen auf S. 211 ff. können wir daher ohne Weiteres alle Untergruppen von (50) hinschreiben und es bleibt wieder nur zu untersuchen, ob gewisse unter den so erhaltenen Untergruppen von (50) innerhalb der Gruppe (46) mit einander gleichberechtigt sind.

Jetzt fehlen nur noch die Untergruppen von (46), die einen Punkt mit seiner Polarebene invariant lassen, aber keine Gerade.

Wählen wir zum invarianten Punkt den Pol der unendlich fernen Ebene in Bezug auf unsern Complex, so hat die grösste Untergruppe von (46), bei der unser Punkt invariant bleibt, die Form:

$$(52)\qquad \begin{cases} p - yr,\ q + xr,\ r, \\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq + 2zr. \end{cases}$$

Wir müssen daher noch alle Untergruppen von (52) bestimmen, die keine Gerade invariant lassen.

Die Gruppe (52) enthält eine eingliedrige invariante Untergruppe, nämlich r, die sechsgliedrige Gruppe:

$$(53)\qquad p,\ q,\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq$$

ist daher augenscheinlich meroedrisch isomorph mit ihr. Ueberdies erkennt man leicht, dass (53) aufgefasst als projective Gruppe einer Ebene x, y die unendlich fernen Punkte dieser Ebene genau so transformirt, wie (52) die ∞^1 Complexgeraden der unendlich fernen Ebene des Raumes x, y, z. Ferner erhält man aus jeder Untergruppe g von (52) durch Weglassung aller Glieder mit r eine verkürzte Gruppe γ, die mit g holoedrisch oder meroedrisch isomorph ist und die ihrerseits in der Gruppe (53) steckt. Sind g und g' zwei gleichberechtigte Untergruppen von (52), so sind offenbar die zugehörigen Gruppen γ und γ' innerhalb (53) mit einander gleichberechtigt.

Soll nun eine Untergruppe g von (52) keine Gerade invariant lassen, so darf sie jedenfalls keine Complexgerade der unendlich fernen Ebene festhalten, die zugehörige verkürzte Gruppe γ muss demnach, als Gruppe der Ebene x, y aufgefasst, die unendlich fernen Punkte dieser Ebene dreigliedrig transformiren. Daraus aber folgt (vgl. S. 95), dass γ durch geeignete Transformationen der Gruppe (53) eine der vier Formen:

$$(54)\qquad \begin{cases} xq,\ xp - yq,\ yp \\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq \\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ p,\ q \\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq,\ p,\ q \end{cases}$$

erhalten kann. Enthält daher g die Transformation r, so muss es auf eine der Formen:

$$(55)\qquad \begin{cases} xq,\ xp - yq,\ yp,\ r \\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq + 2zr,\ r \end{cases}$$

$$(55')\qquad \begin{cases} xq,\ xp - yq,\ yp,\ p - yr,\ q + xr,\ r \\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq + 2zr,\ p - yr,\ q + xr,\ r \end{cases}$$

gebracht werden können. Enthält es dagegen r nicht, so kann die zugehörige verkürzte Gruppe γ jedenfalls nicht die dritte oder vierte unter den Formen (54) haben, denn sonst enthielte g zwei Transformationen von der Form:

$$p - yr + \alpha r,\quad q + xr + \beta r$$

und durch Combination würde sich im Widerspruch mit der gemachten Voraussetzung die Transformation r ergeben. Hat aber γ eine der beiden ersten unter den Formen (54), so kann g, wie man leicht sieht, auf eine der beiden Formen:

$$xq,\ xp - yq,\ yp$$
$$xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq$$

gebracht werden, diese Gruppen lassen aber ebenso wie die Gruppen (55) die Gerade: $x = y = 0$ invariant, sie gehören also nicht hierher.

Wir sehen hieraus, dass jede Untergruppe von (46), die keine Gerade invariant lässt, innerhalb (46) entweder mit einer der zwei Gruppen (55′) oder mit der Gruppe (47) auf S. 259 gleichberechtigt ist.

Schliesslich wollen wir noch zeigen, dass jede Untergruppe der Gruppe eines linearen Complexes mit sich dualistisch ist.

Wird die Gleichung des linearen Complexes (45) in der Form:

$$(56)\qquad z' - z + xy' - yx' = 0$$

geschrieben, so bestimmt sie eine dualistische Transformation, die, als homogene Berührungstransformation dargestellt, folgendermassen lautet:

$$(57) \qquad \begin{cases} x' = \frac{q}{r}, \quad y' = -\frac{p}{r}, \quad z' = \frac{xp + yq + zr}{r} \\ p' = -yr, \quad q' = xr, \quad r' = r. \end{cases}$$

Da diese dualistische Transformation jede einzelne infinitesimale Transformation der Gruppe (46) invariant lässt, führt sie offenbar auch jede Untergruppe von (46) in sich über.

Hier mögen noch einige Bemerkungen folgen, die sich auf die Bestimmung der projectiven Gruppen des R_n beziehen.

Die grösste projective Gruppe des R_n, die eine ebene q-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit M_q invariant lässt, hat die Form:

$$(58) \qquad \begin{cases} P_1 \ldots P_{(n-q)(q+1)}, \quad U \\ S_1 \ldots S_{q(q+2)}, \quad T_1 \ldots T_{(n-q-1)(n-q+1)}. \end{cases}$$

Hier sind die P paarweise vertauschbar und erzeugen eine invariante Untergruppe, die S erzeugen eine Gruppe, die mit der allgemeinen projectiven Gruppe des R_q gleichzusammengesetzt ist, die T eine mit der allgemeinen projectiven Gruppe des R_{n-q-1} gleichzusammengesetzte, endlich ist jedes S mit jedem T, und U mit allen S und T vertauschbar. Kennt man nun alle projectiven Gruppen des R_q und des R_{n-q-1}, so kann man ähnlich wie in Kapitel 10 alle Untergruppen der Gruppe U, $S_1 \ldots$, $T_1 \ldots$ finden und dann durch solche Betrachtungen wie in § 59 alle Untergruppen von (58), also alle projectiven Gruppen des R_n, die eine ebene M_q invariant lassen.

Besonders einfach ist die Bestimmung aller *integrabeln**) projectiven Gruppen des R_n. Jede solche Gruppe lässt nämlich nach Abschn. I, S. 589 mindestens eine ebene M_{n-1} invariant und transformirt deren Punkte durch eine integrable projective Gruppe. Kennt man daher alle integrabeln projectiven Gruppen des R_{n-1}, so erfordert die Bestimmung aller derartigen Gruppen des R_n nur die Auflösung *linearer* Gleichungen.

Auch die Betrachtungen des § 55 lassen sich zur Bestimmung gewisser projectiver Gruppen des R_n verwerthen.

---

*) Integrabel nennen wir aus später anzuführenden Gründen jede Gruppe von der in Abschn. I auf S. 265 definirten Zusammensetzung.

Abtheilung IV.

Untersuchungen über verschiedene Arten von Gruppen des n-fach ausgedehnten Raumes.

Die endlichen continuirlichen Gruppen der Ebene haben wir in Abtheilung I sämmtlich aufgestellt. Von den endlichen continuirlichen Gruppen des gewöhnlichen Raumes haben wir in Abtheilung II eine grosse Zahl bestimmt, die Bestimmung aller ist nur deshalb unterblieben, weil sie zu viel Raum in Anspruch nehmen würde, nicht wegen besonderer Schwierigkeiten.

Anders ist es im Raume von beliebig vielen, also etwa von n Dimensionen. Wir haben vorläufig noch gar keine Aussicht, alle Gruppen dieses Raumes aufstellen zu können, ja nicht einmal alle primitiven Gruppen des n-fach ausgedehnten Raumes sind wir im Stande anzugeben. Wir begnügen uns deshalb hier mit einigen Untersuchungen über mehrere besondere Gruppen des R_n und zwar sind das lauter Gruppen, die uns schon in den Fällen: $n = 2$ und $n = 3$ begegnet sind und die aus den damals besprochenen Gruppen durch Verallgemeinerung auf den Raum von n Dimensionen erhalten werden.

Ein Kapitel — das letzte der Abtheilung — ist der Betrachtung reeller Gruppen gewidmet. Wir haben uns bisher die Veränderlichen und die Parameter einer Gruppe stets als complexe Grössen gedacht, in diesem Kapitel dagegen setzen wir voraus, dass die Veränderlichen und die Parameter auf das Gebiet der reellen Zahlen beschränkt sind. Wir verwenden dazu ein ganzes Kapitel, weil die Fragen, die sich bei der Beschränkung auf das Reelle darbieten, an und für sich äusserst anziehend sind, dann aber auch, weil wir in der nächsten Abtheilung, bei den Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie, gewisse Sätze über reelle Gruppen brauchen.

Kapitel 14.

Gruppen, die mit gewissen projectiven Gruppen gleichzusammengesetzt sind.

Wir suchen hier alle Gruppen in möglichst wenig Veränderlichen, die mit gewissen projectiven Gruppen des R_n gleichzusammengesetzt sind, nämlich entweder mit der allgemeinen projectiven Gruppe des R_n, oder mit der allgemeinen linearen oder endlich mit der speciellen linearen Gruppe dieses Raumes. Bei der allgemeinen projectiven Gruppe des R_n gehen wir noch einen Schritt weiter, indem wir auch alle mit ihr gleichzusammengesetzten Gruppen in $n+1$ Veränderlichen aufstellen.

Es liegt in der Natur der Sache, dass man in ähnlicher Weise viele andre Probleme dieser Art lösen kann.

§ 61.

Die allgemeine projective Gruppe des R_n enthält, wie wir wissen, gerade $n(n+2) = N$ Parameter, sie möge daher kurz G_N heissen.

Es sei nun $\mathfrak{G}_N$ eine mit G_N gleichzusammengesetzte Gruppe in m Veränderlichen $x_1 \dots x_m$ und die Zahl m sei so klein als möglich; dann ist m nothwendig gerade gleich n, denn wäre $m < n$, so enthielte $\mathfrak{G}_N$ Untergruppen mit mindestens $N - m > N - n$ Parametern, während es doch in G_N keine Untergruppe mit mehr als $N - n$ Parametern giebt (s. Abschn. I, S. 206, Satz 3 und Theor. 101, S. 569). Aus demselben Grunde ist klar, dass die Gruppe $\mathfrak{G}_N$ in den n Veränderlichen $x_1 \dots x_n$ transitiv sein muss.

Um die möglichen Formen der $\mathfrak{G}_N$ zu bestimmen, denken wir uns ihre infinitesimalen Transformationen in der Umgebung eines Punktes $x_1^0 \dots x_n^0$ von allgemeiner Lage nach Potenzen von $x_1 - x_1^0, \dots, x_n - x_n^0$ entwickelt.

Da die $\mathfrak{G}_N$ transitiv ist, enthält sie gerade $N - n = n(n+1)$ unabhängige infinitesimale Transformationen, die in den $x_\nu - x_\nu^0$ von der ersten oder von höherer Ordnung sind (s. Abschn. I, S. 217); diese infinitesimalen Transformationen erzeugen eine $n(n+1)$-gliedrige Untergruppe $\mathfrak{g}'$ der $\mathfrak{G}_N$, die mit der allgemeinen linearen Gruppe:

$$(1) \qquad p_k, \quad x_k p_\nu \qquad (k, \nu = 1 \dots n)$$

des R_n gleichzusammengesetzt ist (a. a. O. S. 205, Satz 2 und S. 569). Unter den infinitesimalen Transformationen der $\mathfrak{G}_N$ giebt es ferner möglicherweise gewisse von zweiter und höherer Ordnung in den $x_\nu - x_\nu^0$, die erzeugen dann eine Untergruppe $\mathfrak{g}''$ der $\mathfrak{G}_N$, die in $\mathfrak{g}'$

als invariante Untergruppe enthalten ist. In derselben Weise ist durch die etwa vorhandenen infinitesimalen Transformationen dritter und höherer Ordnung eine Untergruppe $\mathfrak{g}'''$ bestimmt, die sowohl in $\mathfrak{g}''$ als in $\mathfrak{g}'$ invariant ist u. s. w. Verstehen wir endlich unter s die höchste in $\mathfrak{G}_N$ vorkommende Ordnung einer infinitesimalen Transformation, so erzeugen auch alle infinitesimalen Transformationen s^{ter} Ordnung von $\mathfrak{G}_N$ eine gewisse Untergruppe $\mathfrak{g}^{(s)}$, die in jeder der Gruppen $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{g}'' \ldots \mathfrak{g}^{(s-1)}$ invariant ist.

Nun giebt es in der Umgebung des Punktes $x_1^0 \ldots x_n^0$ überhaupt nicht mehr als nn solche unabhängige infinitesimale Transformationen von erster Ordnung in den $x_\nu - x_\nu^0$, aus denen sich keine infinitesimale Transformation zweiter oder höherer Ordnung linear ableiten lässt, unsre Gruppe $\mathfrak{G}_N$ muss daher jedenfalls gewisse infinitesimale Transformationen von zweiter Ordnung in den $x_\nu - x_\nu^0$ enthalten. Hieraus folgt, dass die oben definirte Zahl $s > 1$ ist, zugleich ergiebt sich, dass die infinitesimalen Transformationen von $\mathfrak{g}^{(s)}$ paarweise vertauschbar sind (a. a. O. S. 264, Satz 9).

Andrerseits ist die Gruppe $\mathfrak{g}^{(s)}$ eine invariante Untergruppe der $\mathfrak{g}'$ und die $\mathfrak{g}'$ ist gleichzusammengesetzt mit der allgemeinen linearen Gruppe (1) des R_n; von dieser Gruppe (1) wissen wir aber (a. a. O. Theor. 99, S. 562), dass sie nur drei invariante Untergruppen enthält, nämlich diese:

$$(2) \qquad \begin{cases} p_1 \ldots p_n; \quad p_1 \ldots p_n, \quad \sum_1^n x_\tau p_\tau \\ p_k, \quad x_k p_\nu, \quad x_k p_k - x_\nu p_\nu \qquad (k, \nu = 1 \ldots n; \; k \neq \nu). \end{cases}$$

Da nun unter den Gruppen (2) blos eine aus lauter vertauschbaren Transformationen besteht und zwar die n-gliedrige: $p_1 \ldots p_n$, so können wir schliessen, dass $\mathfrak{g}^{(s)}$ n-gliedrig ist.

Wäre $s > 2$, so wären die infinitesimalen Transformationen von $\mathfrak{g}^{(s)}$ auch noch mit denen von $\mathfrak{g}^{(s-1)}$ vertauschbar, denn durch Combination einer infinitesimalen Transformation von $\mathfrak{g}^{(s)}$ mit einer von $\mathfrak{g}^{(s-1)}$ würden wir eine Transformation von mindestens $(2s-2)^{\text{ter}}$ Ordnung erhalten und die müsste wegen $2s - 2 > s$ identisch verschwinden; ausserdem aber müsste $\mathfrak{g}^{(s-1)}$ als eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{g}'$ mit einer der beiden noch übrigen unter den Gruppen (2) gleichzusammengesetzt sein. Da nun die Gruppe: $p_1 \ldots p_n$ zu keiner der beiden andern Gruppen (2) in der Beziehung steht, in der $\mathfrak{g}^{(s)}$ zu $\mathfrak{g}^{(s-1)}$ stehen müsste, so würden wir auf einen Widerspruch stossen, das heisst: s kann nicht grösser als 2, es muss vielmehr gerade $= 2$ sein.

Demnach enthält unsre Gruppe $\mathfrak{G}_N$ in der Umgebung des Punktes

$x_1^0 \ldots x_n^0$ von allgemeiner Lage nur infinitesimale Transformationen von nullter, von erster und von zweiter Ordnung und zwar n unabhängige von zweiter Ordnung und ferner nn unabhängige von erster Ordnung, aus denen sich keine von zweiter oder höherer Ordnung ableiten lässt. Wir können somit auf $\mathfrak{G}_N$ unmittelbar die Entwickelungen des Kap. 29 von Abschn. I (S. 625 u. 627—629) anwenden und bekommen so das

Theorem 13. *In weniger als n Veränderlichen giebt es keine Gruppen, die mit der allgemeinen projectiven Gruppe des R_n gleichzusammengesetzt sind; in n Veränderlichen sind alle Gruppen von dieser Zusammensetzung mit der allgemeinen projectiven Gruppe des R_n ähnlich.*

Wesentlich schneller gelangt man zur Bestimmung von $\mathfrak{G}_N$, wenn man sich auf das Theor. 81, S. 446 von Abschn. I stützt.

Man weiss ja, dass die allgemeine projective Gruppe des R_n nur zwei Typen von Untergruppen mit gerade $N - n$ Parametern enthält und dass als Repräsentanten dieser beiden Typen die beiden Gruppen:

$$p_k, \; x_k p_\nu \qquad (k, \nu = 1 \ldots n)$$

$$x_k p_\nu, \; x_k \sum_1^n x_\tau p_\tau \qquad (k, \nu = 1 \ldots n)$$

gewählt werden können (Abschn. I, Theor. 101, S. 569). Man weiss ferner, dass sich die allgemeine projective Gruppe des R_n derart holoedrisch isomorph auf sich beziehen lässt, dass die beiden genannten Gruppen einander entsprechen (a. a. O. Satz 4). Das vorhin angeführte Theorem 81 zeigt daher, dass alle transitiven Gruppen in n Veränderlichen, die mit der allgemeinen projectiven Gruppe des R_n gleiche Zusammensetzung haben, unter einander und also auch mit der allgemeinen projectiven Gruppe des R_n ähnlich sind.

§ 62.

Jetzt zur Bestimmung aller Gruppen, die mit der allgemeinen linearen Gruppe:

(1) $$p_k, \; x_k p_\nu \qquad (k, \nu = 1 \ldots n)$$

des R_n gleichzusammengesetzt sind und dabei möglichst wenige, also sicher nicht mehr als n Veränderliche enthalten.

Es lässt sich zeigen, dass die gesuchten Gruppen sämmtlich transitiv sind.

In der That, m sei eine Zahl von solcher Beschaffenheit, dass es in m Veränderlichen noch Gruppen giebt, die mit der Gruppe (1)

gleichzusammengesetzt sind, während in weniger als m Veränderlichen keine Gruppen dieser Art möglich sind. Wäre nun:

$$X_k f = \sum_1^m{}_\mu \xi_{k\mu}(x_1 \ldots x_m) \frac{\partial f}{\partial x_\mu} \quad (k = 1 \ldots n(n+1))$$

eine intransitive, mit (1) gleichzusammengesetzte Gruppe, so würde der Raum $x_1 \ldots x_m$ in ∞^l $(m-l)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten zerfallen, die bei der Gruppe: $X_1 f \ldots$ alle einzeln invariant blieben, und da die Gruppe (1) blos drei invariante Untergruppen enthält, so müsste die Gruppe: $X_1 f \ldots$ die Punkte jeder solchen $(m-l)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit durch eine holoedrisch isomorphe Gruppe transformiren (s. Abschn. I, S. 310, Satz 8), es gäbe also schon in $m - l < m$ Veränderlichen eine mit (1) gleichzusammengesetzte Gruppe; das aber würde unsrer Voraussetzung über die Zahl m widersprechen.

Da hiermit bewiesen ist, dass die gesuchten Gruppen alle transitiv sind, so können wir uns, um sie aufzustellen, auf das Kap. 22 des Abschn. I stützen, nur müssen wir vorher die grössten Untergruppen von (1) bestimmen, die weder in (1) selbst invariant sind, noch eine invariante Untergruppe von (1) enthalten.

Ist g eine der eben definirten Untergruppen von (1), so hat die Zahl der Parameter von g den Werth: $n(n+1) - m$, wo m sicher nicht grösser als n ist; ausserdem leuchtet ein, dass g nicht alle n Translationen: $p_1 \ldots p_n$ enthalten kann, denn die erzeugen ja eine invariante Untergruppe von (1). Wir können daher annehmen, dass g gerade $q < n$ und nicht mehr unabhängige infinitesimale Translationen enthält, und da alle q-gliedrigen Gruppen von Translationen innerhalb der allgemeinen linearen Gruppe (1) mit einander gleichberechtigt sind (s. Abschn. I, S. 558, Satz 1), so können wir insbesondere erreichen, dass g gerade die Translationen $p_1 \ldots p_q$ enthält.

Unter der gemachten Voraussetzung kommt in g jedenfalls keine der $(n-q)(q+1)$ unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

$$p_{q+\nu}, \quad x_1 p_{q+\nu}, \ldots, x_q p_{q+\nu} \quad (\nu = 1 \ldots n-q)$$

vor und ebensowenig eine daraus linear abgeleitete Transformation, weil sich sonst durch Combination mit $p_1 \ldots p_q$ eine der ausgeschlossenen Translationen ergeben würde. Demnach können wir schliessen, dass die Zahl m wenigstens so gross ist wie $(n-q)(q+1)$; andrerseits ist aber $m \leqq n$, folglich ergiebt sich:

$$(n-q)(q+1) \leqq m \leqq n$$

oder:

$$(n-q-1)q \leqq 0.$$

Wegen $q < n$ ist diese Bedingung nur für $q = 0$ und $q = n - 1$ erfüllt, demnach ist $m = n$, das heisst: die in Rede stehenden Untergruppen von (1) haben gerade $n(n+1) - n = nn$ Parameter, überdies ergiebt sich, dass sie entweder gar keine oder gerade $n - 1$ unabhängige infinitesimale Translationen enthalten. Für $n = 1$ fällt natürlich dieser Unterschied weg.

Enthält eine nn-gliedrige Untergruppe von (1) gar keine Translationen, so ist sie von nn unabhängigen infinitesimalen Transformationen von der Form:

$$(3) \qquad x_k p_\nu + \sum_1^n{}_\tau \alpha_{k\nu\tau} p_\tau \qquad (k, \nu = 1 \ldots n)$$

erzeugt, sie enthält also jedenfalls eine infinitesimale Transformation von der Gestalt:

$$\sum_1^n{}_\tau (x_\tau + \alpha_\tau) p_\tau .$$

Führen wir jedes $x_\tau + \alpha_\tau$ als neues x_τ ein, so bekommt die zuletztgenannte Transformation die einfache Form:

$$\sum_1^n{}_\tau x_\tau p_\tau ,$$

und combiniren wir die mit den Transformationen (3), so finden wir, dass alle $\alpha_{k\nu\tau}$ verschwinden. Wir erhalten also die Gruppe:

$$(4) \qquad x_k p_\nu \qquad (k, \nu = 1 \ldots n),$$

das ist die grösste Untergruppe von (1), die den Punkt $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ invariant lässt.

Enthält andrerseits eine nn-gliedrige Untergruppe von (1) die $n - 1$ Translationen: $p_1 \ldots p_{n-1}$, sonst aber keine Translationen, so kann in keiner ihrer infinitesimalen Transformationen ein Ausdruck von der Form:

$$\lambda_1 x_1 p_n + \cdots + \lambda_{n-1} x_{n-1} p_n$$

vorkommen, sonst würde sich ja durch Combination mit einer der Transformationen $p_1 \ldots p_{n-1}$ die ausgeschlossene Translation p_n ergeben; die betreffende Untergruppe ist in Folge dessen von nn unabhängigen infinitesimalen Transformationen von der Form:

$$p_\nu, \quad x_\nu p_k + \alpha_{\nu k} p_n, \quad x_n p_k + \alpha_k p_n, \quad x_n p_n + \alpha p_n \qquad (\nu, k = 1 \ldots n-1)$$

erzeugt (vgl. Abschn. I, S. 562). Führt man hier $x_n + \alpha$ als neues x_n ein und combinirt man darauf $x_n p_n$ mit den übrigen Transformationen, so erkennt man, dass die Untergruppe die einfache Form:

(5) $$p_\nu,\ x_\nu p_k,\ x_n p_k,\ x_n p_n \quad (\nu, k = 1 \ldots n-1)$$

erhalten hat. Augenscheinlich ist das die grösste Untergruppe von (1), bei der die $(n-1)$-fach ausgedehnte ebene Mannigfaltigkeit: $x_n = 0$ invariant bleibt.

Hiermit sind die oben definirten Untergruppen von (1) gefunden. Um das gewonnene Ergebniss festzuhalten, formuliren wir es in einem Satze:

Satz 1. *Wenn eine Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe:*

(1) $$p_\mu,\ x_\mu p_\nu \quad (\mu, \nu = 1 \ldots n)$$

des R_n keine Gruppe enthält, die in der allgemeinen linearen invariant ist, so hat sie höchstens nn Parameter; hat sie gerade nn Parameter, so ist sie innerhalb der allgemeinen linearen Gruppe entweder mit der Gruppe:

(4) $$x_\mu p_\nu \quad (\mu, \nu = 1 \ldots n)$$

oder mit der Gruppe:

(5) $$p_k,\ x_k p_j,\ x_n p_j,\ x_n p_n \quad (k, j = 1 \ldots n-1)$$

gleichberechtigt.

Ist $n = 1$, so fallen die beiden Gruppen (4) und (5) augenscheinlich zusammen, ist aber $n > 1$, so sind sie wesentlich von einander verschieden, denn die Gruppe (4) steckt, wie man sich leicht überzeugt, in keiner grössern Untergruppe von (1), während (5) in der $(nn + 1)$-gliedrigen Gruppe:

$$p_k,\ x_k p_j,\ x_n p_j,\ p_n,\ x_n p_n \quad (k, j = 1 \ldots n-1)$$

enthalten ist.

Nunmehr können wir ohne Weiteres die Entwickelungen des Kap. 22 von Abschn. I anwenden. Wir finden auf diese Weise, dass es in weniger als n Veränderlichen keine mit (1) gleichzusammengesetzte transitive Gruppe giebt und dass in n Veränderlichen blos zwei Typen von transitiven Gruppen mit dieser Zusammensetzung vorhanden sind. Der eine Typus ist durch die Untergruppe (4) bestimmt, er besteht aus lauter primitiven Gruppen und wird durch die Gruppe (1) selbst repräsentirt; der zweite durch die Untergruppe (5) bestimmte Typus besteht aus imprimitiven Gruppen (vgl. Abschn. I, Theor. 91, S. 521), auch für ihn können wir leicht einen Repräsentanten angeben, denn wir wissen, dass es im R_n eine imprimitive projective Gruppe giebt, die mit der allgemeinen linearen Gruppe (1) gleichzusammengesetzt ist (a. a. O. S. 569).

Schliesslich sprechen wir noch das Theorem aus:

Theorem 14. *In weniger als n Veränderlichen giebt es keine Gruppe, die mit der allgemeinen linearen Gruppe:*

(1) $$p_\mu,\ x_\mu p_\nu \quad (\mu, \nu = 1 \dots n)$$

des R_n gleichzusammengesetzt wäre; in n Veränderlichen giebt es blos zwei Typen von Gruppen mit dieser Zusammensetzung: Repräsentant des einen Typus ist die allgemeine lineare Gruppe (1) *selbst, als Repräsentant des andern Typus kann die imprimitive Gruppe:*

(6) $$\left\{ p_\nu,\ x_k p_\nu,\ x_n p_n,\ x_k \sum_1^n{}_\tau\, x_\tau p_\tau \right. \qquad (\nu = 1 \dots n;\ k = 1 \dots n-1)$$

dienen, die aus allen projectiven Transformationen des R_n besteht, bei denen ein gewisser unendlich ferner Punkt invariant bleibt. Ist $n = 1$, so fallen beide Typen zusammen.

§ 63.

Was wir im vorigen Paragraphen für die allgemeine lineare Gruppe des R_n geleistet haben, soll jetzt auch für die specielle lineare Gruppe:

(7) $$\left\{ p_\mu,\ x_\mu p_\nu,\ x_\mu p_\mu - x_\nu p_\nu \right. \qquad (\mu, \nu = 1 \dots n;\ \mu \neq \nu)$$

durchgeführt werden.

Da die Gruppe (7) ausser der Gruppe: $p_1 \dots p_n$ keine invariante Untergruppe enthält, so ergiebt sich zunächst genau wie auf S. 266 f., dass jede mit (7) gleichzusammengesetzte Gruppe in möglichst wenig Veränderlichen nothwendig transitiv ist. Um aber diese transitiven Gruppen aufstellen zu können, müssen wir offenbar zuerst alle Untergruppen von (7) bestimmen, die möglichst viele Parameter haben, jedoch nicht alle n Translationen: $p_1 \dots p_n$ enthalten.

Wie im vorigen Paragraphen sieht man ein, dass jede der eben definirten Untergruppen gerade $n^2 + n - 1 - n = n^2 - 1$ Parameter hat und dass sie entweder gar keine infinitesimalen Translationen enthält oder gerade $n - 1$ unabhängige, im letzteren Falle können wir annehmen, dass sie $p_1 \dots p_{n-1}$ enthält.

Kommen keine Translationen vor, so ist die betreffende Untergruppe von $n^2 - 1$ unabhängigen infinitesimalen Transformationen von der Form:

$$x_\mu p_\nu + \sum_1^n{}_\tau\, \alpha_{\mu\nu\tau} p_\tau,\ x_j p_j - x_n p_n + \sum_1^n \beta_{j\tau} p_\tau$$
$$(\mu, \nu = 1 \dots n;\ \mu \neq \nu;\ j = 1 \dots n-1)$$

erzeugt. Durch paarweise Combination der $n - 1$ letzten unter diesen Transformationen erkennt man, dass alle β_{jn} einander gleich sind und

dass alle übrigen $\beta_{j\tau}$ verschwinden mit Ausnahme der β_{jj}; führt man daher $x_j + \beta_{jj}$ als neues x_j und $x_n - \beta_{1n}$ als neues x_n ein, so erhält unsre Untergruppe die Form:

$$x_\mu p_\nu + \sum_1^n{}_\tau \alpha'_{\mu\nu\tau} p_\tau, \quad x_j p_j - x_n p_n$$
$$(\mu, \nu = 1 \ldots n; \ \mu \neq \nu; \ j = 1 \ldots n-1),$$

durch Anwendung der Klammeroperation ergiebt sich schliesslich, dass alle $\alpha'_{\mu\nu\tau}$ verschwinden.

Kommen die $n-1$ Translationen: $p_1 \ldots p_{n-1}$ vor, so enthält die betreffende Untergruppe ausserdem noch $n^2 - 1 - (n-1)$ unabhängige infinitesimale Transformationen von der Form:

$$x_j p_j - x_n p_n + \alpha_j p_n, \quad x_n p_j + \beta_j p_n$$
$$x_j p_k + \alpha_{jk} p_n$$
$$(j, k = 1 \ldots n-1; \ j \neq k);$$

führt man aber hier $x_n - \alpha_1$ als neues x_n ein und combinirt man dann $x_1 p_1 - x_n p_n$ mit den übrigen infinitesimalen Transformationen, so findet man, dass die Untergruppe die einfache Form:

$$p_j, \quad x_j p_j - x_n p_n, \quad x_n p_j, \quad x_j p_k$$
$$(j, k = 1 \ldots n-1; \ j \neq k)$$

erhält.

Damit haben wir den

Satz 2. *Wenn eine Untergruppe der speciellen linearen Gruppe:*

$$\left\{ p_\mu, \ x_\mu p_\nu, \ x_\mu p_\mu - x_\nu p_\nu \right. \quad (\mu, \nu = 1 \ldots n; \ \mu \neq \nu) \tag{7}$$

des R_n keine Gruppe enthält, die in der speciellen linearen invariant ist, so hat sie höchstens $nn-1$ Parameter; hat sie gerade $nn-1$ Parameter, so ist sie innerhalb der speciellen linearen Gruppe entweder mit der Gruppe:

$$x_\mu p_\nu, \quad x_\mu p_\mu - x_\nu p_\nu \quad (\mu, \nu = 1 \ldots n; \ \mu \neq \nu) \tag{8}$$

oder mit der Gruppe:

$$\left\{ p_j, \ x_j p_j - x_n p_n, \ x_n p_j, \ x_j p_k \right. \quad (j, k = 1 \ldots n-1; \ j \neq k) \tag{9}$$

gleichberechtigt.

Aehnlich wie im vorigen Paragraphen folgt hieraus das

Theorem 15. *In weniger als n Veränderlichen giebt es keine Gruppe, die mit der speciellen linearen Gruppe*

$$p_\mu, \ x_\mu p_\nu, \ x_\mu p_\mu - x_\nu p_\nu \quad (\mu, \nu = 1 \ldots n; \ \mu \neq \nu) \tag{7}$$

des R_n gleichzusammengesetzt wäre; in n Veränderlichen giebt es blos zwei Typen von Gruppen mit dieser Zusammensetzung:

Repräsentant des einen Typus ist die specielle lineare Gruppe (7) *selbst, als Repräsentant des andern Typus kann die imprimitive Gruppe:*

$$(10) \qquad \left\{ p_\nu,\ x_k p_\nu,\ x_k p_k + \sum_1^n{}_\tau\, x_\tau p_\tau,\ x_k \sum_1^n{}_\tau\, x_\tau p_\tau \right. \qquad \left. (\nu = 1 \ldots n;\ k = 1 \ldots n-1;\ \nu \neq k) \right.$$

dienen, es ist das die grösste invariante Untergruppe der allgemeinsten projectiven Gruppe des R_n, die einen gewissen unendlich fernen Punkt invariant lässt. Ist $n = 1$, so fallen beide Typen zusammen.

§ 64.

Jetzt haben wir noch alle Gruppen in $n + 1$ Veränderlichen zu bestimmen, die mit der allgemeinen projectiven Gruppe des R_n gleichzusammengesetzt sind.

Die intransitiven Gruppen von der verlangten Beschaffenheit anzugeben ist sehr leicht. Ist nämlich γ eine solche intransitive Gruppe, so denken wir uns die Veränderlichen $x_1 \ldots x_{n+1}$ so gewählt, dass die allgemeinste Invariante von γ eine willkürliche Function von $x_{m+1} \ldots x_{n+1}$ wird. Betrachten wir jetzt in γ die Veränderlichen $x_{m+1} \ldots x_{n+1}$ als constant, so erhalten wir eine transitive Gruppe γ' in den $m \leqq n$ Veränderlichen $x_1 \ldots x_m$, und da γ einfach ist, so muss diese Gruppe γ' mit γ holoedrisch isomorph sein (s. Abschn. I, S. 310, Satz 8); aus Theorem 13, S. 266 ergiebt sich daher, dass $m = n$ ist und dass γ' durch eine Punkttransformation in den n Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$ in die allgemeine projective Gruppe des R_n übergeführt werden kann. Damit ist aber zugleich bewiesen, dass γ selbst durch eine Punkttransformation des Raumes $x_1 \ldots x_{n+1}$ mit der Gruppe:

$$p_\mu,\ x_\mu p_\nu,\ x_\mu \sum_1^n{}_\tau\, x_\tau p_\tau \qquad (\mu, \nu = 1 \ldots n)$$

ähnlich ist.

Etwas grössere Vorbereitungen erfordert die Aufstellung aller transitiven Gruppen des R_{n+1}, die mit der allgemeinen projectiven Gruppe des R_n gleichzusammengesetzt sind. Um diese Aufstellung leisten zu können, müssen wir zuerst alle projectiven Gruppen des R_n bestimmen, die gerade $N - (n + 1) = n^2 + n - 1$ Parameter haben. Das soll jetzt geschehen.

Es empfiehlt sich, unter den gesuchten projectiven Gruppen des

R_n zunächst alle die aufzustellen, die in der allgemeinen linearen Gruppe:

(1) $$p_\mu,\ x_\mu p_\nu \quad (\mu, \nu = 1 \ldots n)$$

stecken.

Enthält eine (n^2+n-1)-gliedrige Untergruppe g von (1) keine infinitesimale Transformation von der Form:

(11) $$\sum_1^n{}^\tau x_\tau p_\tau + \sum_1^n{}^\nu \alpha_\nu p_\nu = U + \sum_1^n{}^\nu \alpha_\nu p_\nu,$$

so enthält sie sicher n^2+n-1 unabhängige infinitesimale Transformationen von der Gestalt:

$$p_\mu,\ x_\mu p_\nu + \alpha_{\mu\nu} U,\quad x_j p_j - x_n p_n + \beta_j U$$
$$(\mu, \nu = 1 \ldots n;\ \mu \neq \nu;\ j = 1 \ldots n-1),$$

durch Combination ergiebt sich aber sofort, dass alle $\alpha_{\mu\nu}$ und β_ν verschwinden, dass also g mit der speciellen linearen Gruppe:

(7) $$p_\mu,\ x_\mu p_\nu,\ x_\mu p_\mu - x_\nu p_\nu \quad (\mu, \nu = 1 \ldots n;\ \mu \neq \nu)$$

zusammenfällt.

Enthält andrerseits g eine Transformation von der Form (11), so führen wir $x_\tau + \alpha_\tau$ als neues x_τ ein und bekommen an Stelle von g eine Untergruppe g' von (1), die U enthält. Wäre nun $n = 1$, so bestände g' blos aus der Transformation:

(12) $$x_1 p_1;$$

wir können daher $n>1$ annehmen. Für $n>1$ ist auch $n^2+n-1>n^2$, g' enthält also sicher gewisse Translationen; enthielte es weniger als n unabhängige infinitesimale Translationen, so enthielte es nothwendig n^2 Transformationen von der Form:

$$x_\mu p_\nu + \sum_1^n{}^\tau \alpha_{\mu\nu\tau} p_\tau \quad (\mu, \nu = 1 \ldots n),$$

daraus würde sich aber durch Combination mit den vorhandenen Translationen ein Widerspruch ergeben, folglich kommen in g' ausser U auch noch alle n Translationen $p_1 \ldots p_n$ vor. Erinnern wir uns jetzt, dass g' (n^2+n-1)-gliedrig sein soll, so erkennen wir, dass g' mit der speciellen linearen homogenen Gruppe:

(8) $$x_\mu p_\nu,\ x_\mu p_\mu - x_\nu p_\nu \quad (\mu, \nu = 1 \ldots n;\ \mu \neq \nu)$$

gerade n^2-2 unabhängige infinitesimale Transformationen gemein hat, die natürlich eine (n^2-2)-gliedrige Untergruppe erzeugen; aber die eben erwähnte Gruppe (8) ist mit der allgemeinen projectiven Gruppe des R_{n-1} gleichzusammengesetzt und enthält daher keine Untergruppen mit mehr als $(n-1)(n+1)-(n-1) = n^2-n$ Parametern (s. Abschn.

I, S. 558 und 569), eine (n^2-2)-gliedrige Untergruppe enthält sie demnach nur dann, wenn $n=2$ ist. Wir sehen hieraus, dass eine Untergruppe g', die U und alle Translationen enthält, blos im Falle $n=2$ auftreten kann; da ferner die specielle lineare homogene Gruppe des R_2 blos einen Typus von (2^2-2)-gliedrigen Untergruppen enthält und da als Repräsentant dieses Typus die Gruppe: $x_1p_2,\ x_1p_1-x_2p_2$ gelten kann (s. S. 19 und Theor. 2, S. 17), so kann die im Falle $n=2$ auftretende Gruppe g' auf die Form:

$$p_1,\ p_2,\ x_1p_2,\ x_1p_1-x_2p_2,\ x_1p_1+x_2p_2 \tag{13}$$

gebracht werden; es ist das die grösste projective Gruppe des R_2, bei der die unendlich ferne Gerade und der unendlich ferne Punkt der Geraden: $x_1=0$ in Ruhe bleiben, also die projective Gruppe eines gewissen Linienelements der Ebene $x_1,\ x_2$ (vgl. S. 96).

Damit sind alle (n^2+n-1)-gliedrigen projectiven Gruppen des R_n gefunden, die der allgemeinen linearen Gruppe (1) angehören.

Wir erinnern ferner daran, dass die allgemeine projective Gruppe G_N des R_n derart holoedrisch isomorph auf sich selbst bezogen werden kann, dass den infinitesimalen Transformationen:

$$p_\mu,\ x_\mu p_\nu,\ U,\ x_\mu U$$

der Reihe nach die folgenden:

$$x_\mu U,\ -x_\nu p_\mu,\ -U,\ p_\mu$$

entsprechen (s. Abschn. I, S. 555). Denken wir uns die G_N in dieser Weise holoedrisch isomorph auf sich bezogen, so entsprechen den soeben aufgestellten Untergruppen der allgemeinen linearen Gruppe (1) gewisse (n^2+n-1)-gliedrige Untergruppen der Gruppe:

$$x_\mu p_\nu,\ x_\mu U \quad (\mu,\nu=1\dots n), \tag{14}$$

wir wollen auch diese Untergruppen noch bestimmen.

Der Gruppe (7) entspricht die grösste invariante Untergruppe von (14) nämlich:

$$\begin{cases} x_\mu p_\nu,\ x_\mu p_\mu - x_\nu p_\nu,\ x_\mu U \\ (\mu,\nu=1\dots n;\ \mu\neq\nu); \end{cases} \tag{15}$$

da nun (14) die grösste projective Gruppe des R_n ist, die den Punkt: $x_1=0,\ \dots,\ x_n=0$ invariant lässt, so ist klar, dass (15) durch eine projective Transformation des R_n in die früher erwähnte Gruppe:

$$\begin{cases} p_\nu,\ x_k p_\nu,\ x_k p_k + U,\ x_k U \\ (\nu=1\dots n;\ k=1\dots n-1;\ \nu\neq k) \end{cases} \tag{10}$$

übergeführt werden kann.

Der Gruppe (12) entspricht wieder die Gruppe (12). Der Gruppe (13) endlich entspricht die Gruppe:

$$(16) \qquad x_2 p_1,\ x_1 p_1,\ x_2 p_2,\ x_1(x_1 p_1 + x_2 p_2),\ x_2(x_1 p_1 + x_2 p_2),$$

also die grösste projective Gruppe der Ebene x_1, x_2, die den Punkt $x_1 = x_2 = 0$ und die Gerade: $x_2 = 0$ invariant lässt; es ist klar, dass diese Gruppe (16) mit der Gruppe (13) durch eine projective Transformation der Ebene x_1, x_2 ähnlich ist.

Fassen wir die gewonnenen Ergebnisse zusammen, so können wir sagen: ist eine $(n^2 + n - 1)$-gliedrige projective Gruppe des R_n in einer der beiden Gruppen: (1) oder (14) enthalten, so ist sie innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe des R_n mit einer der folgenden Gruppen gleichberechtigt: wenn $n > 2$ ist, entweder mit (7) oder mit (10), wenn $n = 2$ ist, entweder mit (7) oder mit (10) oder mit (13), wenn $n = 1$ ist, entweder mit (7) oder mit (12); für $n = 1$ fallen nämlich die beiden Gruppen (7) und (10) zusammen.

Nach diesen Vorbereitungen nehmen wir ganz allgemein die Aufgabe in Angriff, alle $(n^2 + n - 1)$-gliedrigen projectiven Gruppen des R_n zu bestimmen, und zwar theilen wir diese Gruppen in zwei Klassen: zur ersten Klasse rechnen wir alle, die eine nicht ausgeartete perspective Transformation enthalten, eine Transformation also, die innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe des R_n mit: $x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n$ gleichberechtigt ist, zur zweiten Klasse rechnen wir alle, die keine solche Transformation enthalten.

Wir suchen zuerst alle der ersten Klasse angehörigen Gruppen; ihre Bestimmung kommt offenbar hinaus auf die Bestimmung aller $(n^2 + n - 1)$-gliedrigen projectiven Gruppen, die U enthalten.

G sei eine solche Gruppe und:

$$S = \sum_{\mu}^{1\ldots n} \alpha_\mu p_\mu + \sum_{\mu\nu}^{1\ldots n} \beta_{\mu\nu} x_\mu p_\nu + \sum_{\mu}^{1\ldots n} \gamma_\mu x_\mu U$$

sei irgend eine infinitesimale Transformation von G; dann gehören auch die Transformationen:

$$(SU) = \sum_{1}^{n} {}^{\mu} \alpha_\mu p_\mu - \sum_{1}^{n} {}^{\mu} \gamma_\mu x_\mu U$$

$$((SU)U) = \sum_{1}^{n} {}^{\mu} \alpha_\mu p_\mu + \sum_{1}^{n} {}^{\mu} \gamma_\mu x_\mu U$$

der Gruppe G an, folglich lassen sich in G $n^2 + n - 1$ unabhängige infinitesimale Transformationen so auswählen, dass jede von ihnen eine der drei Formen:

$$\sum_{\mu}^{1\ldots n} \alpha_\mu p_\mu, \quad \sum_{\mu\nu}^{1\ldots n} \beta_{\mu\nu} x_\mu p_\nu, \quad \sum_{1}^{n} {}^{\mu} \gamma_\mu x_\mu U$$

besitzt.

Wir dürfen $n > 1$ voraussetzen, denn für $n = 1$ fällt G mit der schon oben erwähnten Gruppe: $x_1 p_1$ zusammen. Ist nun $n > 1$, so können unmöglich alle Transformationen von G die Form: $\Sigma \beta_{\mu\nu} x_\mu p_\nu$ besitzen, sondern es müssen auch noch Transformationen vorkommen, die eine der beiden andern Formen haben. Hiernach sind eine Reihe von Fällen zu unterscheiden, jenachdem G gar keine, einige oder alle Translationen, gar keine, einige oder alle Transformationen $\Sigma \gamma_\mu x_\mu U$ enthält; doch ist von vornherein zu bemerken, dass alle Translationen und alle Transformationen: $\Sigma \gamma_\mu x_\mu U$ niemals gleichzeitig auftreten können, sonst würde sich nämlich durch Combination ergeben, dass G mit der allgemeinen projectiven Gruppe selbst zusammenfiele.

Zwei von den möglichen Fällen sind schon erledigt, der nämlich, wo G keine Transformation von der Form: $\Sigma \gamma_\mu x_\mu U$ und der, wo es keine Translation enthält, im ersten Falle ist nämlich G eine Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe (1), im zweiten eine Untergruppe von (14).

Die Behandlung der noch übrigen Fälle wird dadurch wesentlich vereinfacht, dass jeder Gruppe G von der verlangten Beschaffenheit eine Gruppe G' von derselben Beschaffenheit entspricht, sobald man die allgemeine projective Gruppe des R_n in der auf S. 274 angegebenen Weise holoedrisch isomorph auf sich selbst bezieht. Wirklich zu untersuchen brauchen wir in Folge dessen nur den Fall, dass G gewisse, möglicherweise alle Transformationen: $\Sigma \gamma_\mu x_\mu U$ enthält und gewisse, aber nicht alle Translationen. Haben wir diesen Fall erledigt, so haben wir nur noch zu jeder gefundenen Gruppe G die entsprechende Gruppe G' hinzuzufügen.

In dem Falle, der noch zu untersuchen ist, wird G eine gewisse Anzahl, etwa q $(0 < q < n)$ unabhängige infinitesimale Translationen enthalten; wir können annehmen, dass $p_1 \ldots p_q$ diese Translationen sind. Hieraus folgt, dass in G keine infinitesimale Transformation vorkommt, die aus den $(n-q)(q+1)$ folgenden:

$$p_{q+j}, \; x_1 p_{q+j}, \ldots, x_q p_{q+j} \quad (j = 1 \ldots n-q)$$

linear ableitbar ist, da aber G $(n^2 + n - 1)$-gliedrig sein soll, ist das nur möglich, wenn:

$$(n-q)(q+1) \leqq n+1$$

oder:

$$q(n-q-1) \leqq 1.$$

Wegen $q < n$ wird hier die linke Seite nie negativ, also kommen nur zwei Möglichkeiten in Frage:

$$q(n-q-1) = 0, \quad q(n-q-1) = 1;$$

die erste ergiebt $q = n-1$, da q nicht verschwinden kann, die zweite liefert:

$$n = q + 1 + \frac{1}{q},$$

was nur angeht, wenn $q = 1$ und gleichzeitig $n = 3$.

Ist $q = 1$ und $n = 3$, so enthält G keine Transformation von der Form:

$$\alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \beta_2 x_1 p_2 + \beta_3 x_1 p_3,$$

es kann nicht einmal ein Glied von dieser Form in einer infinitesimalen Transformation von G additiv vorkommen, sonst würde man durch Combination mit p_1 oder mit U auf einen Widerspruch stossen. G kann demnach nur die Form haben:

$$(17) \qquad \begin{cases} p_1,\ x_1 p_1,\ x_2 p_1,\ x_3 p_1,\ x_2 p_2,\ x_3 p_2,\ x_2 p_3,\ x_3 p_3 \\ x_1 U,\ x_2 U,\ x_3 U. \end{cases}$$

Das ist wirklich eine Gruppe mit $3^2 + 3 - 1 = 11$ Parametern, nämlich die grösste projective Gruppe des Raumes x_1, x_2, x_3, bei der die Gerade: $x_2 = x_3 = 0$ invariant bleibt. Die elfgliedrige Gruppe G', die dieser Gruppe (14) entspricht, lässt ebenfalls eine Gerade invariant, sie ist daher mit (14) durch eine projective Transformation des R_3 ähnlich und braucht also nicht angegeben zu werden.

Ist andrerseits $q = n - 1$, so enthält G die infinitesimalen Transformationen: $p_1 \ldots p_{n-1}$, U, dagegen keine Transformation von der Form:

$$\alpha p_n + \sum_1^{n-1 j} \beta_j x_j p_n,$$

ja nicht einmal eine mit einem additiven Gliede von dieser Form führen wir daher:

$$\frac{x_1}{x_n}, \ldots \frac{x_{n-1}}{x_n}, \quad \frac{1}{x_n}$$

an Stelle von $x_1 \ldots x_n$ als neue Veränderliche ein, so verwandelt sich G in eine Gruppe $\bar{G}$, die keine Transformation enthält mit einem additiven Gliede von der Form:

$$-\alpha x_n U - \sum_1^{n-1 j} \beta_j x_j U$$

(vgl. Abschn. I, S. 566 f.), also in eine Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe (1). Alle (n^2+n-1)-gliedrigen Untergruppen von (1)

kennen wir aber schon, also liefert dieser Fall nichts neues; auch die G entsprechende Gruppe G' ist mit einer der schon aufgestellten Gruppen durch eine projective Transformation des R_n ähnlich.

Nunmehr sind alle (n^2+n-1)-gliedrigen projectiven Gruppen gefunden, die unsrer ersten Klasse (s. S. 275) angehören, es fehlen also nur noch die der zweiten Klasse, die keine mit U gleichberechtigte infinitesimale Transformation enthalten. $\mathfrak{G}$ sei eine dieser Gruppen.

Wir wollen zunächst annehmen, dass $\mathfrak{G}$ auch keine Translation enthält. Da U sicher nicht vorkommt, wird $\mathfrak{G}$ in diesem Falle n^2+n-1 unabhängige infinitesimale Transformationen von der Form:

$$x_\mu p_\nu + \alpha_{\mu\nu} U + \sum_1^n{}_\tau \beta_{\mu\nu\tau} p_\tau$$

$$x_j p_j - x_n p_n + \alpha_j U + \sum_1^n{}_\tau \beta_{j\tau} p_\tau$$

$$x_\nu U + \gamma_\nu U + \sum_1^n{}_\tau \gamma_{\nu\tau} p_\tau$$

$$(\mu,\ \nu = 1 \ldots n;\ \mu \neq \nu;\ j = 1 \ldots n-1)$$

enthalten. Hier sind vor allen Dingen die $\alpha_{\mu\nu}$ und α_j sämmtlich gleich Null, wovon man sich durch Combination leicht überzeugen kann. Ferner lässt sich genau wie auf S. 270 erreichen, dass alle $\beta_{\mu\nu\tau}$ und $\beta_{j\tau}$ null werden, dabei erhält $\mathfrak{G}$ die Form:

$$x_\mu p_\nu,\quad x_\mu p_\mu - x_\nu p_\nu$$

$$S_\nu = x_\nu U + \gamma'_\nu U + \sum_1^n{}_\tau \gamma'_{\nu\tau} p_\tau$$

$$(\mu,\ \nu = 1 \ldots n;\ \mu \neq \nu).$$

Nun ist:

$$(x_\mu p_\nu,\ S_\nu) = x_\mu U - \gamma'_{\nu\mu} p_\nu$$

$$(x_\nu p_\mu,\ x_\mu U - \gamma'_{\nu\mu} p_\nu) = x_\nu U + \gamma'_{\nu\mu} p_\mu$$

und endlich:

$$(x_\mu U - \gamma'_{\nu\mu} p_\nu,\ x_\nu U + \gamma'_{\nu\mu} p_\mu) = -\gamma'_{\nu\mu}(2U + x_\mu p_\mu + x_\nu p_\nu),$$

wäre daher $\gamma'_{\nu\mu} \neq 0$, so würde $\mathfrak{G}$ die Transformation: $2U + x_\mu p_\mu + x_\nu p_\nu$ enthalten und in Folge dessen auch U selbst, was ausgeschlossen ist. Demnach ist $\gamma'_{\nu\mu} = 0$ und $\mathfrak{G}$ ist eine Untergruppe der Gruppe (14), von der aber kennen wir bereits alle (n^2+n-1)-gliedrigen Untergruppen, wir finden also hier nichts neues.

Zu bemerken ist, dass die vorstehenden Betrachtungen nur für $n > 1$ anwendbar sind, das schadet aber auch nichts, da wir ja bereits in Kap. 2 alle projectiven Gruppen in einer Veränderlichen bestimmt

haben. Ferner ist zu bemerken, dass die vorstehenden Betrachtungen zugleich den Fall erledigen, dass $\mathfrak{G}$ keine Transformationen von der Form: $\Sigma \gamma_\mu x_\mu U$ enthält.

Jetzt brauchen wir nur noch einen Fall zu untersuchen, den nämlich, dass $\mathfrak{G}$ gewisse, ja möglicherweise alle Transformationen: $\Sigma \gamma_\mu x_\mu U$ enthält und gewisse, aber nicht alle Translationen. Die Möglichkeit des Auftretens aller Translationen lässt sich offenbar auf diesen Fall zurückführen.

$\mathfrak{G}$ enthalte also q $(0 < q < n)$ unabhängige infinitesimale Translationen, etwa $p_1 \dots p_q$. Da U nicht vorkommen darf und ebensowenig eine mit U gleichberechtigte Transformation, so enthält $\mathfrak{G}$ keine infinitesimale Transformation, die sich aus den $(n-q)(q+1)+1$ nachstehenden:

$$U,\ p_{q+j},\ x_1 p_{q+j}, \dots, x_q p_{q+j} \quad (j = 1 \dots n-q)$$

linear ableiten lässt. Andrerseits ist aber $\mathfrak{G}$ (n^2+n-1)-gliedrig, also ergiebt sich:

$$(n-q)(q+1)+1 \leq n+1$$

oder: $q(n-q-1) \leq 0$ und somit: $q = n-1$. Da $x_n p_n + \alpha p_n$ eine nicht ausgeartete perspective Transformation ist, darf $\mathfrak{G}$ auch keine Transformation von der Form: $x_n p_n + \alpha p_n$ enthalten, also überhaupt keine infinitesimale Transformation, die aus den $n+1$:

$$x_n p_n,\ p_n,\ x_1 p_n, \dots x_{n-1} p_n$$

linear abgeleitet werden kann. Führen wir daher:

$$\frac{x_1}{x_n}, \dots \frac{x_{n-1}}{x_n}, \quad \frac{1}{x_n}$$

an Stelle von $x_1 \dots x_n$ als neue Veränderliche ein, so verwandelt sich $\mathfrak{G}$ in eine Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$, die keine Transformation von der Form:

$$\lambda U + \sum_1^n{}_\nu \gamma_\tau x_\tau U$$

enthält; die Gruppen von dieser Beschaffenheit haben wir aber bereits oben erledigt. Demnach ergiebt sich auch hier nichts Neues.

Damit sind alle (n^2+n-1)-gliedrigen projectiven Gruppen des R_n gefunden:

Theorem 16. *Die allgemeine projective Gruppe des R_n enthält, sobald $n > 3$ ist, nur zwei Typen von (n^2+n-1)-gliedrigen Untergruppen; Repräsentant des einen Typus ist die specielle lineare Gruppe:*

$$(7) \qquad \begin{cases} p_\mu,\ x_\mu p_\nu,\ x_\mu p_\mu - x_\nu p_\nu \\ (\mu, \nu = 1 \dots n;\ \mu \neq \nu), \end{cases}$$

Repräsentant des andern Typus die Gruppe:

$$(10)\qquad \left\{ p_v,\ x_k p_v,\ x_k p_k + \sum_1^n{}' x_\tau p_\tau,\ x_k \sum_1^n x_\tau p_\tau \right.$$
$$\left. (v = 1 \ldots n;\ k = 1 \ldots n-1;\ v \neq k), \right.$$

überdies kann die allgemeine projective Gruppe des R_n derart holoedrisch isomorph auf sich selbst bezogen werden, dass jeder Untergruppe vom ersten Typus eindeutig umkehrbar eine vom zweiten Typus entspricht. Ist $n = 3$, so kommt zu den beiden genannten Typen von $(n^2 + n - 1)$-gliedrigen Untergruppen noch ein dritter hinzu, der durch die Gruppe:

$$(17)\qquad \left\{ \begin{array}{l} p_1,\ x_1 p_1,\ x_2 p_1,\ x_3 p_1,\ x_2 p_2,\ x_3 p_2,\ x_2 p_3,\ x_3 p_3 \\ x_1 \sum_1^3 x_\tau p_\tau,\quad x_2 \sum_1^3 x_\tau p_\tau,\quad x_3 \sum_1^3 x_\tau p_\tau \end{array} \right.$$

repräsentirt wird. Ist $n = 2$, so kommt ebenfalls ein dritter Typus hinzu, dessen Repräsentant die Gruppe:

$$(13)\qquad p_1,\ p_2,\ x_1 p_1,\ x_1 p_2,\ x_2 p_2$$

ist. Für $n = 1$ endlich fallen die beiden zuerst genannten Typen zusammen, es tritt aber dafür noch ein Typus auf, der durch die Gruppe

$$(12)\qquad x_1 p_1$$

repräsentirt wird.

Jetzt sind wir soweit, dass wir in $n + 1$ Veränderlichen auch alle transitiven Gruppen angeben können, die mit der N-gliedrigen allgemeinen projectiven Gruppe des R_n gleichzusammengesetzt sind; wir stützen uns dabei auf das Kapitel 22 von Abschnitt I.

Die beiden Typen von Untergruppen, die durch (7) und (10) repräsentirt werden, liefern nur einen Typus von N-gliedrigen transitiven Gruppen in $n + 1$ Veränderlichen und zwar sind die Gruppen dieses Typus alle *systatisch*, da die Gruppe (7) in der allgemeinen linearen (1) invariant ist (s. Abschn. I, S. 520, Satz 9). Repräsentirt wird der betreffende Typus durch die specielle lineare homogene Gruppe:

$$(18)\qquad x_\mu p_\nu,\ x_\mu p_\mu - x_\nu p_\nu \quad (\mu, \nu = 1 \ldots n+1;\ \mu \neq \nu)$$

in $n + 1$ Veränderlichen.

Die Gruppe (17) ist die grösste projective Gruppe des R_3, bei der eine gewisse Gerade dieses Raumes invariant bleibt, sie ist in keiner grösseren Untergruppe der allgemeinen projectiven Gruppe G_{15} des R_3 enthalten und liefert daher in vier Veränderlichen einen Typus von *primitiven* mit dieser G_{15} gleichzusammengesetzten Gruppen (s. a. a. O.

Theor. 91, S. 521). Um einen Repräsentanten für den betreffenden Typus zu erhalten, denken wir uns die ∞^4 Geraden des R_3 auf die Punkte eines R_4 abgebildet und sodann die Gruppe dieses R_4 aufgestellt, die angiebt, in welcher Weise die ∞^4 Geraden des R_3 bei der G_{15} unter einander vertauscht werden. Wir finden auf diese Weise als Repräsentanten unsers Typus die fünfzehngliedrige Gruppe:

$$(19) \qquad \begin{cases} p_\mu, \; x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \quad \sum_1^4{}^\tau x_\tau p_\tau \\ 2x_\mu \sum_1^4{}^\tau x_\tau p_\tau - p_\mu \sum_1^4{}^\tau x_\tau{}^2 \end{cases} \qquad (\mu, \nu = 1 \ldots 4)$$

aller conformen Transformationen des R_4. In der That, es ist bekannt, dass die ∞^5 linearen Complexe des R_3 einen ebenen fünffach ausgedehnten R_5 bilden, in dem die ∞^4 Geraden des R_3 durch eine nicht ausgeartete Mannigfaltigkeit zweiten Grades F_2 dargestellt werden. Ferner weiss man aus einer Bemerkung von F. Klein, dass die ∞^5 linearen Complexe des R_3 bei der allgemeinen projectiven Gruppe G_{15} dieses Raumes gerade so transformirt werden, wie die Punkte des R_5 bei der grössten projectiven Gruppe Γ_{15} dieses Raumes, die jene F_2 invariant lässt. Demnach transformirt die G_{15} die ∞^4 Geraden des R_3 gerade so, wie die Γ_{15} die ∞^4 Punkte der bewussten F_2 transformirt, die Γ_{15} aber transformirt ihrerseits die ∞^4 Punkte der F_2, wenn man die Coordinaten dieser Punkte in geeigneter Weise wählt, durch die Gruppe aller conformen Transformationen des R_4.

Die Gruppe (13) ist die grösste projective Gruppe der Ebene, die ein gewisses Linienelement dieser Ebene invariant lässt, sie steckt aber in der allgemeinen linearen Gruppe der Ebene und liefert daher in drei Veränderlichen einen Typus von *imprimitiven* Gruppen, die mit der allgemeinen projectiven Gruppe G_8 der Ebene gleichzusammengesetzt sind. Einen Repräsentanten dieses Typus erhält man, wenn man sich die ∞^3 Linienelemente der Ebene durch die G_8 transformirt denkt und sie sodann auf die Punkte eines R_3 abbildet. Man braucht zu diesem Zwecke nur die allgemeine projective Gruppe G_8 der Ebene zu erweitern, indem man x_2 als Function von x_1 ansieht und den ersten Differentialquotienten:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = x_3$$

mitnimmt (vgl. Abschn. II, S. 5, Satz 1), dabei ergiebt sich die Gruppe:

$$(20) \qquad \left| \begin{array}{c} p_1,\ p_2,\ x_1p_1 - x_3p_3,\ x_2p_2 + x_3p_3 \\ x_2p_1 - x_3^2p_3,\ x_1p_2 + p_3 \\ x_1^2p_1 + x_1x_2p_2 + (x_2 - x_1x_3)p_3 \\ x_1x_2p_1 + x_2^2p_2 + (x_2x_3 - x_1x_3^2)p_3, \end{array} \right.$$

die uns auch schon auf S. 167 begegnet ist.

Die Gruppe (12) endlich liefert in zwei Veränderlichen einen Typus von imprimitiven mit der allgemeinen projectiven Gruppe des R_1 gleichzusammengesetzten Gruppen. Ein Repräsentant dieses Typus ist die Gruppe:

$$(21) \qquad p_1 + p_2,\quad x_1p_1 + x_2p_2,\quad x_1^2p_1 + x_2^2p_2$$

oder auch die mit ihr ähnliche Gruppe:

$$(22) \qquad p_1 + x_1p_2,\quad x_1p_1 + 2x_2p_2,\quad (x_1^2 - x_2)p_1 + x_1x_2p_2,$$

die grösste projective Gruppe der Ebene x_1, x_2, bei der der Kegelschnitt: $x_2 - \frac{1}{2}x_1^2 = 0$ invariant bleibt (vgl. S. 76).

Nunmehr können wir unsre Ergebnisse zusammenfassen:

Theorem 17. *Ist $n > 3$, so giebt es in $n+1$ Veränderlichen nur einen Typus solcher transitiver Gruppen, die mit der allgemeinen projectiven Gruppe des R_n gleichzusammengesetzt sind, Repräsentant dieses Typus ist die specielle lineare homogene Gruppe:*

$$(18) \qquad x_\mu p_\nu,\quad x_\mu p_\mu - x_\nu p_\nu \qquad (\mu, \nu = 1 \ldots n+1;\ \mu \neq \nu)$$

in $n+1$ Veränderlichen. Ist $n \leqq 3$, so giebt es in $n+1$ Veränderlichen ausser dem eben genannten noch je einen, aber auch nur einen Typus transitiver Gruppen von der betreffenden Zusammensetzung; repräsentirt wird dieser Typus für $n = 3$ durch die Gruppe (19) aller conformen Transformationen des R_4, für $n = 2$ durch die Gruppe (20), die aus der allgemeinen projectiven Gruppe der Ebene durch Erweiterung erhalten wird, für $n = 1$ durch die grösste projective Gruppe der Ebene, die einen nicht ausgearteten Kegelschnitt invariant lässt. Dagegen giebt es, welchen Werth auch n haben möge, in $n+1$ Veränderlichen stets nur einen Typus intransitiver Gruppen, die mit der allgemeinen projectiven Gruppe des R_n gleichzusammengesetzt sind; einen Repräsentanten dieses Typus erhält man, wenn man zu der allgemeinen projectiven Gruppe des R_n noch eine $(n+1)^{te}$ Veränderliche x_{n+1} hinzufügt, die nicht transformirt wird.

Kapitel 15.

Allgemeines über gewisse primitive projective Gruppen des n-fach ausgedehnten Raumes.

Aus den Entwickelungen des Kapitels 12 folgt unter Anderm der Satz: Eine primitive projective Gruppe des dreifach ausgedehnten Raumes kann niemals durch eine nichtprojective Punkttransformation wieder in eine projective Gruppe übergeführt werden. Es muss dahin gestellt bleiben, ob dieser Satz auch für alle primitiven projectiven Gruppen des R_n gilt; wir werden aber zeigen, dass er jedenfalls für gewisse unter ihnen gilt, nämlich für die, die Verallgemeinerungen der primitiven projectiven Gruppen des R_3 sind. Wir benutzen dabei ganz andre Methoden als in Kapitel 12 und erhalten daher zugleich einen neuen Beweis für einen Theil der Ergebnisse dieses Kapitels.

Hiermit ist die Aufgabe bezeichnet, deren Erledigung das gegenwärtige Kapitel gewidmet ist*).

§ 65.

Um die folgende Untersuchung zu vereinfachen, denken wir uns zunächst eine beliebige projective Gruppe G des R_n vorgelegt und fragen, ob es eine nichtprojective Transformation giebt, bei der G wieder in eine projective Gruppe übergeht. Wir werden diese Frage auf eine andre zurückführen, deren Beantwortung in jedem einzelnen Falle wesentlich leichter ist.

Die Allgemeinheit unsrer Untersuchung wird offenbar nicht beeinträchtigt, wenn wir uns G von vornherein durch eine projective Transformation auf eine solche Form gebracht denken, dass der Punkt: $x_1 = \cdots = x_n = 0$ der Gruppe gegenüber ein Punkt von allgemeiner Lage ist. Diese Voraussetzung wollen wir daher von jetzt ab machen.

Ist nun T eine nichtprojective Transformation, bei der G wieder in eine projective Gruppe übergeht, und sind S und S' irgend zwei projective Transformationen, so ist stets auch: $T' = STS'$ eine nichtprojective Transformation, die G in eine projective Gruppe überführt. Denken wir uns insbesondere die projectiven Transformationen S und S' geeignet gewählt, so können wir immer erreichen, dass T' den Punkt: $x_1 = \cdots = x_n = 0$ invariant lässt und sich in der Umgebung

*) Die in diesem Kapitel benutzte Methode hat Lie schon in den Leipziger Berichten von 1890 angewendet und damit eine Anzahl von Sätzen bewiesen, die in den Theoremen 18 und 19 wiedergegeben und vervollständigt sind (a. a. O. S. 313, Satz 13; S. 316, Satz 14; S. 300, Satz 4 und 5; S. 318, Satz 15).

dieses Punktes regulär verhält, wir können also immer erreichen, dass T' die Form hat:

$$(1) \qquad y_i = \sum_1^n{}_v \, a_{iv} x_v + \cdots \quad (i = 1 \ldots n),$$

wo die weggelassenen Glieder in $x_1 \ldots x_n$ von höherer als der ersten Ordnung sind und wo die Determinante der a_{iv} nicht verschwindet. Demnach giebt es eine nichtprojective Transformation von der angegebenen Beschaffenheit dann und nur dann, wenn es eine nichtprojective Transformation von der Form (1) giebt, bei der sich G wieder in eine projective Gruppe verwandelt.

Aber auch die Transformationen von der Form (1) können noch durch einfachere ersetzt werden. Da nämlich die Determinante der a_{iv} nicht verschwindet, so stellen die Gleichungen:

$$(2) \qquad y_i = \sum_1^n{}_v \, a_{iv} x_v' \quad (i = 1 \ldots n) \; .$$

eine projective Transformation des R_n dar, überdies leuchtet ein, dass man jede nichtprojective Transformation von der Form (1) dadurch erhalten kann, dass man zuerst eine gewisse nichtprojective Transformation von der Form:

$$(3) \qquad x_i' = x_i + \cdots \quad (i = 1 \ldots n)$$

ausführt und sodann die projective Transformation (2). Eine nichtprojective Transformation T von der verlangten Beschaffenheit giebt es in Folge dessen dann und nur dann, wenn es eine nichtprojective Transformation von der Form (3) giebt, bei der G wieder in eine projective Gruppe übergeht.

Wünscht man also zu entscheiden, ob eine vorgelegte projective Gruppe G des R_n durch eine nichtprojective Punkttransformation dieses Raumes in eine projective Gruppe übergeführt werden kann, so hat man folgendermassen zu verfahren: man bringe zunächst G durch eine geeignete projective Transformation auf eine solche Form $\mathfrak{G}$, dass der Punkt: $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ gegenüber ein Punkt von allgemeiner Lage ist; hat man das gethan, so braucht man nur noch zu untersuchen, ob es eine nichtprojective Transformation von der Form:

$$(3) \qquad x_i' = x_i + \cdots \quad (i = 1 \ldots n)$$

giebt, bei der $\mathfrak{G}$ wieder in eine projective Gruppe übergeht.

Wenden wir jetzt die hiermit gewonnene Regel auf die primitiven projectiven Gruppen des R_n an, die aus den primitiven projectiven Gruppen des R_3 (s. Theor. 11, S. 226) durch Verallgemeinerung auf n Dimensionen erhalten werden.

§ 66.

In diesem Paragraphen untersuchen wir die allgemeine projective, die allgemeine lineare und die specielle lineare Gruppe des R_n.

Da die specielle lineare Gruppe:

$$(4) \qquad p_\mu,\ x_\mu p_\nu,\ x_\mu p_\mu - x_\nu p_\nu \qquad (\mu, \nu = 1 \ldots n;\ \mu \neq \nu)$$

des R_n sowohl in der allgemeinen linearen als in der allgemeinen projectiven enthalten ist, so liegt es nahe, mit der speciellen linearen Gruppe zu beginnen; gelingt es uns nämlich zu zeigen, dass diese nur durch eine projective Transformation wieder in eine projective Gruppe übergeführt werden kann, so ist dasselbe offenbar zugleich für die beiden andern Gruppen bewiesen.

Der Gruppe (4) gegenüber ist der Punkt: $x_1 = \cdots = x_n = 0$ schon ein Punkt von allgemeiner Lage, wir können also ohne Weiteres unsre oben abgeleitete Regel anwenden und haben demgemäss die allgemeinste Transformation von der Form (3) zu bestimmen, bei der die Gruppe (4) in eine projective Gruppe übergeht.

Verwandelt sich (4) bei der Transformation (3) wieder in eine projective Gruppe, so erkennt man mit Berücksichtigung von Abschn. I, S. 196 f. sofort, dass vermöge (3) Gleichungen von der Form:

$$(5) \qquad \begin{cases} p_\mu = p'_\mu + \sum\limits_{ik}^{1\ldots n} \alpha_{\mu ik} x'_i p'_k + \sum\limits_{\tau}^{1\ldots n} \beta_{\mu\tau} x'_\tau U' \\ x_\mu p_\nu = x'_\mu p'_\nu + \sum\limits_{\tau}^{1\ldots n} \gamma_{\mu\nu\tau} x'_\tau U' \\ x_\mu p_\mu - x_\nu p_\nu = x'_\mu p'_\mu - x'_\nu p'_\nu + \sum\limits_{\tau}^{1\ldots n} \delta_{\mu\nu\tau} x'_\tau U' \\ \qquad\qquad (\mu, \nu = 1 \ldots n;\ \mu \neq \nu) \end{cases}$$

bestehen, wo U' zur Abkürzung für: $x_1' p_1' + \cdots + x_n' p_n'$ geschrieben ist und wo $\delta_{\mu\nu\tau}$ bei der Vertauschung von μ und ν das Zeichen wechselt.

Zunächst wollen wir annehmen, dass $n > 1$ ist.

In diesem Falle ergiebt sich durch Combination:

$$\begin{aligned} (x_\mu p_\nu,\ x_\nu p_\mu) &= x_\mu p_\mu - x_\nu p_\nu \\ &= x'_\mu p'_\mu - x'_\nu p'_\nu + \gamma_{\nu\mu\nu} x'_\mu U' - \gamma_{\mu\nu\mu} x'_\nu U', \end{aligned}$$

die $\delta_{\mu\nu\tau}$ sind also durch die $\gamma_{\mu\nu\tau}$ vollständig bestimmt. Ferner wird:

$$\begin{aligned} (x_\mu p_\mu - x_\nu p_\nu,\ x_\mu p_\nu) &= 2 x_\mu p_\nu \\ &= 2 x'_\mu p'_\nu + 2\gamma_{\mu\nu\mu} x'_\mu U' - \gamma_{\mu\nu\nu} x'_\nu U' \\ (x_\nu p_\mu,\ x_\mu p_\mu - x_\nu p_\nu) &= 2 x_\nu p_\mu \\ &= 2 x'_\nu p'_\mu - \gamma_{\nu\mu\mu} x'_\mu U' + 2\gamma_{\nu\mu\nu} x'_\nu U', \end{aligned}$$

mithin verschwinden alle $\gamma_{\mu\nu\tau}$ mit Ausnahme allein der $\gamma_{\mu\nu\mu}$ und der $\gamma_{\nu\mu\nu}$ und wir haben einfach:

$$(6)\quad \begin{cases} x_\mu p_\nu = x'_\mu p'_\nu + \gamma_{\mu\nu\mu} x'_\mu U' \\ x_\nu p_\mu = x'_\nu p'_\mu + \gamma_{\nu\mu\nu} x'_\nu U' \\ x_\mu p_\mu - x_\nu p_\nu = x'_\mu p'_\mu - x'_\nu p'_\nu + \gamma_{\nu\mu\nu} x'_\mu U' - \gamma_{\mu\nu\mu} x'_\nu U' \end{cases}$$
$$(\mu, \nu = 1 \ldots n;\ \mu \neq \nu).$$

Ist $n = 2$, so ist jedes $\gamma_{\mu\nu\mu}$ durch das ν allein vollständig bestimmt, weil es dann zu jedem ν nur ein μ giebt, das der Bedingung: $\mu \neq \nu$ genügt. Ist andrerseits $n > 2$ und ist $\tau \neq \mu$ und $\neq \nu$, so bekommen wir:

$$(x_\mu p_\tau,\ x_\tau p_\nu) = x_\mu p_\nu = x'_\mu p'_\nu + \gamma_{\tau\nu\tau} x'_\mu U',$$

also ist stets: $\gamma_{\tau\nu\tau} = \gamma_{\mu\nu\mu}$, das heisst: auch für $n > 2$ hängt jedes $\gamma_{\mu\nu\mu}$ nur von dem ν ab. Wir können daher für $\gamma_{\mu\nu\mu}$ einfach schreiben γ_ν und für $\gamma_{\nu\mu\nu}$ dementsprechend γ_μ, so dass die Gleichungen (6) in der Form:

$$(6')\quad \begin{cases} x_\mu p_\nu = x'_\mu p'_\nu + \gamma_\nu x'_\mu U' \\ x_\mu p_\mu - x_\nu p_\nu = x'_\mu p'_\mu - x'_\nu p'_\nu + \gamma_\mu x'_\mu U' - \gamma_\nu x'_\nu U' \end{cases}$$
$$(\mu, \nu = 1 \ldots n;\ \mu \neq \nu)$$

erscheinen. Um diese Gleichungen noch weiter zu vereinfachen, machen wir uns den Umstand zu Nutze, dass die infinitesimalen Transformationen auf der rechten Seite sämmtlich die $(n-1)$-fach ausgedehnte ebene Mannigfaltigkeit:

$$\sum_1^n{}_\tau \gamma_\tau x'_\tau + 1 = 0$$

invariant lassen; wir verlegen nämlich diese Mannigfaltigkeit durch die projective Transformation:

$$(7)\quad x''_\nu = \frac{x'_\nu}{1 + \sum_1^n{}_\tau \gamma_\tau x'_\tau} \qquad (\nu = 1 \ldots n)$$

ins Unendliche und bekommen so an Stelle der Gleichungen (6′) die nachstehenden:

$$(6'')\quad \begin{cases} x_\mu p_\nu = x''_\mu p''_\nu, \quad x_\mu p_\mu - x_\nu p_\nu = x''_\mu p''_\mu - x''_\nu p''_\nu \end{cases}$$
$$(\mu, \nu = 1 \ldots n;\ \mu \neq \nu).$$

Dabei ist noch besonders hervorzuheben, dass die projective Transformation (7) die Form: $x''_\nu = x'_\nu + \cdots$ besitzt, wo die weggelassenen Glieder von zweiter und höherer Ordnung in den x' sind.

Es bleibt uns jetzt nur noch übrig, die allgemeinste Transfor-

mation von der Form: $x_i'' = x_i + \cdots$ zu bestimmen, bei der die Gruppe (4) wieder in eine projective Gruppe übergeht und vermöge deren insbesondere die Relationen (6″) bestehen. Wir werden finden, dass diese Transformation schon durch die Gleichungen (6″) vollständig bestimmt ist.

Aus (6″) erhält man:

$$p_\nu'' = \frac{x_\mu p_\nu}{x_\mu''}, \quad p_\mu'' = \frac{x_\nu p_\mu}{x_\nu''}$$

und also:

$$x_\mu'' p_\mu'' - x_\nu'' p_\nu'' = \frac{x_\mu'' x_\nu}{x_\nu''} p_\mu - \frac{x_\nu'' x_\mu}{x_\mu''} p_\nu;$$

da dieser Ausdruck gleich $x_\mu p_\mu - x_\nu p_\nu$ sein muss, so ergiebt sich weiter:

$$x_\nu'' = \frac{x_\mu'' x_\nu}{x_\mu},$$

was nur möglich ist, wenn die Transformation: $x_i'' = x_i + \cdots$ die Form hat:

$$x_i'' = x_i \cdot \varrho(x_1 \ldots x_n) \quad (i = 1 \ldots n), \tag{8}$$

unter ϱ eine gewöhnliche Potenzreihe von der Form: $1 + \cdots$ verstanden. Nun aber folgt aus (8):

$$x_\mu p_\nu = x_\mu \cdot \varrho \cdot p_\nu'' + \sum_1^n{}_\tau \, x_\mu x_\tau \frac{\partial \varrho}{\partial x_\nu} p_\tau''$$

und hier muss die rechte Seite die Form:

$$x_\mu'' p_\nu'' = x_\mu \cdot \varrho \cdot p_\nu''$$

haben, also müssen alle n Differentialquotienten von ϱ verschwinden und ϱ muss gleich 1 sein. Demnach ist die identische Transformation: $x_i'' = x_i$ die einzige Transformation von der Form: $x_i'' = x_i + \cdots$, vermöge deren die Gleichungen (6″) bestehen.

Verbinden wir dieses Ergebniss mit dem früher Gesagten, so erkennen wir, dass jede Transformation: $x_i' = x_i + \cdots$, bei der die Gruppe (4) wieder in eine projective Gruppe übergeht, projectiv ist und die Form:

$$x_i' = \frac{x_i}{1 - \sum_1^n{}_\tau \, \gamma_\tau x_\tau} \quad (i = 1 \ldots n)$$

besitzt. Damit ist aber nach § 65 zugleich bewiesen, dass die specielle lineare Gruppe (4) im Falle $n > 1$ niemals durch eine nichtprojective Transformation wieder in eine projective Gruppe übergeführt werden kann. Wie wir schon auf S. 285 erwähnten, folgt endlich

hieraus, dass für $n > 1$ auch die allgemeine projective und die allgemeine lineare Gruppe des R_n nur bei projectiven Transformationen wieder in projective Gruppen übergehen.

Ist $n = 1$, so besteht die specielle lineare Gruppe (4) blos aus der Translation p und es giebt allerdings nichtprojective Transformationen, bei denen diese Gruppe wieder in eine projective Gruppe übergeht; die Bestimmung aller derartigen nichtprojectiven Transformationen hat keine Schwierigkeit, wir wollen es deshalb dem Leser überlassen, sie auszuführen. Dagegen gilt für die allgemeine lineare Gruppe: p, xp und für die allgemeine projective: p, xp, x^2p auch jetzt noch der Satz, dass sie nur bei projectiven Transformationen in projective Gruppen übergehen können.

In der That, wenn die allgemeine lineare Gruppe: p, xp des R_1 durch eine Transformation von der Form: $x' = x + \cdots$ wieder in eine projective Gruppe übergeht, so bestehen vermöge dieser Transformation Gleichungen von der Form:

$$(9) \qquad \begin{cases} p = p' + \alpha x' p' + \beta x'^2 p' \\ xp = x' p' + \gamma x'^2 p'. \end{cases}$$

Hieraus ergiebt sich durch Combination:

$$(p, xp) = p = p' + 2\gamma x' p' + (\alpha\gamma - \beta) x'^2 p',$$

es ist also: $\alpha = 2\gamma$ und: $\alpha\gamma - \beta = \beta$ und demnach:

$$p = (1 + \gamma x')^2 p'.$$

Verbindet man diese Gleichung mit der zweiten der Gleichungen (9), so findet man:

$$x = \frac{x'}{1 + \gamma x'},$$

die Transformation: $x' = x + \cdots$ ist also projectiv. Damit ist bewiesen, dass die Gruppe: p, xp wirklich nur durch eine projective Transformation wieder in eine projective Gruppe übergeführt werden kann; zugleich ist klar, dass von der Gruppe: p, xp, x^2p dasselbe gilt.

Fassen wir nunmehr die gewonnenen Ergebnisse in einem Theoreme zusammen:

Theorem 18. *Die allgemeine projective und die allgemeine lineare Gruppe des R_n können durch eine nichtprojective Punkttransformation des R_n niemals wieder in projective Gruppen übergeführt werden; ist $n > 1$, so gilt dasselbe auch von der speciellen linearen Gruppe des R_n.*

Man kann den Theil dieses Theorems, der sich auf die allgemeine projective Gruppe bezieht, natürlich auch so ausdrücken: *die projectiven*

Transformationen sind die einzigen Punkttransformationen des R_n, bei denen die allgemeine projective Gruppe dieses Raumes in sich übergeht.

§ 67.

Wir wollen jetzt von drei andern primitiven projectiven Gruppen des R_n zeigen, dass sie ebenfalls nur durch projective Transformationen wieder in projective Gruppen übergeführt werden können. Es sind das erstens die Gruppe:

$$p_\mu,\ x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu \quad (\mu, \nu = 1 \dots n) \tag{10}$$

der Euklidischen Bewegungen, zweitens die Gruppe:

$$p_\mu,\ x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu,\ U \quad (\mu, \nu = 1 \dots n) \tag{11}$$

der Euklidischen Bewegungen und der Aehnlichkeitstransformationen, endlich drittens die grösste continuirliche projective Gruppe des R_n, bei der eine nicht ausgeartete $(n-1)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit zweiten Grades invariant bleibt; denken wir uns die betreffende Mannigfaltigkeit durch eine projective Transformation auf die Form:

$$\sum_1^n x_\tau^2 + 1 = 0 \tag{12}$$

gebracht, so wird die zuletzt genannte Gruppe in der Gestalt:

$$p_\mu + x_\mu U,\ x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu \quad (\mu, \nu = 1 \dots n) \tag{13}$$

erscheinen. Wir beschränken uns dabei von vornherein auf den Fall $n > 1$, da der Fall $n = 1$ zu wenig Interesse darbietet.

Da die Gruppe (11) die Gruppe (10) als Untergruppe enthält, so brauchen wir offenbar nur von den beiden Gruppen (10) und (13) zu beweisen, dass sie niemals durch nichtprojective Transformationen in projective Gruppen übergeführt werden können. Aber auch die Gruppen (10) und (13) brauchen wir nicht jede für sich zu behandeln, wir können sie vielmehr mit einem Schlage erledigen, indem wir die allgemeinere Gruppe:

$$p_\mu + c \,.\, x_\mu U,\ x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu \quad (\mu, \nu = 1 \dots n) \tag{14}$$

betrachten, von der sie beide besondere Fälle sind.

Die Gruppe (14) hat bereits eine solche Form, dass der Punkt: $x_1 = \cdots = x_n = 0$ ein Punkt von allgemeiner Lage ist; nach S. 284 haben wir daher nur nöthig, zu untersuchen, welche Transformationen von der Form: $x_i' = x_i + \cdots$ es giebt, bei denen (14) wieder in eine projective Gruppe übergeht.

Ist: $x_i' = x_i + \cdots$ eine Transformation von der eben definirten Beschaffenheit, so bestehen vermöge dieser Transformation Gleichungen von der Form:

$$(15)\qquad \begin{cases} p_\mu + c x_\mu U = p'_\mu + \sum_{kj}^{1\ldots n} \alpha_{\mu kj}\, x'_k p'_j + \sum_{k}^{1\ldots n} \beta_{\mu k}\, x'_k U' \\ S_{\mu\nu} = S'_{\mu\nu} + \sum_{k}^{1\ldots n} \gamma_{\mu\nu k} x'_k U' \\ \qquad\qquad (\mu, \nu = 1 \ldots n), \end{cases}$$

wo zur Abkürzung $S_{\mu\nu}$ für $x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu$ und $S'_{\mu\nu}$ für $x'_\mu p'_\nu - x'_\nu p'_\mu$ geschrieben ist und wo natürlich jedes $\gamma_{\mu\nu k} = -\gamma_{\nu\mu k}$ sein muss.

Es sei nun zunächst $n > 2$ und μ, ν, τ seien irgend drei verschiedene unter den Zahlen $1 \ldots n$, dann ergiebt sich:

$$\begin{aligned}(S_{\mu\nu},\ S_{\nu\tau}) &= S_{\mu\tau} \\ &= S'_{\mu\tau} + \gamma_{\nu\tau\nu} x'_\mu U' - (\gamma_{\nu\tau\mu} + \gamma_{\mu\nu\tau})\, x'_\nu U' + \gamma_{\mu\nu\nu} x'_\tau U'\end{aligned}$$

und somit:

$$(16)\qquad \begin{cases} \gamma_{\mu\tau\mu} = \gamma_{\nu\tau\nu}, \quad \gamma_{\mu\tau\tau} = \gamma_{\mu\nu\nu} \\ \gamma_{\mu\tau\nu} + \gamma_{\nu\tau\mu} + \gamma_{\mu\nu\tau} = 0. \end{cases}$$

Die letzte dieser Gleichungen liefert, wenn ν und τ vertauscht werden:

$$\gamma_{\mu\nu\tau} + \gamma_{\tau\nu\mu} + \gamma_{\mu\tau\nu} = 0,$$

mit Berücksichtigung von: $\gamma_{\tau\nu\mu} = -\gamma_{\nu\tau\mu}$ ergiebt sich daher einfach: $\gamma_{\nu\tau\mu} = 0$, das heisst: alle $\gamma_{\mu\nu k}$ mit drei von einander verschiedenen Zeigern sind null. Andrerseits folgt aus den ersten der Gleichungen (16), dass jedes $\gamma_{\mu\tau\mu} = -\gamma_{\tau\mu\mu}$ nur von dem τ, nicht aber von dem μ abhängt, dass wir also $\gamma_{\mu\tau\mu} = \gamma_\tau$ setzen können und dementsprechend: $\gamma_{\mu\tau\tau} = -\gamma_\mu$. Mithin hat die zweite Reihe der Gleichungen (15) die einfache Form:

$$(17)\qquad \begin{cases} S_{\mu\nu} = S'_{\mu\nu} + \gamma_\nu x'_\mu U' - \gamma_\mu x'_\nu U', \\ \qquad\qquad (\mu, \nu = 1 \ldots n). \end{cases}$$

Schliesslich ist zu bemerken, dass in dem bisher ausgeschlossenen Falle: $n = 2$ die betreffenden unter den Gleichungen (15) sich schon von vornherein in der Form (17) schreiben lassen; wir können daher die Voraussetzung $n > 2$ jetzt wieder fallen lassen.

Wie man sich leicht überzeugt, bleibt bei allen infinitesimalen Transformationen, die auf der rechten Seite von (17) stehen, die $(n-1)$-fach ausgedehnte ebene Mannigfaltigkeit:

$$\sum_{1}^{n} {}_k\, \gamma_k x'_k + 1 = 0$$

invariant. Wir verlegen daher genau so wie im vorigen Paragraphen diese Mannigfaltigkeit durch die projective Transformation:

$$(18) \qquad x_i'' = \frac{x_i'}{1 + \sum_1^n{}^k \gamma_k x_k'} \qquad (i = 1 \ldots n)$$

ins Unendliche und bekommen an Stelle der Gleichungen (17) die nachstehenden:

$$(17') \qquad \begin{cases} x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu = x_\mu'' p_\nu'' - x_\nu'' p_\mu'' \\ (\mu, \nu = 1 \ldots n), \end{cases}$$

während die erste Reihe der Gleichungen (15) die Form:

$$(19) \qquad \begin{cases} p_\mu + c x_\mu U = p_\mu'' + \sum_{kj}^{1 \ldots n} \alpha'_{\mu kj} x_k'' p_j'' + \sum_k^{1 \ldots n} \beta'_{\mu k} x_k'' U'' \\ (\mu = 1 \ldots n) \end{cases}$$

erhält.

Combinirt man: $p_\mu + c x_\mu U$ mit: $x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu$ $(\nu \neq \mu)$, so ergiebt sich wegen (19) und (17'):

$$p_\nu + c x_\nu U = p_\nu'' + \sum_1^n{}^k x_k'' \{\alpha'_{\mu k\mu} p_\nu'' - \alpha'_{\mu k\nu} p_\mu''\} -$$

$$- \sum_1^n{}^j \{\alpha'_{\mu\nu j} x_\mu'' - \alpha'_{\mu\mu j} x_\nu''\} p_j'' -$$

$$- \beta'_{\mu\nu} x_\mu'' U'' + \beta'_{\mu\mu} x_\nu'' U'';$$

demnach ist: $\beta'_{\nu\nu} = \beta'_{\mu\mu}$ und für beide kann β' gesetzt werden. Andrerseits erhalten wir $\beta'_{\nu\mu} = -\beta'_{\mu\nu}$, aber diese Grösse ist im Falle $n > 2$ stets gleich Null, denn für $n > 2$ giebt es in der Reihe $1 \ldots n$ keine von ν verschiedene Zahl μ, die ν gegenüber ausgezeichnet wäre. Combinirt man ferner den vorhin gefundenen Ausdruck für: $p_\nu + c x_\nu U$ mit: $x_\nu p_\mu - x_\mu p_\nu = x_\nu'' p_\mu'' - x_\mu'' p_\nu''$, so ergiebt sich:

$$p_\mu + c x_\mu U = p_\mu'' + \sum_1^n{}^k x_k'' \{\alpha'_{\mu k\mu} p_\mu'' + \alpha'_{\mu k\nu} p_\nu''\} +$$

$$+ \sum_1^n{}^j \{\alpha'_{\mu\nu j} x_\nu'' + \alpha'_{\mu\mu j} x_\mu''\} p_j'' -$$

$$- 2\alpha'_{\mu\nu\nu} x_\mu'' p_\mu'' - 2\alpha'_{\mu\mu\mu} x_\nu'' p_\nu'' +$$

$$+ 2\alpha'_{\mu\nu\mu} x_\mu'' p_\nu'' + 2\alpha'_{\mu\mu\nu} x_\nu'' p_\mu'' +$$

$$+ \beta' x_\mu'' U'' + \beta'_{\mu\nu} x_\nu'' U''.$$

Vergleicht man das mit (19), so erkennt man, dass alle $\alpha'_{\mu kj}$, in denen keine der Zahlen k, j gleich μ oder ν ist, verschwinden, und dass ausserdem auch $\alpha'_{\mu\nu\nu}$, $\alpha'_{\mu\mu\mu}$, $\alpha'_{\mu\nu\mu}$, $\alpha'_{\mu\mu\nu}$ gleich Null sind; da aber μ und ν zwei beliebige Zahlen der Reihe $1 \ldots n$ sind, so folgt hier-

aus, dass überhaupt alle $\alpha'_{\mu kj}$ verschwinden und dass die Gleichungen (19) die Form besitzen:

$$(19') \qquad \begin{cases} p_\mu + c x_\mu U = p''_\mu + \beta' x''_\mu U'' + \beta'_{\mu\nu} x''_\nu U'' \\ p_\nu + c x_\nu U = p''_\nu + \beta' x''_\nu U'' - \beta'_{\mu\nu} x''_\mu U'' \\ \qquad (\mu, \nu = 1 \ldots n;\ \mu \neq \nu). \end{cases}$$

Hier ist, wie wir oben sahen, für $n > 2$ das $\beta'_{\mu\nu}$ stets gleich Null.

Nunmehr erhalten wir durch Combination von: $p_\mu + c x_\mu U$ und $p_\nu + c x_\nu U$:

$$c(x_\nu p_\mu - x_\mu p_\nu) = \beta'(x''_\nu p''_\mu - x''_\mu p''_\nu) - \\ - \beta'_{\mu\nu}\{x''_\mu p''_\mu + x''_\nu p''_\nu + 2U''\},$$

also mit Berücksichtigung von (17'): $\beta' = c$ und $\beta'_{\mu\nu} = 0$ auch im Falle $n = 2$. Die Gleichungen (19') können in Folge dessen durch die nachstehenden ersetzt werden:

$$(19'') \qquad \begin{cases} p_\mu + c x_\mu U = p''_\mu + c x''_\mu U'' \\ \qquad (\mu = 1 \ldots n). \end{cases}$$

Verbinden wir endlich diese Gleichungen mit den Gleichungen (17'), die sich auch schreiben lassen:

$$x_\mu(p_\nu + c x_\nu U) - x_\nu(p_\mu + c x_\mu U) = \\ = x''_\mu(p''_\nu + c x''_\nu U'') - x''_\nu(p''_\mu + c x''_\mu U''),$$

so erkennen wir, dass: $x''_\mu = x_\mu$ ist.

Nach dem Früheren ist hiermit bewiesen, dass die projective Transformation:

$$x'_i = \frac{x_i}{1 - \sum_1^n \gamma_\tau x_\tau} \qquad (i = 1 \ldots n)$$

die allgemeinste Transformation von der Form: $x'_i = x_i + \cdots$ ist, bei der die Gruppe (14) wieder in eine projective Gruppe übergeht, wir erhalten demnach das:

Theorem 19. *Ist $n > 1$, so kann die Gruppe der Euklidischen Bewegungen des R_n nur durch eine projective Transformation dieses Raumes wieder in eine projective Gruppe übergeführt werden; dasselbe gilt von der Gruppe, die aus den Euklidischen Bewegungen und den Aehnlichkeitstransformationen besteht, und ausserdem auch noch von der grössten continuirlichen projectiven Gruppe des R_n, bei der eine nicht ausgeartete $(n-1)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit zweiten Grades invariant bleibt.*

§ 68.

Da es in Räumen von gerader Dimensionenzahl nur ausgeartete lineare Complexe giebt, so kann der projectiven Gruppe eines nicht ausgearteten linearen Complexes des R_3 nur in Räumen von ungerader Dimensionenzahl eine primitive projective Gruppe entsprechen. Die betreffende Gruppe haben wir auch schon früher kennen gelernt (s. Abschn. II, S. 521 f.). Wir fanden, dass der lineare Complex:

$$(20) \qquad dz + \sum_1^n{}_\nu (x_\nu\, dy_\nu - y_\nu\, dx_\nu) = 0$$

des Raumes $z,\ x_1 \ldots x_n,\ y_1 \ldots y_n$, bei der projectiven Gruppe:

$$(21) \qquad \begin{cases} p_\mu - y_\mu r,\ q_\mu + x_\mu r,\ r,\ U + zr \\ x_\mu q_\nu + x_\nu q_\mu,\ x_\mu p_\nu - y_\nu q_\mu,\ y_\mu p_\nu + y_\nu p_\mu \\ z p_\mu - y_\mu U,\ z q_\mu + x_\mu U,\ z U \\ (\mu,\ \nu = 1 \ldots n) \end{cases}$$

invariant bleibt; dabei haben wir jetzt von der Abkürzung:

$$\sum_1^n{}_\mu (x_\mu p_\mu + y_\mu q_\mu) + zr = U$$

Gebrauch gemacht.

Da der Punkt: $x_\mu = y_\mu = z = 0$ ein Punkt von allgemeiner Lage ist, so haben wir nach S. 284 nur nöthig, alle Transformationen von der Form:

$$(22) \qquad \begin{cases} x_\mu' = x_\mu + \cdots,\ y_\mu' = y_\mu + \cdots,\ z' = z + \cdots \\ (\mu = 1 \ldots n) \end{cases}$$

zu bestimmen, bei denen die Gruppe (21) wieder in eine projective Gruppe übergeht.

Ist (22) eine Transformation von der eben definirten Beschaffenheit, so besteht vermöge (22) jedenfalls eine Relation von der Form:

$$(23) \qquad U + zr = U' + z'r' + \sum_1^n{}_\nu \{\alpha_\nu x_\nu' U' + \beta_\nu y_\nu' U'\} + \gamma z' U'.$$

Hier lässt die infinitesimale Transformation auf der rechten Seite die ebene Mannigfaltigkeit:

$$1 + \sum_1^n{}_\nu (\alpha_\nu x_\nu' + \beta_\nu y_\nu') + \tfrac{1}{2}\gamma z' = F' = 0$$

invariant; verlegen wir daher diese Mannigfaltigkeit durch die projective Transformation:

$$(24) \qquad \begin{cases} x''_\mu = \dfrac{x'_\mu}{F'}, \quad y''_\mu = \dfrac{y'_\mu}{F'}, \quad z'' = \dfrac{z'}{F'} \\ (\mu = 1 \ldots n) \end{cases}$$

ins Unendliche, so bekommen wir an Stelle von (23) die einfache Gleichung:

$$(23') \qquad U + zr = U'' + z''r''.$$

Ueberdies ist klar, dass wir nunmehr nur noch die allgemeinste Transformation von der Form:

$$(22') \qquad \begin{cases} x''_\mu = x_\mu + \cdots, \quad y''_\mu = y_\mu + \cdots, \quad z'' = z + \cdots \\ (\mu = 1 \ldots n) \end{cases}$$

aufzusuchen haben, vermöge deren die Gruppe (21) wieder in eine projective Gruppe übergeht und vermöge deren die Gleichung (23′) besteht.

Unter den gemachten Voraussetzungen zieht die Transformation (22′) auch Gleichungen von der Form:

$$\begin{aligned} x_\mu q_\nu + x_\nu q_\mu &= x''_\mu q''_\nu + x''_\nu q''_\mu + \cdots \\ x_\mu p_\nu - y_\nu q_\mu &= x''_\mu p''_\nu - y''_\nu q''_\mu + \cdots \\ y_\mu p_\nu + y_\nu p_\mu &= y''_\mu p''_\nu + y''_\nu p''_\mu + \cdots \end{aligned}$$

nach sich, wo die weggelassenen Glieder auf der rechten Seite überall aus den infinitesimalen Transformationen:

$$z'' U'', \quad x''_\nu U'', \quad y''_\nu U'' \qquad (\nu = 1 \ldots n)$$

linear abgeleitet sind; durch Combination mit: $U + zr = U'' + z''r''$ erkennt man aber sofort, dass diese nicht mitgeschriebenen Glieder sämmtlich verschwinden und hat somit:

$$(25) \qquad \begin{cases} x_\mu q_\nu + x_\nu q_\mu = x''_\mu q''_\nu + x''_\nu q''_\mu \\ x_\mu p_\nu - y_\nu q_\mu = x''_\mu p''_\nu - y''_\nu q''_\mu \\ y_\mu p_\nu + y_\nu p_\mu = y''_\mu p''_\nu + y''_\nu p''_\mu \\ (\mu, \nu = 1 \ldots n). \end{cases}$$

Hieraus ergiebt sich zunächst:

$$x_\mu \frac{\partial z''}{\partial y_\nu} + x_\nu \frac{\partial z''}{\partial y_\mu} = 0, \quad y_\mu \frac{\partial z''}{\partial x_\nu} + y_\nu \frac{\partial z''}{\partial x_\mu} = 0 \qquad (\mu, \nu = 1 \ldots n),$$

also ist z'' von den x_ν und y_ν frei und eine Function von z allein; andrerseits aber erhält man:

$$2z \frac{\partial z''}{\partial z} = 2z',$$

also wird: $z'' = z$. Ferner ist:

$$x_\mu q_\mu = x''_\mu q''_\mu, \quad y_\mu p_\mu = y''_\mu p''_\mu,$$

es ergiebt sich daher:

$$x_\mu p_\nu - y_\nu q_\mu = x_\mu \cdot \frac{y''_\nu p'_\nu}{y_\nu} - y_\nu \cdot \frac{x''_\mu q''_\mu}{x_\mu}$$
$$= x''_\mu p''_\nu \quad - y''_\nu q''_\mu$$

das heisst:

$$x_\mu y''_\nu = x''_\mu y_\nu \quad (\mu, \nu = 1 \ldots n)$$

oder:

$$x''_\mu = x_\mu \cdot \varrho\,(x_1 \ldots x_n, \quad y_1 \ldots y_n, z)$$
$$y''_\mu = y_\mu \cdot \varrho\,(x_1 \ldots x_n, \quad y_1 \ldots y_n, z)$$
$$(\mu = 1 \ldots n).$$

Nun aber bekommen wir:

$$x_\mu q_\mu = x_\mu \varrho\, q''_\mu + \sum_1^n{}_\tau\, x_\mu \left\{ x_\tau \frac{\partial \varrho}{\partial y_\mu} p''_\tau + y_\tau \frac{\partial \varrho}{\partial y_\mu} q''_\tau \right\}$$

$$y_\mu p_\mu = y_\mu \varrho\, p''_\mu + \sum_1^n{}_\tau\, y_\mu \left\{ x_\tau \frac{\partial \varrho}{\partial x_\mu} p''_\tau + y_\tau \frac{\partial \varrho}{\partial x_\mu} q''_\tau \right\}$$

und diese Ausdrücke müssen bezüglich mit $x''_\mu q''_\mu$ und $y''_\mu p''_\mu$ übereinstimmen; folglich verschwinden alle Differentialquotienten von ϱ nach den x_μ und y_μ, das heisst: ϱ ist höchstens eine Function von z allein. Endlich ergiebt sich aus (23′):

$$U + zr = \left(\varrho + 2z \frac{\partial \varrho}{\partial z}\right) \sum_1^n{}_\nu\, (x_\nu p''_\nu + y_\nu q''_\nu) + 2zr''$$
$$= U'' + z''r'',$$

also ist auch $\frac{\partial \varrho}{\partial z} = 0$, mit andern Worten: ϱ ist eine Constante und zwar hat es offenbar den Werth 1.

Die einzige Transformation (22′) von der oben definirten Beschaffenheit ist demnach die identische Transformation; hieraus aber ergiebt sich sofort, dass die allgemeinste Transformation (22), bei der die Gruppe (21) wieder in eine projective Gruppe übergeht, projectiv ist und die Form:

$$x'_\mu = \frac{x_\mu}{F}, \quad y'_\mu = \frac{y_\mu}{F}, \quad z' = \frac{z}{F}$$
$$(\mu = 1 \ldots n)$$

besitzt, unter F einen Ausdruck von der Form:

$$F = 1 - \sum_1^n{}_\nu\, (\alpha_\nu x_\nu + \beta_\nu y_\nu) - \tfrac{1}{2}\gamma z$$

verstanden. Also:

Theorem 20. *Die projective Gruppe eines nichtausgearteten linearen Complexes im Raume von $2n + 1$ Dimensionen kann nur durch eine projective Transformation dieses Raumes wieder in eine projective Gruppe übergeführt werden.*

Hiermit ist die Aufgabe, die wir uns in der Einleitung des gegenwärtigen Kapitels gestellt haben, vollständig erledigt.

Kapitel 16.

Bestimmung aller endlichen continuirlichen Gruppen des R_n, die möglichst transitiv sind.

In Uebereinstimmung mit der Ausdrucksweise der Substitutionentheorie nennen wir eine r-gliedrige Gruppe des R_n m-fach transitiv*), wenn sie mindestens eine Transformation enthält, bei der m gegebene Punkte von allgemeiner gegenseitiger Lage in m beliebig gewählte Punkte dieser Art übergehen, während sie keine Transformation enthält, bei der $m+1$ gegebene Punkte von allgemeiner gegenseitiger Lage in $m+1$ beliebig gewählte derartige Punkte übergeführt werden.

Hält man bei einer m-fach transitiven Gruppe des R_n l Punkte von allgemeiner gegenseitiger Lage fest, so werden die Punkte des R_n stets noch transitiv transformirt, wenn $l < m$ ist, dagegen intransitiv, wenn $l \geqq m$ ist. Hieraus folgt, dass bei einer m-fach transitiven Gruppe des R_n $l \leqq m$ Punkte noch keine Invariante haben, dass dagegen $m+1$ Punkte mindestens eine Invariante haben**). Man

---

*) Diese Ausdrucksweise, die wir schon in Abschn. I auf S. 631 angewendet haben, hat allerdings insofern etwas missliches, als man nach ihr zum Beispiel jede transitive Gruppe des R_n, die weniger als $2n$ Parameter enthält, einfach transitiv nennen müsste, während wir doch gewohnt sind, nur die n-gliedrigen transitiven Gruppen des R_n als einfach transitiv zu bezeichnen (s. Abschn. I, S. 212). Da jedoch der Begriff m-fach transitiv überhaupt nur in dem gegenwärtigen Kapitel eine Rolle spielt, so glauben wir die Bezeichnung „m-fach transitiv" beibehalten zu dürfen, ohne Missverständnisse befürchten zu müssen.

**) In seiner Arbeit „Erweiterung des Invariantenbegriffs (Math. Ann. Bd. 35, S. 423 ff.) beschäftigt sich Herr Killing mit den Invarianten mehrerer Punkte gegenüber einer endlichen continuirlichen Gruppe und leitet eine Reihe Sätze über diese Invarianten ab. Diese Sätze sind jedoch sämmtlich schon in den Entwickelungen auf S. 218—220 von Abschn. I enthalten; auch der Satz, dass jede Gruppe vollständig bestimmt ist, wenn man die Invarianten genügend vieler Punkte gegenüber der Gruppe kennt, macht hiervon keine Ausnahme, denn dieser Satz folgt unmittelbar aus der a. a. O. auf S. 220 gemachten Bemerkung, dass man stets zu einer Zahl ϱ_m kommt, die verschwindet, während zugleich auch alle Zahlen $\varrho_{m+1}, \varrho_{m+2} \cdots$ gleich Null sind. Uebrigens hat Herr Killing übersehen, dass die endlichen Gleichungen der Gruppe im Allgemeinen durch die Invarianten nicht eindeutig bestimmt sind, sie sind es nämlich nur dann, wenn man als Invarianten die Hauptlösungen des vollständigen Systems wählt, das die Invarian-

erkennt daher leicht, dass man auch sagen kann: *Eine r-gliedrige Gruppe des R_n ist dann und nur dann m-fach transitiv, wenn bei ihr erst $m+1$ Punkte eine Invariante haben, während m oder weniger Punkte noch keine Invariante haben* (vgl. Abschn. I, S. 218 ff.).

In Abschnitt I auf S. 632 haben wir bereits zwei Sätze über die Gruppen mit möglichst grosser Transitivität aufgestellt. Der erste dieser beiden Sätze sagt aus, dass die Zahl m höchstens den Werth $n+2$ haben könne, der zweite, dass jede $(n+2)$-fach transitive Gruppe des R_n mit der allgemeinen projectiven Gruppe dieses Raumes ähnlich sei. Wir sehen uns jedoch veranlasst, hier auf diese Sätze zurückzukommen.

Die damaligen Beweise beider Sätze enthalten nämlich eine Lücke*), denn es wird in diesen Beweisen als selbstverständlich angenommen, dass bei einer m-fach transitiven Gruppe des R_n die ∞^{n-1} Linienelemente durch jeden festgehaltenen Punkt von allgemeiner Lage $(m-1)$-fach transitiv transformirt werden, es wird also, so können wir es ausdrücken, von der Transitivität der Gruppe im Endlichen sogleich auf die Transitivität der Gruppe im Infinitesimalen geschlossen; dieser Schluss ist aber im Allgemeinen unzulässig und, wenn er auch im vorliegenden Falle richtig ist, so bedarf er immer noch einer näheren Begründung.

Wir werden deshalb jetzt die damals aufgestellten Sätze von Neuem beweisen, aber auf einem ganz andern Wege. Das Folgende ist demnach nicht sowohl eine Ausfüllung der früher gebliebenen Lücke, als vielmehr eine vollständig neue Ableitung jener Sätze, eine Ableitung, die zum grössten Theil von ziemlich elementarem Charakter ist, sie macht nämlich wenigstens beim Beweise des ersten der beiden Sätze von dem schwierigen Begriffe der Transitivität im Infinitesimalen gar keinen Gebrauch.

Die Bestimmung der endlichen continuirlichen Gruppen von möglichst grosser Transitivität wird uns in den beiden ersten Paragraphen des gegenwärtigen Kapitels beschäftigen. Im dritten Paragraphen bringen wir dann noch gewisse Untersuchungen, die einen ganz ähnlichen Zweck

---

ten definirt. — Eine Bemerkung, die in Abschn. I nicht ausdrücklich gemacht ist, mag hier noch erwähnt werden, sie besteht darin, dass die Invarianten beliebig vieler Punkte gegenüber einer r-gliedrigen Gruppe sich im ungünstigsten Falle durch die Invarianten von r Punkten ausdrücken lassen. Diese Bemerkung, die Herrn Killing entgangen ist, folgt ohne Weiteres aus Abschn. I, S. 66, Satz 5; Lie hat zuerst in den Leipziger Berichten von 1889, S. 288 darauf hingewiesen.

*) Hierauf hat Lie bereits im WH. 91—92 in seinem Seminare aufmerksam gemacht und zugleich die hier folgenden neuen Beweise beider Sätze mitgetheilt.

verfolgen, wir zeigen da nämlich, dass sich für die primitiven Gruppen des R_n eine blos von der Zahl n abhängige obere Gränze angeben lässt, welche von den Gliederzahlen dieser Gruppen sicher niemals überschritten wird. Diese Untersuchungen sind jedoch nur als vorläufig zu betrachten, denn die Gränze, zu der wir gelangen, ist noch viel zu hoch; es muss späteren Arbeiten vorbehalten bleiben, diese obere Gränze auf ihren niedrigsten Werth zurückzuführen.

§ 69.

Wir beweisen zunächst den Satz, dass eine endliche continuirliche Gruppe des R_n höchstens $(n+2)$-fach transitiv sein kann.

Für $n = 1$ ist dieser Satz sicher richtig, denn erstens giebt es auf der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit keine endliche continuirliche Gruppe mit mehr als drei Parametern (s. S. 3) und zweitens ist jede dreigliedrige Gruppe der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit nothwendig $(1+2)$-fach transitiv; dass es auch wirklich dreigliedrige Gruppen giebt, zeigt die allgemeine projective Gruppe der betreffenden Mannigfaltigkeit.

Um nun den Satz allgemein zu beweisen, nehmen wir an, dass er für den Raum von n und für alle Räume von weniger Dimensionen richtig ist, und zeigen, dass er unter dieser Voraussetzung auch im Raume von $n+1$ Dimensionen gilt. Da er für $n = 1$ sicher richtig ist, ist er dann für jedes n bewiesen.

Wir nehmen also als bewiesen an, dass in keinem Raume von $m < n+1$ Dimensionen eine endliche continuirliche Gruppe existirt, deren Transitivität grösser ist als $(m+2)$-fach; wir werden beweisen, dass unter dieser Voraussetzung im Raume von $n+1$ Dimensionen keine endliche continuirliche Gruppe existirt, deren Transitivität grösser ist als $(n+3)$-fach.

Es sei G eine endliche continuirliche Gruppe des R_{n+1}, die möglichst transitiv ist. Da die allgemeine projective Gruppe des R_{n+1} schon $(n+3)$-fach transitiv ist, muss dann G mindestens auch $(n+3)$-fach transitiv sein; zugleich ist klar, dass, wenn G r-gliedrig ist, r mindestens den Werth $(n+1)(n+3)$ haben muss.

Wir zeigen zunächst, dass G nothwendig primitiv ist.

In der That, wäre G imprimitiv, so zerlegte es den R_{n+1} in eine invariante Schaar von ∞^m $(n+1-m)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten M_{n+1-m} $(0<m<n+1)$; durch jeden Punkt von allgemeiner Lage ginge eine und nur eine solche Mannigfaltigkeit und diese bliebe stets mit in Ruhe, sobald man den betreffenden Punkt festhielte. Bei

G würden nun die ∞ Mannigfaltigkeiten der bewussten Schaar durch eine isomorphe Gruppe $\mathfrak{G}$ unter einander vertauscht und diese Gruppe $\mathfrak{G}$ könnte als eine endliche continuirliche Gruppe in $m < n+1$ Veränderlichen höchstens $(m+2)$-fach transitiv sein, das heisst, sobald man $m+2$ verschiedene M_{n+1-m} von allgemeiner gegenseitiger Lage festhielte, könnten die ∞^m M_{n+1-m} nicht mehr transitiv transformirt werden. Hielte man nun auf $m+2$ verschiedenen M_{n+1-m} von allgemeiner gegenseitiger Lage je einen Punkt von allgemeiner Lage fest, so blieben die betreffenden M_{n+1-m} sämmtlich in Ruhe und es würden daher die ∞^m M_{n+1-m} nicht mehr transitiv transformirt; dann aber würden offenbar auch die Punkte des R_{n+1} nicht mehr transitiv transformirt, das heisst G wäre überhaupt nur $(m+2)$-fach transitiv, also im günstigsten Falle, wenn nämlich m den Werth n hätte, gerade $(n+2)$-fach transitiv, während es doch mindestens $(n+3)$-fach transitiv sein sollte. Das ist ein Widerspruch, folglich muss G primitiv sein.

Denken wir uns jetzt die infinitesimalen Transformationen von G in der Umgebung eines Punktes $x_1^0 \ldots x_{n+1}^0$ von allgemeiner Lage nach Potenzen von: $x_1 - x_1^0, \ldots, x_{n+1} - x_{n+1}^0$ entwickelt.

Die r-gliedrige Gruppe G ist als primitive Gruppe zugleich transitiv und enthält daher in der Umgebung von $x_1^0 \ldots x_n^0$ gerade $r-n-1$ unabhängige infinitesimale Transformationen von erster oder höherer Ordnung in den $x_\nu - x_\nu^0$; diese infinitesimalen Transformationen erzeugen eine $(r-n-1)$-gliedrige Untergruppe g von G (s. Abschn. I, S. 205, Satz 1). Unter den infinitesimalen Transformationen von g kann es höchstens $(n+1)^2$ solche geben, die in den $x_\nu - x_\nu^0$ von der ersten Ordnung sind und aus denen sich keine von zweiter oder höherer Ordnung linear ableiten lässt. Nun ist aber r mindestens gleich $(n+1)(n+3)$ und also $r-n-1$ mindestens gleich: $(n+1)(n+2)$, folglich enthält g mindestens: $(n+1)(n+2) - (n+1)^2 = n+1$ unabhängige infinitesimale Transformationen, die in den $x_\nu - x_\nu^0$ von zweiter oder höherer Ordnung sind.

Nach Abschnitt I, Theor. 29, S. 192 gehört zu g eine endliche positive ganze Zahl s von solcher Beschaffenheit, dass g noch infinitesimale Transformationen von s^{ter} Ordnung in den $x_\nu - x_\nu^0$ enthält, dagegen keine von $(s+1)^{\text{ter}}$ oder höherer Ordnung. In unserm Falle ist diese Zahl s mindestens gleich 2. Nehmen wir daher an, dass g gerade l unabhängige infinitesimale Transformationen von s^{ter} Ordnung enthält, etwa:

$$Z_j f = \sum_1^{n+1} {}_\nu \xi_{j\nu}(x_1 \ldots x_{n+1}) \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \quad (j = 1 \ldots l),$$

so folgt aus Abschn. I, S. 263 f., dass $Z_1 f \ldots Z_l f$ paarweise vertauschbar sind und eine invariante Untergruppe von g erzeugen.

Ist die Gruppe: $Z_1 f \ldots Z_l f$ intransitiv, so bestimmen die Gleichungen:

$$Z_1 f = 0, \ldots, Z_l f = 0$$

ein bei g invariantes vollständiges System, das mindestens eine Lösung besitzt; g ist also imprimitiv und infolgedessen, wie die Entwickelungen auf S. 298 f. zeigen, höchstens $(n+2)$-fach transitiv. Hieraus ergiebt sich sofort, dass G selbst in diesem Falle höchstens $(n+3)$-fach transitiv sein kann.

Ist andrerseits die Gruppe: $Z_1 f \ldots Z_l f$ transitiv, so enthält sie $n+1$ unabhängige infinitesimale Transformationen: $\mathfrak{Z}_1 f \ldots \mathfrak{Z}_{n+1} f$, die durch keine Relation:

$$\sum_1^{n+1} \varphi_\nu (x_1 \ldots x_{n+1}) \mathfrak{Z}_\nu f = 0$$

verknüpft sind. Da nun alle Zf paarweise vertauschbar sind, so sind es auch die $\mathfrak{Z} f$ und $\mathfrak{Z}_1 f \ldots \mathfrak{Z}_{n+1} f$ erzeugen daher eine $(n+1)$-gliedrige einfach transitive Gruppe von vertauschbaren Transformationen. Nach Abschn. I, Theor. 64, S. 340 ist diese Gruppe durch eine Punkttransformation des R_{n+1} mit der Gruppe:

$$(1) \qquad \frac{\partial f}{\partial y_1}, \frac{\partial f}{\partial y_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y_{n+1}}$$

ähnlich; bedenken wir überdies, dass jede infinitesimale Transformation in $y_1 \ldots y_{n+1}$, die mit allen infinitesimalen Transformationen (1) vertauschbar ist, aus den Transformationen (1) linear abgeleitet werden kann, so erkennen wir, dass die Gruppe: $Z_1 f \ldots Z_l f$ mit der Gruppe: $\mathfrak{Z}_1 f \ldots \mathfrak{Z}_{n+1} f$ zusammenfällt und demnach selbst mit der Gruppe (1) ähnlich ist. Schliesslich ist noch zu beachten, dass $Z_1 f \ldots Z_l f$ eine invariante Untergruppe von g ist; g muss sich also bei Einführung der neuen Veränderlichen $y_1 \ldots y_{n+1}$ in eine Gruppe γ verwandeln, in der (1) als invariante Untergruppe steckt. Nun aber ist leicht zu sehen, das jede Transformation, bei der die Gruppe (1) invariant bleibt, der allgemeinen linearen Gruppe des R_{n+1} angehört, und da diese allmeine lineare Gruppe blos $(n+1)(n+2)$ Parameter hat, so können wir schliessen, dass g in dem vorliegenden Falle höchstens $(n+1)(n+2)$ Parameter enthält. Kehren wir daher zu G zurück, so finden wir, dass G höchstens $(n+1)(n+3)$-gliedrig sein kann, und damit ist bewiesen, dass G auch in dem hier betrachteten Falle höchstens $(n+3)$-fach transitiv ist.

Durch die vorstehenden Auseinandersetzungen ist gezeigt, dass

unser Satz wirklich auch für den Raum von $n+1$ Dimensionen richtig ist, sobald er in jedem Raume von weniger Dimensionen gilt; da er nun in dem Raume von einer Dimension sicher richtig ist, so ist er nunmehr, wie wir schon früher hervorhoben, allgemein bewiesen. Wir können also sagen:

Theorem 21. *Im Raume von n Dimensionen giebt es keine endliche continuirliche Gruppe, deren Transitivität grösser ist als $(n+2)$-fach, mit andern Worten: bei jeder endlichen continuirlichen Gruppe des R_n haben $n+3$ Punkte mindestens eine Invariante* *).

Ausserdem liefern uns die bisherigen Entwickelungen noch den folgenden

Satz 1. *Ist eine endliche continuirliche Gruppe des R_n $(n+2)$-fach transitiv, haben also bei ihr $n+2$ Punkte noch keine Invariante, so ist diese Gruppe sicher primitiv. Zerlegt andrerseits eine imprimitive endliche continuirliche Gruppe des R_n diesen Raum in eine invariante Schaar von ∞^m $(n-m)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten, so ist sie höchstens $(m+2)$-fach transitiv, das heisst, bei ihr haben $m+3$ Punkte jedenfalls eine Invariante.*

Hier wollen wir noch die beiden Sätze ausdrücklich aufstellen:

Satz 2. *Sind die infinitesimalen Transformationen einer* transitiven *Gruppe des R_n paarweise vertauschbar, so ist die Gruppe einfach transitiv und durch eine Punkttransformation des R_n mit der Gruppe: $p_1 \ldots p_n$ aller Translationen dieses Raumes ähnlich.*

Satz 3. *Im R_n giebt es keine unendliche Gruppe von Punkttransformationen, in der die Gruppe: $p_1 \ldots p_n$ aller Translationen des R_n als invariante Untergruppe enthalten wäre; die grösste endliche Gruppe des R_n, in der die Gruppe: $p_1 \ldots p_n$ aller Translationen als invariante Untergruppe steckt, ist die allgemeine lineare Gruppe dieses Raumes.*

Diese beiden Sätze sind in den auf S. 300 angestellten Betrachtungen enthalten.

§ 70.

Nunmehr ist noch der Satz zu beweisen, dass jede $(n+2)$-fach transitive Gruppe des R_n gerade $n(n+2)$-gliedrig ist und durch eine Punkttransformation in die allgemeine projective Gruppe dieses Raumes übergeführt werden kann.

*) Es ist selbstverständlich, dass für die Transitivität der unendlichen continuirlichen Gruppen keine solche obere Gränze angebbar ist, das zeigt schon die unendliche Gruppe aller Punkttransformationen, die offenbar unendlichfach transitiv ist.

Auch dieser Satz ist für $n = 1$ sicher richtig, denn in der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit giebt es, wie wir wissen, keine Gruppen mit mehr als drei Parametern und jede dreigliedrige Gruppe ist mit der allgemeinen projectiven Gruppe dieser Mannigfaltigkeit ähnlich (s. Theor. 1, S. 6). Wir verfahren daher wie im vorigen Paragraphen, das heisst wir nehmen an, dass unser Satz in jedem Raume von n und von weniger Dimensionen richtig ist, und zeigen, dass er dann auch im Raume von $n + 1$ Dimensionen gilt.

Wir setzen also voraus, dass es für $n \gtreqless 1$ in jedem Raume von $m < n + 1$ Dimensionen bewiesen ist, dass alle $(m + 2)$-fach transitiven Gruppen des betreffenden Raumes mit der allgemeinen projectiven Gruppe dieses Raumes ähnlich sind; unter dieser Voraussetzung suchen wir alle $(n + 3)$-fach transitiven Gruppen des R_{n+1}.

Ist G eine Gruppe von der verlangten Beschaffenheit, so hat es mindestens $(n + 1)(n + 3)$ Parameter und ist sicher primitiv. Wie im vorigen Paragraphen betrachten wir nun in der Umgebung eines Punktes: $x_1^0 \ldots x_{n+1}^0$ von allgemeiner Lage alle infinitesimalen Transformationen von G, die in den $x_\nu - x_\nu^0$ von erster oder höherer Ordnung sind. Die von diesen infinitesimalen Transformationen erzeugte Untergruppe nennen wir wieder g; von g wissen wir dann Folgendes: g hat mindestens $(n + 1)(n + 2)$ Parameter und ist gerade $(n + 2)$-fach transitiv, es enthält ferner jedenfalls gewisse infinitesimale Transformationen von zweiter Ordnung in den $x_\nu - x_\nu^0$; ist endlich $s > 1$ die höchste Ordnung, die eine in g vorkommende infinitesimale Transformation haben kann, so sind alle infinitesimalen Transformationen s^{ter} Ordnung:

$$\mathfrak{X}_j^{(s)} f = \sum_1^{n+1} {}_\nu \xi_{j\nu}(x_1 \ldots x_{n+1}) \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \qquad (j = 1 \ldots l)$$

von g paarweise vertauschbar und erzeugen eine invariante Untergruppe von g.

Hier sind nun zwei Fälle zu unterscheiden, denn die Gruppe: $\mathfrak{X}_1^{(s)} f \ldots \mathfrak{X}_l^{(s)} f$ kann entweder transitiv sein oder intransitiv; diese beiden Fälle müssen wir getrennt behandeln.

Wenn die Gruppe: $\mathfrak{X}_1^{(s)} f \ldots \mathfrak{X}_l^{(s)} f$ transitiv ist, so ist sie, wie wir im vorigen Paragraphen gesehen haben, einfach transitiv und mit der Gruppe:

$$(1) \qquad \frac{\partial f}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial y_{n+1}}$$

durch eine Punkttransformation ähnlich; überdies verwandelt sich g bei Einführung der Veränderlichen $y_1 \ldots y_{n+1}$ in eine Gruppe g' von linearen Transformationen. Nun aber hat g und also auch g' mindestens $(n+1)(n+2)$ Parameter und andrerseits hängt die allgemeinste lineare Transformation des R_{n+1} gerade von $(n+1)(n+2)$ Parametern ab, folglich müssen g und g' beide gerade $(n+1)(n+2)$ Parameter haben und g' insbesondere muss mit der allgemeinen linearen Gruppe des R_{n+1} zusammenfallen.

Es lässt sich zeigen, dass man hierdurch auf einen Widerspruch geführt wird.

In der That, die allgemeine lineare Gruppe g' des R_{n+1} ist primitiv und transformirt die ∞^n Linienelemente durch jeden festgehaltenen Punkt von allgemeiner Lage in allgemeinster Weise. Dasselbe muss natürlich auch von der mit g' ähnlichen Gruppe g gelten, und da g eine Untergruppe von G ist, so muss auch G die ∞^n Linienelemente durch jeden Punkt von allgemeiner Lage in allgemeinster Weise transformiren. Bedenken wir daher, dass G eine endliche continuirliche Gruppe ist und dass es mindestens $(n+1)(n+3)$ Parameter enthält, so erkennen wir aus Abschn. I, Theor. 112, S. 631, dass G gerade $(n+1)(n+3)$-gliedrig ist und dass es bei geeigneter Wahl der Veränderlichen $x_1 \ldots x_{n+1}$ mit der allgemeinen projectiven Gruppe des R_{n+1} zusammenfällt. Bei dieser Wahl der Veränderlichen wird aber g die grösste projective Gruppe des R_{n+1}, bei der ein Punkt $x_1^0 \ldots x_{n+1}^0$ von allgemeiner Lage invariant bleibt, g wird also imprimitiv, während es doch primitiv sein sollte. Das ist ein Widerspruch, folglich kann der Fall, dass die oben besprochene Gruppe: $\mathfrak{X}_1^{(s)}f \ldots \mathfrak{X}_t^{(s)}f$ transitiv ist, hier gar nicht eintreten.

Betrachten wir jetzt den zweiten noch möglichen Fall, dass die Gruppe: $\mathfrak{X}_1^{(s)}f \ldots \mathfrak{X}_t^{(s)}f$ intransitiv ist.

In diesem Falle ist die Gruppe g, wie wir schon im vorigen Paragraphen gesehen haben, imprimitiv, sie zerlegt also den R_{n+1} in eine invariante Schaar von ∞^m $(n+1-m)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten, wo m eine der Zahlen $1, 2, \ldots n$ ist. Nun aber kann nach S. 301, Satz 1 eine endliche continuirliche Gruppe des R_{n+1}, die den Raum in dieser Weise zerlegt, höchstens $(m+2)$-fach transitiv sein, andrerseits soll aber g gerade $(n+2)$-fach transitiv sein, folglich ergiebt sich, dass $m = n$ ist und dass g den R_{n+1} in eine invariante Schaar von ∞^n Curven zerlegt.

Um g näher zu bestimmen, denken wir uns an Stelle von $x_1 \ldots x_{n+1}$

solche neue Veränderliche $y_1 \ldots y_{n+1}$ eingeführt, dass die eben erwähnten ∞^n Curven durch die Gleichungen:

$$y_1 = \text{const.}, \ldots, y_n = \text{const.} \tag{2}$$

dargestellt werden. Bei Einführung dieser neuen Veränderlichen erhält g die Form:

$$\sum_1^n{}_\nu \eta_{k\nu}(y_1 \ldots y_n) q_\nu + \eta_{k,\,n+1}(y_1 \ldots y_{n+1}) q_{n+1} \qquad (k = 1, 2 \ldots).$$

Die Curven (2) ihrerseits werden bei g durch die mit g isomorphe verkürzte Gruppe:

$$\sum_1^n{}_\nu \eta_{k\nu}(y_1 \ldots y_n) q_\nu \quad (k = 1, 2 \ldots) \tag{3}$$

transformirt. Da nun aber g $(n+2)$-fach transitiv ist, muss es offenbar auch die ∞^n Curven (2) $(n+2)$-fach transitiv transformiren, die mit g isomorphe Gruppe (3) in den n Veränderlichen $y_1 \ldots y_n$ muss also ebenfalls $(n+2)$-fach transitiv sein. Unter den gemachten Voraussetzungen ist daher diese Gruppe (3) durch eine Punkttransformation des R_n mit der allgemeinen projectiven Gruppe dieses Raumes ähnlich, das heisst sie kann bei geeigneter Wahl von $y_1 \ldots y_n$ die Form:

$$q_k, \; y_\nu q_k, \; y_\nu \sum_1^n{}_\tau y_\tau q_\tau \qquad (k, \nu = 1 \ldots n)$$

erhalten. Die Gruppe g selbst bekommt bei dieser Wahl der Veränderlichen y eine solche Gestalt, dass sie erstens $n(n+2)$ unabhängige infinitesimale Transformationen von der Form:

$$\begin{cases} q_k + \alpha_k(y_1 \ldots y_{n+1}) q_{n+1} \\ y_\nu q_k + \beta_{\nu k}(y_1 \ldots y_{n+1}) q_{n+1} \\ y_\nu \sum_1^n{}_\tau y_\tau q_\tau + \gamma_\nu(y_1 \ldots y_{n+1}) q_{n+1} \end{cases} \qquad (k, \nu = 1 \ldots n) \tag{4}$$

enthält und zweitens noch eine gewisse Anzahl, etwa h unabhängige infinitesimale Transformationen:

$$F_1(y_1 \ldots y_{n+1}) q_{n+1}, \ldots, F_h(y_1 \ldots y_{n+1}) q_{n+1}, \tag{5}$$

bei denen jede einzelne der ∞^n Curven (2) invariant bleibt. Die infinitesimalen Transformationen (5) erzeugen hier eine h-gliedrige invariante Untergruppe von g (s. Abschn. I, S. 307, Satz 5); die Zahl h dieser infinitesimalen Transformationen (5) ist mindestens gleich $n+2$, denn die Gruppe g muss ja mindestens $(n+1)(n+2)$ Parameter enthalten.

Da die invariante Untergruppe (5) von g nicht auf die identische Substitution zusammenschrumpfen kann, transformirt sie die Punkte jeder Geraden (2) von allgemeiner Lage mindestens eingliedrig, sie kann daher (vgl. S. 155), wenn man eine geeignete Function von $y_1 \ldots y_{n+1}$ als neues y_{n+1} einführt, stets auf eine der drei Formen:

$$(5') \qquad F_1(y_1 \ldots y_n)\, q_{n+1}, \ldots, F_h(y_1 \ldots y_n)\, q_{n+1}$$

$$(5'') \qquad F_1(y_1 \ldots y_n)\, q_{n+1}, \ldots, F_{h-1}(y_1 \ldots y_n)\, q_{n+1},\ y_{n+1} q_{n+1}$$

$$(5''') \qquad q_{n+1},\ y_{n+1} q_{n+1},\ y_{n+1}^2 q_{n+1}$$

gebracht werden, ohne dass sich dabei die infinitesimalen Transformationen (4) wesentlich ändern; doch kann die dritte von diesen Formen jedenfalls nur dann auftreten, wenn $n = 1$ ist, denn nur in diesem Falle ist die Gliederzahl der Gruppe (5‴) gleich $n + 2$, was ja der kleinste Werth ist, den diese Gliederzahl haben kann.

Um nun die Ergebnisse, die wir über die Gruppe g erhalten haben, zur Bestimmung der Gruppe G verwerthen zu können, wollen wir uns ins Gedächtniss zurückrufen, in welchem Zusammenhange die Gruppen g und G stehen.

Wir gelangten zu g, indem wir in dem $(n + 1)$-fach ausgedehnten Raume der Gruppe G einen Punkt: $x_1^0 \ldots x_{n+1}^0$ von allgemeiner Lage festhielten: g ist nichts andres als die grösste continuirliche Untergruppe von G, bei der dieser Punkt invariant bleibt. Nun ist unser ganzer Zweck nur der, zu beweisen, dass G mit der allgemeinen projectiven Gruppe des R_{n+1} ähnlich ist, und dieser Zweck ist erreicht, wenn es uns gelingt zu beweisen, dass die grösste continuirliche Untergruppe g von G, die den Punkt $x_1^0 \ldots x_{n+1}^0$ stehen lässt, die ∞^n Linienelemente durch diesen Punkt in allgemeinster Weise, das heisst: $n(n + 2)$-gliedrig transformirt; denn besitzt g diese Eigenschaft, so ist G als eine endliche continuirliche Gruppe mit mindestens $(n + 1)(n + 3)$ Parametern sicher mit der allgemeinen projectiven Gruppe des R_{n+1} ähnlich (s. Abschn. I, Theor. 112, S. 631).

Versuchen wir daher, ob sich aus den bisher gefundenen Eigenschaften der Gruppe g schliessen lässt, wie diese Gruppe die ∞^n Linienelemente durch den invarianten Punkt $x_1^0 \ldots x_{n+1}^0$ transformirt.

Es ist klar, dass die ∞^n Linienelemente durch den Punkt: $x_1^0 \ldots x_{n+1}^0$ bei g durch eine mit g isomorphe Gruppe $\mathfrak{g}$ transformirt werden und dass diese Gruppe $\mathfrak{g}$ projectiv ist.

Holoedrisch isomorph mit g kann $\mathfrak{g}$ nicht sein, denn g enthält mindestens $(n + 1)(n + 2)$ Parameter, während $\mathfrak{g}$ als eine projective Gruppe des Raumes von n Dimensionen höchstens $n(n+2)$ Parameter

enthält. Demnach ist $\mathfrak{g}$ sicher nur meroedrisch isomorph mit g. Andrerseits darf $\mathfrak{g}$ nicht aus lauter vertauschbaren Transformationen bestehen und überhaupt keine *integrable* Gruppe sein (vgl. S. 262). Wäre nämlich $\mathfrak{g}$ integrabel, so liesse es nach Abschn. I, S. 589, Satz 4 mindestens ein Linienelement durch den Punkt $x_1^0 \ldots x_{n+1}^0$ in Ruhe, bei G wäre also mit jedem Punkte von allgemeiner Lage ein hindurchgehendes Linienelement invariant verknüpft. Hieraus aber würde folgen, dass G ein simultanes System von gewöhnlichen Differentialgleichungen invariant liesse, das heisst G wäre imprimitiv, während es doch, wie wir wissen, primitiv sein muss.

Auf Grund dieser Bemerkungen werden wir jetzt leicht dazu gelangen, die Gliederzahl von $\mathfrak{g}$ zu bestimmen.

Nach Abschn. I, S. 305 kann man die Zusammensetzung aller mit g isomorphen Gruppen sofort angeben, sobald man alle invarianten Untergruppen von g kennt. Nun haben wir gesehen, dass g durch Einführung gewisser neuer Veränderlicher: $y_1 \ldots y_{n+1}$ entweder auf die Form: (4), (5′) oder auf die Form: (4), (5″) oder endlich auf die Form: (4), (5‴) gebracht werden kann, auf die letzte Form allerdings jedenfalls nur dann, wenn n den Werth 1 hat. Wir müssen daher diese drei möglichen Formen von g der Reihe nach durchgehen und bei jeder Form die auftretenden invarianten Untergruppen bestimmen; jede solche invariante Untergruppe liefert uns die Zusammensetzung einer Gruppe, die mit g isomorph ist, wenn g auf die gerade betrachtete Form gebracht werden kann. Unter den so gefundenen Zusammensetzungen müssen wir endlich alle die ausschliessen, die integrabel sind, denn $\mathfrak{g}$ darf ja nicht integrabel sein; die dann noch übrigen Zusammensetzungen sind die einzigen, die $\mathfrak{g}$ möglicherweise haben kann. Dabei ist jedoch immer noch zu berücksichtigen, dass $\mathfrak{g}$ höchstens $n(n+2)$-gliedrig sein kann.

Lässt sich g auf die Form (4), (5′) bringen, so sind, was die invarianten Untergruppen von g anlangt, zwei Fälle zu unterscheiden. Jede invariante Untergruppe der Gruppe (4), (5′) enthält nämlich entweder nur infinitesimale Transformationen von der Form (5′) oder sie enthält auch mindestens eine infinitesimale Transformation, die sich nicht aus denen von der Form (5′) linear ableiten lässt.

Der erste Fall liefert lauter solche mit der Gruppe (4), (5′) isomorphe Gruppen, die mindestens $n(n+2)$ Parameter enthalten. Der zweite Fall dagegen kommt hier überhaupt nicht in Betracht. Enthält nämlich eine invariante Untergruppe der Gruppe (4), (5′) auch nur eine infinitesimale Transformation von der Form:

$$(6)\qquad \begin{cases} \sum_{v}^{1\ldots n} a_v q_v + \sum_{kv}^{1\ldots n} b_{kv} y_k q_v + \\ + \sum_{v}^{1\ldots n} c_v y_v \sum_{\tau}^{1\ldots n} y_\tau q_\tau + \varphi(y_1 \ldots y_{n+1}) q_{n+1}, \end{cases}$$

in der die a_v, b_{kv} und c_v nicht alle verschwinden, so enthält sie überhaupt $n(n+2)$ infinitesimale Transformationen von der Form (4) (vgl. Abschn. I, S. 560) und liefert daher eine mit der Gruppe (4), (5′) isomorphe Gruppe, deren infinitesimale Transformationen paarweise vertauschbar sind; oben aber haben wir gesehen, dass die Transformationen von $\mathfrak{g}$ nicht paarweise vertauschbar sein dürfen.

Lässt sich g andrerseits auf die Form (4), (5″) bringen, so ergiebt sich über die invarianten Untergruppen ganz ähnliches. Enthält nämlich eine invariante Untergruppe der Gruppe (4), (5″) nur infinitesimale Transformationen von der Form (5″), so liefert sie eine mit der Gruppe (4), (5″) isomorphe Gruppe, die mindestens $n(n+2)$ Parameter hat. Enthält dagegen eine invariante Untergruppe der Gruppe (4), (5″) auch nur eine infinitesimale Transformation von der Form (6), in der nicht alle a_v, b_{kv}, c_v verschwinden, so enthält sie überhaupt $n(n+2)$ infinitesimale Transformationen von der Form (4) und liefert eine mit der Gruppe (4), (5″) isomorphe Gruppe, die zugleich mit der Gruppe (5″) isomorph und infolgedessen integrabel ist.

Wir sehen hieraus Folgendes: wenn g die Form (4), (5′) oder die Form (4), (5″) erhalten kann, so muss $\mathfrak{g}$ mindestens $n(n+2)$ Parameter enthalten. Da nun $\mathfrak{g}$ nicht mehr als $n(n+2)$ Parameter enthalten kann, so enthält es in beiden Fällen deren gerade $n(n+2)$ und ist die allgemeine projective Gruppe des R_n.

Durch die vorstehenden Betrachtungen ist die Frage nach der Gliederzahl von $\mathfrak{g}$ vollständig erledigt, sobald $n > 1$ ist, dagegen muss, wenn $n = 1$ ist, noch berücksichtigt werden, dass g möglicherweise die Form (4), (5‴) also mit andern Worten die Form:

$$(7)\qquad q_1,\ y_1 q_1,\ y_1^2 q_1,\ q_2,\ y_2 q_2,\ y_2^2 q_2$$

erhalten kann.

Sollte dieser Fall eintreten, so müsste $\mathfrak{g}$ mit der Gruppe (7) isomorph sein und zwar meroedrisch isomorph, da es als eine projective Gruppe der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit höchstens dreigliedrig sein kann. Nun aber enthält die Gruppe (7) blos zwei invariante Untergruppen, nämlich: q_1, $y_1 q_1$, $y_1^2 q_1$ und q_2, $y_2 q_2$, $y_2^2 q_2$; jede mit (7) meroedrisch isomorphe Gruppe, die sich nicht auf die identische

Transformation reducirt, was ja bei $\mathfrak{g}$ ausgeschlossen ist, ist daher dreigliedrig und mit der Gruppe: q_1, $y_1 q_1$, $y_1^2 q_1$ gleichzusammengesetzt. Damit ist bewiesen, dass $\mathfrak{g}$ auch in diesem Falle mit der allgemeinen projectiven Gruppe des R_n identisch ist. Erwähnt sei übrigens, dass der hier betrachtete Fall, dass sich g auf die Form (7) bringen lässt, in Wirklichkeit nie eintreten kann*), doch thut das hier nichts zur Sache, denn es genügt uns ja, zu wissen, dass $\mathfrak{g}$ die nöthige Gliederzahl haben müsste, wenn der Fall wirklich einträte.

Nunmehr ist bewiesen, dass die Gruppe $\mathfrak{g}$ unter allen Umständen mit der allgemeinen projectiven Gruppe des R_n zusammenfällt, dass also g unter den gemachten Voraussetzungen die ∞^n Richtungen durch den invarianten Punkt $x_1^0 \ldots x_{n+1}^0$ in allgemeinster Weise transformirt. Hieraus aber folgt, wie wir schon auf S. 305 hervorhoben, dass G durch eine Punkttransformation des R_{n+1} mit der allgemeinen projectiven Gruppe dieses Raumes ähnlich ist; der Satz, den zu beweisen wir uns vorgenommen hatten, ist also nach S. 302 allgemein bewiesen.

Wir sprechen diesen Satz folgendermassen aus:

Theorem 22. *Ist eine endliche continuirliche Gruppe des n-fach ausgedehnten Raumes $(n+2)$-fach transitiv, besitzen also $n+2$ Punkte der Gruppe gegenüber noch keine Invariante, während $n+3$ Punkte mindestens eine Invariante haben, so ist diese Gruppe gerade $n(n+2)$-gliedrig und durch eine Punkttransformation des R_n mit der allgemeinen projectiven Gruppe dieses Raumes ähnlich.*

Beim Beweise des vorstehenden Satzes haben wir das Theorem 112 des Abschnitts I benutzt, das sich auf die endlichen continuirlichen Gruppen mit möglichst grosser Transitivität im Infinitesimalen bezieht. Es ist nicht ohne Interesse, dass man, auch ohne dieses Theorem zu benutzen, zum Ziele kommen kann, dass man also auch beim Beweise des vorstehenden Theorems den Begriff der Transitivität im Infinitesimalen vermeiden kann. Man würde zu diesem Zwecke folgendermassen verfahren:

Man bestimmt zunächst alle Gruppen von der Form (4), (5′); (4), (5″) und (4), (5‴) und bringt sie durch geeignete Wahl von y_{n+1} auf gewisse Normalformen; die hierzu erforderlichen Rechnungen

*) Das folgt schon aus unsrer Aufzählung aller endlichen Gruppen der Ebene (S. 71—73).

sind, wie wir schon auf S. 178 erwähnt haben, nicht schwierig und ganz ähnlich den auf S. 155—170 durchgeführten. Hat man diese Gruppen bestimmt, so muss man noch feststellen, welche von ihnen $(n+2)$-fach transitiv sind und welche von den $(n+2)$-fach transitiven unter ihnen in einer $(n+3)$-fach transitiven Gruppe enthalten sind. Auch diese Untersuchung macht nicht die geringsten Schwierigkeiten.

Schliesslich sei noch erwähnt, dass man durch ähnliche Betrachtungen auch alle $(n+1)$-fach transitiven Gruppen des R_n finden kann.

§ 71.

In § 69 haben wir gezeigt, dass für die Transitivität der endlichen continuirlichen Gruppen des R_n eine obere Gränze angebbar ist, denn eine solche Gruppe kann, wie sich ergeben hat, höchstens $(n+2)$-fach transitiv sein. In § 70 fanden wir sodann für die Gliederzahl der $(n+2)$-fach transitiven Gruppen des R_n eine obere Gränze, indem wir bewiesen, dass eine solche Gruppe nicht mehr als $n(n+2)$ Parameter enthalten kann. Hierdurch werden wir ganz von selbst auf die Frage geführt, ob sich nicht auch für die Gliederzahlen andrer Kategorien von Gruppen des R_n derartige obere Gränzen angeben lassen.

Die Gliederzahl der transitiven Gruppen des R_n hat, sobald $n>1$ ist, keine obere Gränze, denn schon in der Ebene giebt es transitive Gruppen mit beliebig vielen Parametern (s. S. 71 ff.). Dagegen liegt es sehr nahe zu vermuthen, dass für die Gliederzahl der primitiven Gruppen des R_n eine derartige obere Gränze existirt, denn wir wissen, dass jede primitive Gruppe der Ebene höchstens acht, jede primitive Gruppe des gewöhnlichen Raumes höchstens 15 Parameter enthält.

In der That werden wir jetzt zeigen, dass sich für die Gliederzahl der primitiven Gruppen des R_n eine obere Gränze angeben lässt.

Es sei G eine endliche continuirliche *primitive* Gruppe des R_n und es sei, wie wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen können, der Coordinatenanfang dieser Gruppe gegenüber ein Punkt von allgemeiner Lage. Die Gruppe enthält dann in der Umgebung des Coordinatenanfangs n unabhängige infinitesimale Transformationen:

$$(8) \qquad p_1 + \cdots, \; p_2 + \cdots, \; \cdots, \; p_n + \cdots$$

von nullter Ordnung in den x, ferner λ_1 unabhängige infinitesimale Transformationen von erster Ordnung, aus denen sich keine von zweiter oder höherer Ordnung linear ableiten lässt, endlich überhaupt λ_k unabhängige infinitesimale Transformationen von k^{ter} Ordnung, aus denen

sich keine von $(k+1)^{\text{ter}}$ oder höherer Ordnung linear ableiten lässt. Da die Gruppe endlich ist, giebt es überdies eine endliche positive ganze Zahl $s \geqq 1$ von solcher Beschaffenheit, dass die Gruppe zwar noch infinitesimale Transformationen von s^{ter} Ordnung enthält, dagegen keine von $(s+1)^{\text{ter}}$ oder höherer Ordnung (s. Abschn. I, Kap. 11).

Gelingt es uns nun nachzuweisen, dass die Zahl s bei keiner primitiven Gruppe des R_n eine blos von der Zahl n abhängige obere Gränze überschreiten kann, so ist damit zugleich bewiesen, dass die Gliederzahlen der primitiven Gruppen des R_n eine blos von der Zahl n abhängige obere Gränze nicht überschreiten können, denn eine Gruppe des R_n, bei der die Zahl s nicht grösser ist als die endliche positive ganze Zahl m, enthält offenbar höchstens soviele Parameter, wie die allgemeinste ganze Function m^{ten} Grades von n Veränderlichen.

Um nun zu einer solchen oberen Gränze für die Zahl s zu gelangen, betrachten wir zunächst die infinitesimalen Transformationen s^{ter} Ordnung:

$$X_1^{(s)}f \ldots X_{\lambda_s}^{(s)}f \tag{9}$$

der Gruppe. Da wir s offenbar grösser als 1 voraussetzen können, sind diese infinitesimalen Transformationen paarweise vertauschbar und erzeugen eine λ_s-gliedrige invariante Untergruppe der Gruppe:

$$\begin{cases} X_1^{(1)}f & \ldots \; X_{\lambda_1}^{(1)}f \\ X_1^{(2)}f & \ldots \; X_{\lambda_2}^{(2)}f \\ \cdot & \cdots \quad \cdot \\ X_1^{(s-1)}f & \ldots \; X_{\lambda_{s-1}}^{(s-1)}f \\ X_1^{(s)}f & \ldots \; X_{\lambda_s}^{(s)}f, \end{cases} \tag{10}$$

die von allen infinitesimalen Transformationen erster bis s^{ter} Ordnung von G erzeugt wird (s. Abschn. I, S. 263 und S. 264, Satz 9).

Wäre die Gruppe (9) transitiv, so wäre sie nach S. 301, Satz 2 einfach transitiv und mit der Gruppe:

$$q_1 \ldots q_n$$

aller Translationen des R_n ähnlich, zugleich verwandelte sich die Gruppe (10), in der (9) als invariante Untergruppe enthalten ist, bei Einführung der neuen Veränderlichen $y_1 \ldots y_n$ in eine lineare Gruppe des R_n. Hieraus würde zunächst folgen, dass die Gruppe (10) höchstens $n(n+1)$ Parameter enthielte und also G selbst höchstens $n(n+2)$ Parameter. Ausserdem würde sich ergeben, dass s den Werth 2 hätte. Wäre nämlich $s > 2$, so wären die infinitesimalen Transformationen s^{ter} und $(s-1)^{\text{ter}}$ Ordnung der Gruppe (10) paarweise

vertauschbar, die Gruppe (10) enthielte also mindestens eine infinitesimale Transformation, die von den Transformationen (9) unabhängig und mit ihnen allen vertauschbar wäre; das aber ist unmöglich, denn es giebt im R_n keine lineare infinitesimale Transformation, die mit allen Translationen dieses Raumes vertauschbar ist, ohne selbst eine Translation zu sein.

Der Fall, dass die Gruppe (9) transitiv ist, braucht demnach gar nicht weiter berücksichtigt zu werden.

Ist die Gruppe (9) intransitiv, so giebt es unter den λ_s Gleichungen:

$$X_1^{(s)} f = 0, \ldots, X_{\lambda_s}^{(s)} f = 0 \tag{11}$$

weniger als n, etwa gerade m von einander unabhängige, die Gleichungen (11) bestimmen daher ein m-gliedriges vollständiges System, und da die Gruppe (9) in der Gruppe (10) invariant ist, so bleibt dieses vollständige System offenbar bei der Gruppe (10) invariant. Ferner ist klar, dass die infinitesimalen Transformationen s^{ter} und $(s-1)^{\text{ter}}$ Ordnung von (10) wieder eine invariante Untergruppe von (10) erzeugen, es ergiebt sich also, dass auch die Gleichungen:

$$\begin{cases} X_1^{(s)} f = 0, \ldots, X_{\lambda_s}^{(s)} f = 0 \\ X_1^{(s-1)} f = 0, \ldots, X_{\lambda_{s-1}}^{(s-1)} f = 0 \end{cases} \tag{12}$$

ein bei der Gruppe (10) invariantes vollständiges System bestimmen. Wäre nun das vollständige System (12) auch blos m-gliedrig, wären also die Gleichungen:

$$X_1^{(s-1)} f = 0, \ldots, X_{\lambda_{s-1}}^{(s-1)} f = 0 \tag{13}$$

sämmtlich eine Folge der Gleichungen (11), so würden die Ausdrücke:

$$(p_\nu + \cdots, X_1^{(s)} f) \cdots (p_\nu + \cdots, X_{\lambda_s}^{(s)} f)$$
$$(\nu = 1 \ldots n),$$

die sich offenbar aus den infinitesimalen Transformationen:

$$X_i^{(s)} f, \; X_k^{(s-1)} f \quad (i = 1 \ldots \lambda_s; \; k = 1 \ldots \lambda_{s-1})$$

linear ableiten lassen, sämmtlich vermöge (11) verschwinden, das m-gliedrige vollständige System (11) gestattete daher nicht blos die infinitesimalen Transformationen (10), sondern auch die Transformationen (8), das heisst es gestattete die ganze Gruppe G; die Gruppe G wäre demnach gegen unsre Voraussetzung imprimitiv.

Befinden sich daher unter den Gleichungen (11) gerade $m < n$ von einander unabhängige, so befinden sich unter den Gleichungen (12) mindestens $m + 1$ von einander unabhängige.

Ist das vollständige System (12) noch nicht n-gliedrig und ist $s > 2$, so kann man noch weiter gehen. Dann bestimmen nämlich die Gleichungen:

$$(14) \qquad \begin{cases} X_i^{(s)} f = 0, \quad X_k^{(s-1)} f = 0, \quad X_j^{(s-2)} f = 0 \\ (i = 1 \ldots \lambda_s;\ k = 1 \ldots \lambda_{s-1};\ j = 1 \ldots \lambda_{s-2}) \end{cases}$$

wieder ein vollständiges System, das bei der Gruppe (10) invariant bleibt. Wären nun die Gleichungen (14) alle eine Folge von (12), so müssten die Ausdrücke:

$$(p_v + \cdots,\ X_i^{(s)} f), \quad (p_v + \cdots,\ X_k^{(s-1)} f) \qquad (i = 1 \ldots \lambda_s;\ k = 1 \ldots \lambda_{s-1})$$

sämmtlich vermöge (12) verschwinden, das vollständige System (12) bliebe daher bei der ganzen Gruppe G invariant, G wäre also wieder gegen unsre Voraussetzung imprimitiv. Demnach können wir schliessen, dass sich unter den Gleichungen (14) mindestens eine befindet, die keine Folge von (12) ist.

Fährt man in dieser Weise fort, so findet man schliesslich Folgendes: Ist die Zahl s, die zu der primitiven Gruppe G gehört, grösser als n, so giebt es unter den Gleichungen:

$$(15) \qquad \begin{cases} X_1^{(s)} f = 0, \ldots, X_{\lambda_s}^{(s)} f = 0 \\ X_1^{(s-1)} f = 0, \ldots, X_{\lambda_{s-1}}^{(s-1)} f = 0 \\ \cdots \\ X_1^{(s-n+1)} f = 0, \ldots, X_{\lambda_{s-n+1}}^{(s-n+1)} f = 0 \end{cases}$$

stets n von einander unabhängige.

Nunmehr ist es leicht eine obere Gränze anzugeben, die von der Zahl s sicher nicht überschritten wird; die Gränze, die wir meinen, ist der Werth: $s = 2n + 1$.

Wäre nämlich $s > 2n + 1$, so wäre: $2(s - n) - 1 > s$, die infinitesimalen Transformationen $(s - n)^{\text{ter}}$ und höherer Ordnung der Gruppe (10) wären also nach Abschn. I, S. 264, Satz 9 paarweise vertauschbar und erzeugten eine Gruppe. Da es solcher infinitesimaler Transformationen mindestens $n + 1$ von einander unabhängige giebt, so wäre diese Gruppe mindestens $(n + 1)$-gliedrig, sie müsste andrerseits transitiv sein, weil sich, wie oben gezeigt wurde, schon unter den Gleichungen (15) gerade n von einander unabhängige befänden. Aber das ist unmöglich, denn nach Satz 2, S. 301 ist eine transitive Gruppe des R_n, deren Transformationen paarweise vertauschbar sind, gerade n-gliedrig, folglich kann s niemals $> 2n + 1$ sein.

Wir sprechen dieses Ergebniss in einem Theoreme aus:

Theorem 23. *Eine endliche continuirliche primitive Gruppe des R_n enthält in der Umgebung eines Punktes $x_1^0 \ldots x_n^0$ von allgemeiner Lage niemals infinitesimale Transformationen, deren Ordnung in den $x_\nu - x_\nu^0$ grösser ist als $2n+1$, die Gruppe hat daher sicher nicht mehr Parameter als die allgemeinste ganze Function $(2n+1)^{ten}$ Grades von n Veränderlichen.*

Man könnte aus den eben durchgeführten Entwicklungen noch einige andere Sätze ableiten, zum Beispiel ist leicht zu sehen, dass immer, wenn es unter den Gleichungen (11) gerade $n - m$ von einander unabhängige giebt, die Zahl s nicht grösser sein kann als $2m+3$. Wir wollen uns aber mit dem Theoreme 23 begnügen, denn dieses Theorem zeigt doch wenigstens, dass die Gliederzahlen der primitiven Gruppen des R_n eine gewisse Gränze nicht überschreiten können, und das ist vorläufig genug. Aber auch nur vorläufig, denn es liegt auf der Hand, dass unsre obere Gränze für die bewussten Gliederzahlen noch viel zu hoch gegriffen ist, die wirkliche Gränze ist sie nicht einmal für $n = 1$. Mit der Zeit wird es unzweifelhaft gelingen, auch für beliebiges n die wahre Gränze anzugeben und da wird sich aller Wahrscheinlichkeit nach herausstellen, dass eine primitive Gruppe des R_n niemals mehr als $n(n+2)$ Parameter enthalten kann und dass die zugehörige Zahl s höchstens gleich 2 ist.

Da wir uns einmal darauf eingelassen haben, Vermuthungen aufzustellen, so mag hier gleich noch eine andre Vermuthung ausgesprochen werden.

Wir haben gesehen, dass jede primitive Gruppe eines Raumes von $n \leqq 3$ Dimensionen auf eine solche Form gebracht werden kann, dass ihre infinitesimalen Transformationen den Veränderlichen nur solche Zuwachse ertheilen, die ganze rationale Functionen der Veränderlichen sind. Es ist zu vermuthen, dass dieses Gesetz nicht blos auf die genannten Räume beschränkt ist, sondern überhaupt für Räume von beliebig vielen Dimensionen gilt. Im Falle $n = 4$ hat sich diese Vermuthung bereits bestätigt.

Kapitel 17.

Gruppen des R_n mit einer invarianten Gleichung von der Form:

$$\sum_{kv}^{1\ldots n} f_{kv}(x_1 \ldots x_n)\, dx_k dx_v = 0.$$

Wenn eine Gruppe des R_n eine Differentialgleichung zweiten Grades:

$$(1) \qquad \sum_{kv}^{1\ldots n} f_{kv}(x_1 \ldots x_n)\, dx_k dx_v = 0 \quad (f_{kv} = f_{vk})$$

mit nicht identisch verschwindender Determinante invariant lässt, so besitzt sie offenbar die folgende Eigenschaft: hält man einen Punkt $x_1^0 \ldots x_n^0$ von allgemeiner Lage fest, so werden die ∞^{n-1} Richtungen: $x_1' : x_2' : \cdots : x_n'$ durch diesen Punkt bei den noch übrig bleibenden Transformationen der Gruppe derart transformirt, dass die Gleichung zweiten Grades:

$$(2) \qquad \sum_{kv}^{1\ldots n} f_{kv}(x_1^0 \ldots x_n^0)\, x_k' x_v' = 0$$

invariant bleibt (vgl. Abschn. I, Kap. 28); hier hat natürlich die Determinante:

$$\sum \pm f_{11}(x^0) \ldots f_{nn}(x^0)$$

einen von Null verschiedenen Werth.

Wir wollen in dem gegenwärtigen Kapitel eine gewisse Kategorie von Gruppen dieser Art untersuchen, wir wollen nämlich alle continuirlichen Gruppen von Punkttransformationen des R_n bestimmen, die eine Differentialgleichung von der Form (1) invariant lassen und dabei so beschaffen sind, dass die ∞^{n-1} Richtungen: $x_1' : \cdots : x_n'$ durch jeden festgehaltenen Punkt $x_1^0 \ldots x_n^0$ von allgemeiner Lage in möglichst allgemeiner Weise transformirt werden, das heisst in so allgemeiner Weise, als es die Invarianz der Gleichung (2) zulässt*). Wir werden sehen, dass für $n > 2$ alle continuirlichen Gruppen von dieser Beschaffenheit endlich sind und auf bestimmte einfache Normalformen gebracht werden können.

---

*) Die hiermit bezeichnete Aufgabe ist zuerst von Lie gestellt und erledigt worden und zwar auf dem Wege, der im Folgenden auseinandergesetzt wird (s. Arch. for Math. og Naturvid. Bd. X, S. 389 ff., Kristiania 1885). Auf den Zusammenhang dieses Problems mit dem berühmten Riemannschen Satze über Differentialausdrücke zweiten Grades kommen wir später zu sprechen.

Der erste Theil dieses Ergebnisses, nämlich der Satz, dass die betreffenden Gruppen alle endlich sind, ist ein besonderer Fall eines allgemeinen Satzes, den wir in dem Schlussparagraphen des Kapitels ableiten werden. In § 77 zeigen wir nämlich, dass überhaupt jede continuirliche Gruppe von Punkttransformationen des R_n, die eine in den dx_v homogene Gleichung von der Form:

$$F(x_1 \ldots x_n,\ dx_1 \ldots dx_n) = 0$$

invariant lässt, im Allgemeinen nur von einer endlichen Anzahl von Parametern abhängt, sobald die Gleichung in den dx_v nicht linear ist.

§ 72.

Wir suchen also jetzt zunächst alle continuirlichen Gruppen des R_n, die eine Gleichung von der Form (1) invariant lassen und die vorhin angegebenen Eigenschaften besitzen.

Der Einfachheit wegen nehmen wir wie gewöhnlich an, dass: $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ ein Punkt von allgemeiner Lage ist. Ausserdem aber wollen wir noch voraussetzen, dass die zum Punkte: $x_1^0 = \cdots = x_n^0 = 0$ gehörige Gleichung (2) die einfache Form:

$$x_1'^2 + \cdots + x_n'^2 = 0 \tag{3}$$

besitzt. Diese Voraussetzung können wir verwirklichen, indem wir durch eine lineare homogene Transformation:

$$\bar{x}_k = \sum_1^n{}_v\, \alpha_{kv} x_v \quad (k = 1 \ldots n) \tag{4}$$

an Stelle der x_k die neuen Veränderlichen $\bar{x}_k$ einführen; an die Stelle der x_k' treten ja dann die Grössen:

$$\bar{x}_k' = \sum_1^n{}_v\, \alpha_{kv} x_v' \quad (k = 1 \ldots n),$$

durch geeignete Wahl der Transformation (4) können wir daher immer erreichen, dass die Gleichung:

$$\sum_{kv}^{1 \ldots n} f_{vk}(0 \ldots 0)\, x_k' x_v' = 0$$

die Form (3) erhält.

Nach Abschn. I, Theor. 109, S. 603 ordnet jede der gesuchten Gruppen dem Punkte: $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ eine gewisse lineare homogene Gruppe in den Veränderlichen $x_1' \ldots x_n'$ zu und diese lineare Gruppe giebt an, in welcher Weise die ∞^{n-1} Richtungen: $x_1' : \cdots : x_n'$ durch den Punkt: $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ transformirt werden, sobald man den betreffenden Punkt festhält. Wir müssen daher vor allen Dingen

untersuchen, was für lineare homogene Gruppen im vorliegenden Falle auftreten können.

Die allgemeinste lineare homogene Gruppe, bei der die Gleichung (3) invariant bleibt, wird von den $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + 1$ unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

$$(5) \qquad x_\nu' p_k' - x_k' p_\nu', \quad x_1' p_1' + \cdots + x_n' p_n' \qquad (\nu, k = 1 \ldots n)$$

erzeugt. Unter ihren infinitesimalen Transformationen giebt es eine, aber auch nur eine, bei der alle ∞^{n-1} Richtungen: $x_1' : \cdots : x_n'$ in Ruhe bleiben. Demnach ist klar, dass die genannte Gruppe die ∞^{n-1} Richtungen durch den Punkt: $x_1 = \cdots = x_n = 0$ $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$-gliedrig transformirt.

Nun soll die dem Punkte: $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ zugeordnete lineare homogene Gruppe so beschaffen sein, dass sie die Gleichung (3) invariant lässt und dabei die Richtungen $x_1' : \cdots : x_n'$ in möglichst allgemeiner Weise, das heisst also $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$-gliedrig transformirt. Folglich sind zwei Fälle denkbar: entweder ist die betreffende lineare homogene Gruppe mit der Gruppe (5) identisch oder sie ist eine $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$-gliedrige Untergruppe von (5).

Im zweiten Falle darf die dem Punkte: $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ zugeordnete lineare homogene Gruppe natürlich die infinitesimale Transformation: $x_1' p_1' + \cdots + x_n' p_n'$ nicht enthalten, sie ist daher von $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ unabhängigen infinitesimalen Transformationen von der Form:

$$x_\nu' p_k' - x_k' p_\nu' + a_{\nu k}(x_1' p_1' + \cdots + x_n' p_n') \qquad (k, \nu = 1 \ldots n)$$

erzeugt, wo $a_{\nu k} = -a_{k\nu}$ eine Constante bezeichnet. Ist $n > 2$, so erkennt man durch Combination sofort, dass alle $a_{\nu k}$ verschwinden, ist dagegen $n = 2$, so braucht die Constante $a_{1,2}$ nicht zu verschwinden, sie kann vielmehr jeden beliebigen Werth haben. Auch sonst besteht zwischen $n = 2$ und $n > 2$ ein sehr wesentlicher Unterschied. Während nämlich für $n > 2$ alle Gruppen des R_n von der hier verlangten Beschaffenheit endlich sind, giebt es für $n = 2$ auch unendliche Gruppen, die unsre Forderung erfüllen.

Wir werden deshalb den Fall $n = 2$ vorläufig ausschliessen, doch wollen wir in einem besondern Paragraphen auch die endlichen continuirlichen Gruppen, die unter diesen Fall gehören, aufstellen; wir können das sehr leicht, da wir bereits alle endlichen continuirlichen Gruppen der Ebene bestimmt haben (s. Kap. 4). Dagegen werden

wir die unendlichen continuirlichen Gruppen, die im Falle $n = 2$ auftreten, erst später kennen lernen, wenn wir alle unendlichen continuirlichen Gruppen der Ebene aufstellen.

Wenn wir n grösser als 2 voraussetzen, wie es von jetzt ab bis auf Weiteres geschehen soll, so giebt es nach dem Vorhergehenden nur zwei lineare homogene Gruppen, die dem Punkte: $x_1 = \cdots = x_n = 0$ zugeordnet sein können, nämlich erstens die Gruppe:

$$x_v' p_k' - x_k' p_v' \quad (v, k = 1 \ldots n) \tag{6}$$

und zweitens die Gruppe:

$$x_v' p_k' - x_k' p_v',\ x_1' p_1' + \cdots + x_n' p_n' \quad (v, k = 1 \ldots n). \tag{5}$$

Demnach können wir nunmehr über die Beschaffenheit der gesuchten Gruppen Folgendes aussagen:

Jede dieser Gruppen enthält entweder gerade $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ oder gerade $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + 1$ solche unabhängige infinitesimale Transformationen von erster Ordnung in $x_1 \cdots x_n$, aus denen sich keine infinitesimale Transformation von zweiter oder höherer Ordnung linear ableiten lässt. In beiden Fällen treten $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ infinitesimale Transformationen erster Ordnung von der Form:

$$x_k p_v - x_v p_k + \cdots = S_{kv} \quad (v, k = 1 \ldots n;\ k < v)$$

auf, im ersten Falle nur diese, im zweiten Falle kommt aber noch die infinitesimale Transformation:

$$x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n + \cdots = U$$

hinzu. Die weggelassenen Glieder sind hier jedesmal von zweiter oder noch höherer Ordnung in $x_1 \ldots x_n$.

Da: $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ ein Punkt von allgemeiner Lage ist, so kommt jedenfalls auch eine infinitesimale Transformation von nullter Ordnung in $x_1 \ldots x_n$ vor, etwa:

$$\lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_n p_n + \cdots,$$

wo natürlich $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ nicht alle verschwinden dürfen und wo die weggelassenen Glieder von erster oder höherer Ordnung in $x_1 \ldots x_n$ sind. Durch Combination mit den S_{ik} erkennt man jedoch sehr leicht, dass n unabhängige infinitesimale Transformationen nullter Ordnung von der Form:

$$p_v + \cdots = P_v \quad (v = 1 \ldots n)$$

auftreten. Nach Abschn. I, S. 217, Satz 5 sind also die gesuchten Gruppen sammt und sonders transitiv.

Ueber die infinitesimalen Transformationen nullter und erster Ord-

nung, die vorkommen können, sind wir jetzt im Reinen; es bleibt noch zu untersuchen, welche Form die etwa auftretenden infinitesimalen Transformationen zweiter und höherer Ordnung haben.

Wenn eine der gesuchten Gruppen die infinitesimale Transformation zweiter Ordnung:

$$W = \sum_{\tau kj}^{1\ldots n} b_{\tau kj} x_\tau x_k p_j + \cdots \quad (b_{\tau kj} = b_{k\tau j})$$

enthält, so muss sie auch die Transformation erster Ordnung:

$$(7) \qquad (P_\nu W) = 2 \sum_{kj}^{1\ldots n} b_{\nu kj} x_k p_j + \cdots$$

enthalten; folglich müssen sich die Glieder erster Ordnung in (7) entweder aus den Gliedern erster Ordnung der S_{ik} allein oder aus den Gliedern erster Ordnung der Transformationen S_{ik} und U linear ableiten lassen. Hieraus ergiebt sich, dass Relationen von der Form:

$$(8) \qquad b_{\nu kj} + b_{\nu jk} = 0 \quad (k \neq j)$$

bestehen müssen und ausserdem solche von der Form:

$$(9) \qquad b_{\nu kk} = b_{\nu\nu\nu},$$

wo die Coefficienten $b_{\nu kk}$ natürlich sämmtlich verschwinden, wenn U nicht in der Gruppe vorkommt.

Sind die Zahlen ν, k, j alle drei von einander verschieden, so ergiebt sich aus (8) durch Vertauschung der Zeiger:

$$\begin{aligned} b_{\nu kj} &= -b_{\nu jk} = -b_{j\nu k} = b_{jk\nu} = \\ &= b_{kj\nu} = -b_{k\nu j} = -b_{\nu kj}, \end{aligned}$$

also $b_{\nu kj} = 0$. Die einzigen unter den Coefficienten $b_{\nu kj}$, die nicht zu verschwinden brauchen, sind demnach die mit mindestens zwei gleichen Zeigern, nämlich:

$$b_{\nu kk},\ b_{k\nu k},\ b_{kk\nu}.$$

Dabei ist, wie wir wissen, $b_{\nu kk} = b_{k\nu k}$ und ausserdem gelten wegen (8) und (9) die Gleichungen:

$$b_{kk\nu} = -b_{k\nu k} = -b_{\nu kk} = -b_{\nu\nu\nu} \quad (\nu \neq k),$$

so dass nunmehr alle möglicherweise nicht verschwindenden Coefficienten $b_{\nu kj}$ durch die $b_{\nu\nu\nu}$ ausgedrückt sind.

Enthält die gesuchte Gruppe die Transformation U nicht, so sind nach dem Frühern alle $b_{\nu\nu\nu} = 0$, es verschwinden daher überhaupt alle $b_{\nu kj}$; die Gruppe enthält alsdann gar keine infinitesimale Trans-

formation von zweiter Ordnung in den x und ebensowenig solche von höherer Ordnung, das heisst sie enthält blos die

$$n + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} = \frac{n(n+1)}{1\,.\,2}$$

unabhängigen infinitesimalen Transformationen P_v, S_{vk}.

Kommt dagegen U in der Gruppe vor, so können infinitesimale Transformationen zweiter Ordnung auftreten, und zwar hat jede derartige Transformation die Form:

$$\sum_1^n{}^v b_v \Big\{ 2x_v \sum_1^n{}^k x_k p_k - \sum_1^n{}^k x_k^2 \,.\, p_v \Big\} + \cdots = \sum_1^n{}^v b_v v_v + \cdots,$$

wo die weggelassenen Glieder von der dritten und von höherer Ordnung in $x_1 \ldots x_n$ sind. Nun aber bekommt man, wenn τ, k, j drei verschiedene Zahlen sind:

$$\Big(S_{\tau k},\ \sum_1^n{}^v b_v v_v + \cdots\Big) = b_k v_\tau - b_\tau v_k + \cdots,$$

$$(S_{kj},\ b_k v_\tau - b_\tau v_k + \cdots) = b_\tau v_j + \cdots,$$

wenn daher eine der verlangten Gruppen überhaupt eine infinitesimale Transformation von zweiter Ordnung enthält, so kommen in ihr alle n Transformationen:

$$V_v = 2x_v \sum_1^n{}^k x_k p_k - \sum_1^n{}^k x_k^2 \,.\, p_v + \cdots \quad (v = 1 \ldots n)$$

vor; in jeder andern infinitesimalen Transformation von zweiter Ordnung, die der Gruppe angehört, lassen sich die Glieder zweiter Ordnung aus den Gliedern zweiter Ordnung von $V_1 \ldots V_n$ linear ableiten.

Durch paarweise Combination von $V_1 \ldots V_n$ ergeben sich keine infinitesimalen Transformationen von dritter Ordnung, denn die Glieder dritter Ordnung in der Reihenentwicklung von $(V_r V_k)$ verschwinden identisch. Trotzdem wäre es denkbar, dass in einer der gesuchten Gruppen auch infinitesimale Transformationen dritter Ordnung aufträten.

Es sei:

$$\sum_1^n{}^v \xi_v^{(3)} p_v + \cdots$$

eine solche infinitesimale Transformation dritter Ordnung, $\xi_1^{(3)} \ldots \xi_n^{(3)}$ seien die in ihr vorhandnen Glieder dritter Ordnung. Durch Combination mit: $p_\tau + \cdots$ ergiebt sich eine infinitesimale Transformation von zweiter Ordnung, die ebenfalls der Gruppe angehört, folglich müssen die $\xi_v^{(3)}$ eine Bedingung von der Form:

$$\sum_1^n{}_\nu \frac{\partial \xi_\nu^{(3)}}{\partial x_\tau} p_\nu = \sum_1^n{}_k \alpha_{\tau k} \left\{ 2 x_k \sum_1^n{}_\nu x_\nu p_\nu - \sum_1^n{}_\nu x_\nu^2 p_k \right\}$$

erfüllen. Differentiiren wir diese Gleichung nach x_j, so bekommen wir:

$$\sum_1^n{}_\nu \frac{\partial^2 \xi_\nu^{(3)}}{\partial x_\tau \partial x_j} p_\nu = 2 \sum_1^n{}_k \alpha_{\tau k} (x_k p_j - x_j p_k) + 2 \alpha_{\tau j} \sum_1^n{}_\nu x_\nu p_\nu;$$

vertauschen wir hier τ und j, die wir als von einander verschieden annehmen wollen, so darf sich nichts ändern, also ergiebt sich:

$$\alpha_{\tau k} = \alpha_{j k} = 0 \quad (k \neq \tau, j), \qquad \alpha_{\tau\tau} + \alpha_{jj} = 0$$

das heisst, es verschwinden überhaupt alle Coefficienten α, denn für τ und j können ja zwei ganz beliebige unter den Zahlen $1 \ldots n$ gesetzt werden.

Hiermit ist bewiesen, dass alle Differentialquotienten der $\xi_\nu^{(3)}$ verschwinden, wegen der Relation:

$$\sum_1^n{}_\tau x_\tau \frac{\partial \xi_\nu^{(3)}}{\partial x_\tau} = 3 \xi_\nu^{(3)}$$

verschwinden daher auch die $\xi_\nu^{(3)}$ selber. Kurz, die gesuchten Gruppen enthalten niemals infinitesimale Transformationen von dritter Ordnung und ebensowenig solche von höherer.

Fassen wir die bisherigen Ergebnisse zusammen, so können wir sagen:

Lässt eine continuirliche Gruppe des n-fach ausgedehnten Raumes $(n > 2)$ *eine Differentialgleichung von der Form:*

$$(1) \qquad \sum_{k\nu}^{1 \ldots n} f_{k\nu}(x_1 \ldots x_n)\, dx_k\, dx_\nu = 0$$

mit nicht verschwindender Determinante invariant und ist sie ausserdem so beschaffen, dass die Richtungen durch jeden festgehaltenen Punkt von allgemeiner Lage in möglichst allgemeiner Weise transformirt werden, so kann man stets durch geeignete Wahl der Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$ *erreichen, dass die Gruppe in der Umgebung des Punktes* $x_1 = 0, \ldots x_n = 0$ *von allgemeiner Lage die folgenden infinitesimalen Transformationen enthält:*

Erstens *n unabhängige infinitesimale Transformationen nullter Ordnung von der Form:*

$$P_\nu = p_\nu + \cdots \quad (\nu = 1 \ldots n),$$

Zweitens *entweder* $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ *infinitesimale Transformationen von der Form:*

$$S_{k\nu} = x_k p_\nu - x_\nu p_k + \cdots \quad (k, \nu = 1 \ldots n;\ k < \nu)$$

oder $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + 1$ *solche von der Form:*

$$S_{kv} = x_k p_v - x_v p_k + \cdots, \quad U = x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n + \cdots$$
$$(k,\ v = 1 \ldots n;\ k < v).$$

Tritt der erste dieser beiden Fälle ein, so enthält die Gruppe keine infinitesimale Transformation von zweiter oder höherer Ordnung; tritt dagegen der zweite Fall ein, so enthält die Gruppe entweder keine infinitesimalen Transformationen zweiter Ordnung oder sie enthält deren gerade n unabhängige von der Form:

$$V_v = 2x_v \sum_1^n{}^k x_k p_k - \sum_1^n{}^k x_k^2 \cdot p_v + \cdots \quad (v = 1 \ldots n).$$

Infinitesimale Transformationen dritter oder noch höherer Ordnung können auch hier nicht vorkommen.

Die Beschränkung, dass in S_{kv} das k stets $< v$ sein soll, kann übrigens auch fallen gelassen werden, nur muss dann immer $S_{vk} = -S_{kv}$ und also $S_{kk} = 0$ gesetzt werden, was wir im Folgenden thun wollen.

Aus dem vorhin Gesagten ergiebt sich, dass blos drei verschiedene Fälle zu unterscheiden sind: jede Gruppe von der verlangten Beschaffenheit ist entweder von $n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ oder von $n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + 1$ oder von $n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + 1 + n$ unabhängigen infinitesimalen Transformationen erzeugt. *Demnach giebt es, sobald $n > 2$ ist, sicher keine* unendliche *continuirliche Gruppe, die unsre Forderungen erfüllt.* Das ist an und für sich schon ein beachtenswerthes Ergebniss.

Wir werden jetzt die drei Fälle, auf die wir geführt worden sind, einzeln behandeln.

§ 73.

Zuerst suchen wir alle Gruppen, die von gerade: $n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + 1$ unabhängigen infinitesimalen Transformationen von der Form:

$$(10) \quad \begin{cases} P_\mu = p_\mu + \cdots, \quad U = \sum_1^n{}^\tau x_\tau p_\tau + \cdots \\ S_{kv} = x_k p_v - x_v p_k + \cdots \\ (\mu,\ k,\ v = 1 \ldots n;\ S_{kv} + S_{vk} = 0) \end{cases}$$

erzeugt sind.

Zwischen den S_{kv} und U bestehen offenbar Relationen von der Form:

$$(11) \quad \begin{cases} (S_{kv} U) = 0, \ (S_{kv} S_{j\mu}) = \varepsilon_{vj} S_{k\mu} - \varepsilon_{v\mu} S_{kj} - \varepsilon_{kj} S_{v\mu} + \varepsilon_{k\mu} S_{vj} \\ (k,\ v,\ j,\ \mu = 1 \ldots n), \end{cases}$$

wo ε_{vj} für $v = j$ den Werth 1, für $v \neq j$ den Werth 0 besitzt. Ferner ist:

$$(P_\mu U) = P_\mu + \sum_1^{n-1} \sum_{k+1}^{n} \alpha_{k\nu}^{(\mu)} S_{k\nu},$$

also, wenn wir die rechte Seite als neues P_μ einführen:

(12) $$(P_\mu U) = P_\mu \quad (\mu = 1 \ldots n).$$

Um nunmehr die Coefficienten $\beta_{k\nu}$ und β in der Gleichung:

$$(P_\mu S_{j\tau}) = \varepsilon_{\mu j} P_\tau - \varepsilon_{\mu\tau} P_j + \sum_1^{n-1} \sum_{k+1}^{n} \beta_{k\nu} S_{k\nu} + \beta U$$

zu bestimmen, bilden wir die Identität:

$$((P_\mu S_{j\tau}) U) + ((S_{j\tau} U) P_\mu) + ((U P_\mu) S_{j\tau}) = 0,$$

die wegen (11) und (12) die Form:

$$((P_\mu S_{j\tau}) U) = (P_\mu S_{j\tau})$$

erhält; demnach sind alle $\beta_{k\nu}$, β gleich Null und wir haben einfach:

(13) $$(P_\mu S_{j\tau}) = \varepsilon_{\mu j} P_\tau - \varepsilon_{\mu\tau} P_j \quad (\mu, j, \tau = 1 \ldots n).$$

Jetzt sind noch die Ausdrücke:

$$(P_\mu P_j) = \sum_1^{n} \gamma_\nu P_\nu + \sum_1^{n-1} \sum_{k+1}^{n} \gamma_{k\nu} S_{k\nu} + \gamma U$$

zu berechnen. Zu diesem Zwecke bilden wir die Identität:

$$((P_\mu P_j) U) + ((P_j U) P_\mu) + ((U P_\mu) P_j) = 0$$

oder:

$$((P_\mu P_j) U) = 2(P_\mu P_j)$$

und finden so:

(14) $$(P_\mu P_j) = 0 \quad (\mu, j = 1 \ldots n).$$

Hiermit ist bewiesen, dass eine jede Gruppe von der Form (10) $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} + 1$ infinitesimale Transformationen P_μ, $S_{k\nu}$, U enthält, die durch die Relationen (11) ... (14) verknüpft sind, also durch genau dieselben Relationen, wie die infinitesimalen Transformationen der Gruppe:

(15) $$\left\{ p_\mu, \quad x_k p_\nu - x_\nu p_k, \quad \sum_1^{n} x_\tau p_\tau \right.$$
$$\left. (\mu, k, \nu = 1 \ldots n), \right.$$

die aus den Euklidischen Bewegungen und den Aehnlichkeitstransformationen des R_n besteht. Auf Grund des Theorems 110, S. 614 von Abschn. I können wir daher schliessen, dass jede Gruppe von der Form (10) mit der Gruppe (15) durch eine Punkttransformation des Raumes $x_1 \ldots x_n$ ähnlich ist.

Dasselbe Ergebniss hätten wir übrigens auch ohne die eben

durchgeführten Rechnungen gewinnen können; da nämlich unter den infinitesimalen Transformationen (10) eine von der Form:

$$\sum_1^n{}^\tau x_\tau p_\tau + \cdots$$

vorkommt, so hätten wir ohne Weiteres das Theor. 111, Abschn. I, S. 618 anwenden können.

§ 74.

Jetzt suchen wir alle Gruppen, die von gerade $n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + 1 + n$ infinitesimalen Transformationen von der Form:

$$(16) \quad \begin{cases} P_\mu = p_\mu + \cdots, \quad U = \sum_1^n{}^\tau x_\tau p_\tau + \cdots \\ S_{kv} = x_k p_v - x_v p_k + \cdots \\ V_\mu = 2 x_\mu \sum_1^n{}^\tau x_\tau p_\tau - p_\mu \sum_1^n{}^\tau x_\tau^2 + \cdots \\ \qquad (\mu, k, v = 1 \ldots n;\ S_{kv} + S_{vk} = 0) \end{cases}$$

erzeugt sind.

Zwischen den V_μ und den S_{kv} und U bestehen augenscheinlich Relationen von der Form:

$$(17) \quad \begin{cases} (V_\mu V_k) = 0, \quad (U V_\mu) = V_\mu, \quad (S_{jk} V_\mu) = \varepsilon_{k\mu} V_j - \varepsilon_{j\mu} V_k \\ \qquad (\mu, k, j = 1 \ldots n). \end{cases}$$

Ferner ist:

$$(U S_{kv}) = \alpha_{kv1} V_1 + \cdots + \alpha_{kvn} V_n,$$

also, wenn wir $S_{kv} - \alpha_{kv1} V_1 - \cdots - \alpha_{kvn} V_n$ als neues S_{kv} einführen:

$$(18) \quad (U S_{kv}) = 0 \quad (k, v = \ldots n).$$

Zur Bestimmung der Coefficienten β_τ in den Gleichungen:

$$(S_{kj} S_{\mu v}) = \varepsilon_{j\mu} S_{kv} - \varepsilon_{jv} S_{k\mu} - \varepsilon_{k\mu} S_{jv} + \varepsilon_{kv} S_{j\mu} + \sum_1^n{}^\tau \beta_\tau V_\tau$$

bilden wir die Identität:

$$((S_{kj} S_{\mu v}) U) + ((S_{\mu v} U) S_{kj}) + ((U S_{kj}) S_{\mu v}) = 0,$$

deren zweites und drittes Glied null werden; wir finden, dass alle β_τ null sind, und haben somit einfach:

$$(19) \quad \begin{cases} (S_{kj} S_{\mu v}) = \varepsilon_{j\mu} S_{kv} - \varepsilon_{jv} S_{k\mu} - \varepsilon_{k\mu} S_{jv} + \varepsilon_{kv} S_{j\mu} \\ \qquad (k, j, \mu, v = 1 \ldots n). \end{cases}$$

Jetzt müssen wir noch die P_μ so normiren, dass die übrigen Relationen eine möglichst einfache Form erhalten.

Es ist:

$$(P_\mu U) = P_\mu + \sum_1^{n-1} \sum_{k+1}^{n} \gamma_{k\nu} S_{k\nu} + \gamma U + \sum_1^n \gamma_\tau V_\tau ,$$

führen wir daher:

$$P_\mu + \sum_1^{n-1} \sum_{k+1}^{n} \gamma_{k\nu} S_{k\nu} + \gamma U + \tfrac{1}{2} \sum_1^n \gamma_\tau V_\tau$$

als neues P_μ ein, so bekommen wir:

$$(P_\mu U) = P_\mu \quad (\mu = 1 \ldots n). \tag{20}$$

Ferner bilden wir die Identität:

$$((P_k S_{\mu\nu}) U) + ((S_{\mu\nu} U) P_k) + ((U P_k) S_{\mu\nu}) = 0,$$

die sich wegen (18) und (20) auf:

$$((P_k S_{\mu\nu}) U) = (P_k S_{\mu\nu})$$

reducirt; aus ihr ergiebt sich sofort:

$$(P_k S_{\mu\nu}) = \varepsilon_{k\mu} P_\nu - \varepsilon_{k\nu} P_\mu \quad (k, \mu, \nu = 1 \ldots n). \tag{21}$$

In derselben Weise liefert die Identität:

$$((P_k V_\nu) U) + ((V_\nu U) P_k) + ((U P_k) V_\nu) = 0,$$

deren zwei letzte Glieder sich aufheben, die Relation:

$$(P_k V_\nu) = 2\varepsilon_{k\nu} U + 2 S_{\nu k} \quad (k, \nu = 1 \ldots n) \tag{22}$$

Endlich zeigt die Identität:

$$((P_k P_\nu) U) + (P_\nu P_k) - (P_k P_\nu) = 0,$$

dass die Gleichungen:

$$(P_k P_\nu) = 0 \quad (k, \nu = 1 \ldots n) \tag{23}$$

bestehen.

Jede Gruppe von der Form (16) enthält demnach $\frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2}$ infinitesimale Transformationen: P_μ, $S_{k\nu}$, U, V_j, die in den Beziehungen: (17) ... (23) stehen; genau in denselben Beziehungen stehen aber auch die infinitesimalen Transformationen der Gruppe:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_\mu, \quad x_k p_\nu - x_\nu p_k, \quad \sum_1^n x_\tau p_\tau \\ \\ 2 x_j \sum_1^n x_\tau p_\tau - p_j \sum_1^n x_\tau^2, \end{array} \right. \tag{24}$$

aus dem schon oben benutzten Theor. 110 auf S. 614 von Abschn. I ergiebt sich daher, dass jede Gruppe von der Form (16) mit der Gruppe (24) durch eine Punkttransformation des Raumes $x_1 \ldots x_n$ ähnlich ist.

Hätten wir das Theor. 111, Abschn. I, S. 618 benutzen wollen, so wären wir zu diesem Ergebnisse ohne alle Rechnung gelangt.

§ 75.

Es handelt sich schliesslich noch um die Bestimmung aller Gruppen, die von gerade $n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ unabhängigen infinitesimalen Transformationen von der Form:

$$(25)\qquad \begin{cases} P_v = p_v + \cdots \\ S_{kv} = x_k p_v - x_v p_k + \cdots \\ \qquad (k,\ v = 1 \ldots n;\ S_{kv} + S_{vk} = 0) \end{cases}$$

erzeugt sind*). Die Zahl n wird > 2 vorausgesetzt.

Von vornherein ist klar, dass zwischen den S_{kv} Relationen von der Form:

$$(26)\qquad \begin{cases} (S_{jk} S_{\mu v}) = \varepsilon_{k\mu} S_{jv} - \varepsilon_{j\mu} S_{kv} - \varepsilon_{kv} S_{j\mu} + \varepsilon_{jv} S_{k\mu} \\ \qquad (j,\ k,\ \mu,\ v = 1 \ldots n) \end{cases}$$

bestehen, wo $\varepsilon_{k\mu}$ verschwindet oder gleich Eins ist, jenachdem k und μ verschieden oder gleich sind. Unter diesen Relationen merken wir uns die folgenden noch besonders an:

$$(26')\qquad (S_{1k} S_{1,2}) = S_{2k},\ (S_{2k} S_{1,2}) = -S_{1k},\ (S_{1k} S_{k2}) = S_{1,2},$$

wo k natürlich grösser als 2 sein muss. Ausserdem ist zu beachten, dass S_{jk}, mit zwei verschiedenen S combinirt, stets verschiedenes ergiebt, es sei denn, dass beide Male Null herauskomme.

Unser Bestreben muss jetzt sein, die Relationen, durch die jedes P_v mit den S_{jk} und mit den übrigen P_v verknüpft ist, auf möglichst einfache Formen zu bringen. Wir werden das erreichen, indem wir

*) Bei der Behandlung dieses Falles (im norwegischen Archive, Bd. X, S. 399 ff., 1885) sah sich Lie veranlasst, zwischen geradem und ungeradem n zu unterscheiden. Bald darauf (1886) fand Engel, dass diese Unterscheidung unnöthig ist und auf dem im Texte befolgten Wege vermieden werden kann; diesen Weg hat dann auch Lie in seinen Seminarvorträgen an der Universität Leipzig benutzt. Neuerdings hat Killing ebenfalls die Aufgabe erledigt, ohne die Unterscheidung zwischen geradem und ungeradem n einzuführen, aber sonderbarerweise erwähnt er dabei Lies viel ältere Lösung der Aufgabe gar nicht (s. Crelles Journal, Bd. 109, S. 179 ff., 1892). — In der citirten Arbeit giebt Herr Killing drei Begründungen der Riemannschen Theorie der Grundlagen der Geometrie. Diese drei Behandlungen sind indess sehr wenig originell, da sie sich auf Lipschitzs und in noch grösserer Ausdehnung auf Lies Untersuchungen stützen. Herrn Killings Behandlung des Riemann-Helmholtzschen Problems enthält mehrere grobe Fehler. — Wir wollen übrigens nicht unerwähnt lassen, dass die folgenden Rechnungen auch für $n = 2$ zur Bestimmung aller Gruppen von der Form (25) führen.

die P_ν in geeigneter Weise normiren, das heisst, indem wir an Stelle jedes P_ν einen geeigneten Ausdruck von der Form:

$$P_\nu + \sum_{\mu\tau}^{1\ldots n} h_{\nu\mu\tau} S_{\mu\tau} \quad (h_{\nu\mu\tau} + h_{\nu\tau\mu} = 0)$$

als neues P_ν einführen (vgl. Abschn. I, S. 610).

Es bestehen Relationen von der Form:

$$(P_1 S_{12}) = \quad P_2 + \sum_{1}^{n-1} \sum_{k+1}^{n} \alpha_{kj} S_{kj}$$

$$(P_2 S_{12}) = -P_1 - \sum_{1}^{n-1} \sum_{k+1}^{n} \beta_{kj} S_{kj};$$

führen wir in diesen:

$$P_1 + \beta_{1,2} S_{1,2} + \sum_{3}^{n-1} \sum_{k+1}^{n} \beta_{kj} S_{kj}$$

$$P_2 + \alpha_{1,2} S_{1,2} + \sum_{3}^{n-1} \sum_{k+1}^{n} \alpha_{kj} S_{kj}$$

als neue P_1 und P_2 ein, so erhalten wir:

$$(P_1 S_{1,2}) = \quad P_2 + \sum_{3}^{n} \{\alpha_{1j} S_{1j} + \alpha_{2j} S_{2j}\}$$

$$(P_2 S_{1,2}) = -P_1 - \sum_{3}^{n} \{\beta_{1j} S_{1j} + \beta_{2j} S_{2j}\}.$$

Um eine noch grössere Vereinfachung zu erreichen, setzen wir:

$$P_1' = P_1 + \sum_{3}^{n} \{\lambda_{1j} S_{1j} + \lambda_{2j} S_{2j}\}$$

$$P_2' = P_2 + \sum_{3}^{n} \{\mu_{1j} S_{1j} + \mu_{2j} S_{2j}\}$$

und bekommen:

$$(P_1' S_{1,2}) = \quad P_2' + \sum_{3}^{n} \{(\alpha_{1j} - \lambda_{2j} - \mu_{1j}) S_{1j} + (\alpha_{2j} + \lambda_{1j} - \mu_{2j}) S_{2j}\}$$

$$(P_2' S_{1,2}) = -P_1' - \sum_{3}^{n} \{(\beta_{1j} - \lambda_{1j} + \mu_{2j}) S_{1j} + (\beta_{2j} - \lambda_{2j} - \mu_{1j}) S_{2j}\}.$$

Offenbar können wir hier nicht alle Coefficienten zum Verschwinden bringen, wir wählen daher die λ und μ so, dass die Gleichungen:

$$\lambda_{2j} + \mu_{1j} = \alpha_{1j}, \quad \mu_{2j} - \lambda_{1j} = \alpha_{2j} \quad (j = 3 \ldots n)$$

erfüllt werden, auf diese Weise ergiebt sich wenigstens: $(P_1' S_{1,2}) = P_2'$. Lassen wir jetzt noch die Striche weg und denken wir uns ausserdem $P_3 \ldots P_n$ durch die Gleichungen: $(P_1 S_{1k}) = P_k$ bestimmt, so haben wir die Relationen:

$$(27) \qquad \begin{cases} (P_1 S_{1,2}) = P_2, \ (P_1 S_{1k}) = P_k \quad (k = 3 \ldots n) \\ (P_2 S_{1,2}) = -P_1 - \sum_3^n{}^j (\beta_{1j}' S_{1j} + \beta_{2j}' S_{2j}). \end{cases}$$

Durch das angewendete Verfahren sind alle P soweit normirt, dass uns nur noch $2(n-2)$ willkürliche Parameter zur Verfügung stehen; setzen wir nämlich:

$$\bar{P}_1 = P_1 + \sum_3^n{}^j (\varrho_{1j} S_{1j} + \varrho_{2j} S_{2j})$$

und daher den Relationen (27) entsprechend:

$$\bar{P}_2 = (\bar{P}_1 S_{1,2}) = P_2 - \sum_3^n{}^j (\varrho_{2j} S_{1j} - \varrho_{1j} S_{2j})$$

$$\bar{P}_k = (\bar{P}_1 S_{1k}) = P_k + \varrho_{2k} S_{1,2} + \sum_3^n{}^j \varrho_{1j} S_{kj}$$

$$(k = 3 \ldots n),$$

so bekommen wir:

$$(\bar{P}_2 S_{1,2}) = -\bar{P}_1 - \sum_3^n{}^j (\beta_{1j}' S_{1j} + \beta_{2j}' S_{2j}),$$

das heisst: die Gleichungen (27) behalten bei Einführung von $\bar{P}_1 \ldots \bar{P}_n$ ihre Form, welche Werthe auch die Parameter ϱ_{1j}, ϱ_{2j} haben mögen.

Um die ϱ_{1j} zu verwerthen, benutzen wir die $n-2$ Gleichungen:

$$(P_1 S_{2k}) = \sum_1^{n-1}{}^i \sum_{i+1}^n{}^j \alpha_{ij}^{(k)} S_{ij} \qquad (k > 2),$$

aus denen sich ergiebt:

$$(\bar{P}_1 S_{2k}) = (P_1 S_{2k}) - \varrho_{1k} S_{1,2} + \sum_3^n{}^j \varrho_{2j} S_{kj};$$

indem wir $\varrho_{1k} = \alpha_{1,2}^{(k)}$ setzen, erreichen wir, dass die $n-2$ Ausdrücke $(\bar{P}_1 S_{2k})$ von $S_{1,2}$ frei werden.

Nicht so bequem lassen sich die ϱ_{2k} verwerthen; wenn $n>3$ ist, können wir sie allerdings benutzen, um die Ausdrücke $(\bar{P}_1 S_{2k})$ zu vereinfachen, ist aber $n=3$, so geht das nicht. In diesem Falle wird nämlich:

$$(\bar{P}_1 S_{2,3}) = (P_1 S_{2,3}) - \varrho_{1,3} S_{1,2},$$

also hängt der Ausdruck $(\bar{P}_1 S_{2,3})$ von $\varrho_{2,3}$ gar nicht ab, ja man kann sich sogar leicht überzeugen, dass für $n=3$ überhaupt alle neun Ausdrücke $(\bar{P}_k S_{\mu\nu})$ von $\varrho_{2,3}$ frei werden. Wollen wir daher den Fall $n=3$ zugleich mit dem Falle $n>3$ erledigen, so dürfen wir die ϱ_{2j} nicht zur Vereinfachung der $(\bar{P}_k S_{\mu\nu})$ benutzen, sondern zur Vereinfachung der $(P_k P_\nu)$.

Es besteht eine Relation von der Form:

$$(P_1 P_2) = \sum_1^n{}^{\nu} a_\nu P_\nu + \sum_1^{n-1}{}^{k} \sum_{k+1}^n{}^{j} b_{kj} S_{kj};$$

bei Einführung der $\bar{P}$ erhält diese die Gestalt:

$$(P_1 \bar{P}_2) = \sum_1^n{}^{\nu} a_\nu \bar{P}_\nu - 2 \sum_3^n{}^{j} \varrho_{2j} \bar{P}_j + \sum_1^{n-1}{}^{k} \sum_{k+1}^n{}^{j} b'_{kj} S_{kj},$$

durch geeignete Wahl der ϱ_{2j} können wir es somit dahin bringen, dass $(\bar{P}_1 \bar{P}_2)$ von $\bar{P}_3 \ldots \bar{P}_n$ frei wird, dabei ist es ganz gleichgültig, ob $n=3$ oder >3 ist.

Nachdem wir auf diese Weise alle verfügbaren Parameter untergebracht haben, lassen wir die Striche über den P_ν weg; zwischen $P_1 \ldots P_n$ und $S_{1,2}$, $S_{1,3}, \ldots S_{1n}$ haben wir dann die Relationen (27) und ausserdem wissen wir, dass alle $(P_1 S_{2k})$ $(k>2)$ von $S_{1,2}$ frei sind, sowie dass $(P_1 P_2)$ jedenfalls $P_3 \ldots P_n$ nicht enthält. Da alle P_ν vollständig normirt sind, müssen wir nunmehr die übrigen Relationen zwischen den $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$ infinitesimalen Transformationen P_ν, S_{kj} durch Bildung Jacobischer Identitäten erhalten.

Zunächst bilden wir für $k>2$ die beiden Identitäten:

$$(28) \quad \begin{cases} ((P_1 S_{2k}) S_{1,2}) + P_k - (P_2 S_{2k}) = 0 \\ ((P_2 S_{1k}) S_{1,2}) - (P_2 S_{2k}) + P_k + \\ \qquad + \sum_3^n{}^{j} \beta'_{1j} S_{kj} + \beta'_{2k} S_{1,2}. \end{cases}$$

Von diesen zeigt die erste, dass $(P_2 S_{2k})$ die Form hat:

$$(29) \quad (P_2 S_{2k}) = P_k + \sum_3^n{}^{j} (\gamma_{1j} S_{1j} + \gamma_{2j} S_{2j}),$$

denn der Ausdruck $((P_1 S_{2k}) S_{12})$ ist von den P_ν frei und enthält höchstens solche $S_{\mu\nu}$, bei denen ein Zeiger gleich 1 oder gleich 2 ist, $S_{1,2}$ dagegen enthält er nicht. Da von dem Ausdruck $((P_2 S_{1k}) S_{1,2})$ dasselbe gilt, so zeigt die zweite der Identitäten (28), dass alle β'_{2k} null sind und dass im Falle $n > 3$ zugleich alle β'_{1j} verschwinden. Folglich hat der Ausdruck für $(P_2 S_{1,2})$ die einfache Gestalt:

$$(27') \qquad (P_2 S_{1,2}) = -P_1 - \beta S_{1,3},$$

wo β jedenfalls dann gleich Null ist, wenn $n > 3$, zugleich erhalten die Relationen (28) die Form:

$$(28') \qquad ((P_1 S_{2k}) S_{1,2}) = ((P_2 S_{1k}) S_{1,2}) = (P_2 S_{2k}) - P_k.$$

Um die γ_{1j} und γ_{2j} zu bestimmen, bilden wir die beiden Identitäten zwischen P_1, S_{1k}, $S_{1,2}$ und zwischen: P_2, S_{2k}, $S_{1,2}$; sie lauten:

$$(30) \qquad \begin{cases} (P_k S_{1,2}) - (P_1 S_{2k}) - (P_2 S_{1k}) = 0 \\ ((P_2 S_{2k}) S_{1,2}) + (P_2 S_{1k}) + (P_1 S_{2k}) - \beta \cdot \varepsilon_{k3} S_{1,2} = 0. \end{cases}$$

Nun ist in Folge von (29):

$$((P_2 S_{2k}) S_{1,2}) = (P_k S_{1,2}) + \sum_3^n{}^j (\gamma_{1j} S_{2j} - \gamma_{2j} S_{1j}),$$

also ergiebt sich aus (30):

$$(P_k S_{1,2}) = (P_1 S_{2k}) + (P_2 S_{1k})$$

$$= \tfrac{1}{2}\beta \cdot \varepsilon_{k3} S_{1,2} + \tfrac{1}{2} \sum_3^n{}^j (\gamma_{2j} S_{1j} - \gamma_{1j} S_{2j}).$$

Hieraus folgt:

$$((P_1 S_{2k}) S_{1,2}) + ((P_2 S_{1k}) S_{1,2}) = \tfrac{1}{2} \sum_3^n{}^j (\gamma_{1j} S_{1j} + \gamma_{2j} S_{2j}),$$

nach (28') und (29) hat aber die linke Seite dieser Gleichung den Werth:

$$2(P_2 S_{2k}) - 2P_k = 2 \sum_3^n{}^j (\gamma_{1j} S_{1j} + \gamma_{2j} S_{2j}),$$

mithin verschwinden die γ_{1j} und γ_{2j} sämmtlich und wir haben:

$$(31) \qquad \begin{cases} (P_2 S_{2k}) = P_k \\ (P_1 S_{2k}) + (P_2 S_{1k}) = (P_k S_{1,2}) = \tfrac{1}{2}\beta\, \varepsilon_{k3} S_{1,2} \\ \qquad\qquad (k > 2). \end{cases}$$

Jetzt bilden wir die nachstehenden Identitäten:

$$(32) \qquad \begin{cases} ((P_k S_{1k}) S_{1,2}) - (P_k S_{2k}) + \tfrac{1}{2}\beta\, \varepsilon_{k3} S_{2k} = 0 \\ ((P_k S_{2k}) S_{1,2}) + (P_k S_{1k}) - \tfrac{1}{2}\beta\, \varepsilon_{k3} S_{1k} = 0 \end{cases}$$

$$(33)\qquad \begin{cases} ((P_1 S_{2k}) S_{1k}) - P_2 \qquad\quad - (P_k S_{2k}) = 0 \\ ((P_2 S_{1k}) S_{2k}) - P_1 - \beta S_{1,3} - (P_k S_{1k}) = 0 \end{cases}$$

$$(34)\qquad ((P_k S_{1k}) S_{2k}) + \tfrac{1}{2}\beta \varepsilon_{k3} S_{1,2} - ((P_k S_{2k}) S_{1k}) = 0,$$

in denen natürlich $k > 2$ angenommen wird.

Aus der ersten der Identitäten (32) geht hervor, dass $(P_k S_{2k})$ die Form hat:

$$(35)\qquad (P_k S_{2k}) = - P_2 + \sum_3^n{}^j (h_{1j}^{(k)} S_{1j} + h_{2j}^{(k)} S_{2j}),$$

hier ist aber jedenfalls $h_{2k}^{(k)}$ gleich Null; da nämlich $(P_1 S_{2k})$ von $S_{1,2}$ frei ist, so ist $((P_1 S_{2k}) S_{1k})$ von S_{2k} frei, die erste der Identitäten (33) zeigt in Folge dessen, dass auch $(P_k S_{2k})$ das S_{2k} nicht enthält.

Wird der Werth von $(P_k S_{2k})$ in die zweite der Identitäten (32) eingesetzt, so kommt:

$$(36)\qquad \begin{cases} (P_k S_{1k}) = - P_1 - \beta S_{1,3} + \tfrac{1}{2}\beta \varepsilon_{k3} S_{1k} + \\ \qquad\qquad + \sum_3^n{}^j (h_{2j}^{(k)} S_{1j} - h_{1j}^{(k)} S_{2j}); \end{cases}$$

werden endlich die Werthe von $(P_k S_{1k})$ und $(P_k S_{2k})$ in (34) eingesetzt, so ergiebt sich:

$$- (P_1 S_{2k}) + \beta \varepsilon_{k3} S_{1,2} - \tfrac{1}{2}\beta \varepsilon_{k3} S_{1,2} - \sum_3^n{}^j h_{1j}^{(k)} S_{kj} +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\beta \varepsilon_{k3} S_{1,2} + (P_2 S_{1k}) - \sum_3^n{}^j h_{1j}^{(k)} S_{kj} = 0,$$

denn $h_{2k}^{(k)}$ ist ja gleich Null. Wir finden somit:

$$(P_1 S_{2k}) - (P_2 S_{1k}) = \beta \varepsilon_{k3} S_{1,2} - 2 \sum_3^n{}^j h_{1j}^{(k)} S_{kj},$$

also mit Benutzung von (31):

$$(P_1 S_{2k}) = \tfrac{3}{4}\beta \varepsilon_{k3} S_{1,2} - \sum_3^n{}^j h_{1j}^{(k)} S_{kj};$$

da aber $(P_1 S_{2k})$ von $S_{1,2}$ frei ist, auch im Falle $n = 3$, so muss β auch im Falle $n = 3$ verschwinden und wir bekommen:

$$(37)\qquad \begin{cases} (P_1 S_{2k}) = - (P_2 S_{1k}) = - \sum_3^n{}^j h_{1j}^{(k)} S_{kj} \\ (P_2 S_{12}) = - P_{1j}, \quad (P_k S_{12}) = 0 \quad (k > 3). \end{cases}$$

Aus (33) erhalten wir ausserdem noch:

$$(P_k S_{1k}) = -P_1 - \sum_1^n{}_j (1 - \varepsilon_{kj})\, h_{1j}^{(k)} S_{2j}$$

$$(P_k S_{2k}) = -P_2 + \sum_1^n{}_j (1 - \varepsilon_{kj})\, h_{1j}^{(k)} S_{1j},$$

was mit (35) und (36) verglichen zeigt, dass alle $h_{2j}^{(k)}$ und alle $h_{1k}^{(k)}$ verschwinden.

Dass auch alle $h_{1j}^{(k)}$ null sind, in denen k und j verschiedene Werthe haben, ist nicht schwer zu beweisen; nöthig ist das natürlich nur für $n > 3$.

Um den Nachweis zu führen, bilden wir die Identitäten:

$$((P_1 S_{2k}) S_{2\mu}) + (P_1 S_{k\mu}) - ((P_1 S_{2\mu}) S_{2k}) = 0$$
$$((P_2 S_{1k}) S_{1\mu}) + (P_2 S_{k\mu}) - ((P_2 S_{1\mu}) S_{1k}) = 0,$$

in denen k und μ zwei von einander verschiedene Zahlen bedeuten, die beide grösser als 2 sind. Wir finden:

$$(P_1 S_{k\mu}) = h_{1\mu}^{(k)} S_{2k} - h_{1k}^{(\mu)} S_{2\mu}$$
$$(P_2 S_{k\mu}) = h_{1k}^{(\mu)} S_{1\mu} - h_{1\mu}^{(k)} S_{1k}$$

und setzen diese Werthe in die Identität zwischen P_1, P_2, $S_{k\mu}$ ein, was mit Berücksichtigung von (27) und (31) liefert:

$$((P_1 P_2) S_{k\mu}) + 2h_{1\mu}^{(k)} P_k - 2h_{1k}^{(\mu)} P_\mu = 0;$$

da aber $(P_1 P_2)$ von $P_3 \ldots P_n$ frei ist, so enthält der Ausdruck $((P_1 P_2) S_{k\mu})$ überhaupt keine Glieder mit $P_1 \ldots P_n$, es ergiebt sich also:

$$h_{1\mu}^{(k)} = h_{1k}^{(\mu)} = 0.$$

Demnach sind wirklich auch alle $h_{1j}^{(k)} = 0$, das heisst, es bestehen Relationen von der Form:

$$(38)\qquad \begin{cases} (P_1 S_{1,2}) = P_2, \quad (P_1 S_{1k}) = P_k, \quad (P_1 S_{2k}) = 0 \\ (P_2 S_{1,2}) = -P_1, \quad (P_2 S_{2k}) = P_k, \quad (P_2 S_{1k}) = 0 \\ (P_1 S_{k\mu}) = (P_2 S_{k\mu}) = (P_k S_{1,2}) = 0 \\ (P_k S_{1k}) = -P_1, \quad (P_k S_{2k}) = -P_2 \\ \qquad\qquad (k, \mu > 2;\ k \neq \mu). \end{cases}$$

Für den Fall $n = 3$ sind hierin bereits alle Relationen zwischen je einem P_ν und je einem $S_{k\mu}$ enthalten. Um diese Relationen auch für $n > 3$ alle zu bekommen, bilden wir die Identitäten:

$$((P_1 S_{1k}) S_{\mu\nu}) + 0 + 0 = 0$$
$$((P_1 S_{1k}) S_{k\nu}) - P_\nu + 0 = 0,$$

in denen k, μ, ν irgend drei von einander und von 1 verschiedene Zahlen bedeuten; wegen (38) ergiebt sich hieraus:

$$(P_k S_{\mu\nu}) = 0, \quad (P_k S_{k\nu}) = P_\nu .$$

Damit sind die gewünschten Relationen auch für $n > 3$ sämmtlich bestimmt; sie lassen sich augenscheinlich in die einzige Gleichung:

$$(39) \qquad (P_k S_{\mu\nu}) = \varepsilon_{k\mu} P_\nu - \varepsilon_{k\nu} P_\mu \quad (k, \mu, \nu = 1 \ldots n)$$

zusammenfassen.

Jetzt sind nur noch die Ausdrücke $(P_k P_\nu)$ zu berechnen.

Die Identität:

$$((P_1 P_2) S_{1,2}) + 0 + 0 = 0$$

zeigt, dass $(P_1 P_2)$ auch von P_1 und P_2 frei ist, dass es also überhaupt kein P enthält; zugleich ist klar, dass in $(P_1 P_2)$ kein S_{kj} mit einem Zeiger 1 oder 2 vorkommen kann, mit alleiniger Ausnahme von $S_{1,2}$. Wenn daher $n = 3$ ist, so haben wir: $(P_1 P_2) = a S_{1,2}$.

Ist $n > 3$, so bilden wir die Identität:

$$((P_1 P_2) S_{\mu\nu}) = 0 \quad (\mu, \nu > 2; \ \mu \neq \nu).$$

Wäre $n > 4$, so würde hieraus sofort folgen: $(P_1 P_2) = a S_{1,2}$, im Falle $n = 4$ ergiebt sich jedoch blos, dass

$$(40) \qquad (P_1 P_2) = a S_{1,2} + b S_{3,4}$$

sein muss. In dieser Gleichung sind daher alle möglichen Fälle zusammengefasst, wenn wir nur berücksichtigen, dass b für $n = 3$ und $n > 4$ stets null ist.

Aus den Identitäten:

$$((P_1 P_2) S_{1,3}) + (P_2 P_3) = 0$$
$$((P_1 P_2) S_{2,3}) + (P_3 P_1) = 0$$

folgt nunmehr:

$$(P_2 P_3) = a S_{2,3} + b S_{1,4}$$
$$(P_3 P_1) = a S_{3,1} + b S_{2,4}$$

und demnach:

$$0 = ((P_1 P_2) P_3) + ((P_2 P_3) P_1) + ((P_3 P_1) P_2) = -3 b P_4,$$

das heisst, b verschwindet auch für $n = 4$.

Es ist also: $(P_1 P_2) = a S_{1,2}$, schliesslich zeigen noch die Identitäten:

$$((P_1 P_2) S_{2k}) - (P_1 P_k) = 0$$
$$((P_k P_1) S_{1\nu}) - (P_k P_\nu) = 0,$$

dass die Gleichungen:

$$(P_1 P_k) = a S_{1k}, \quad (P_k P_\nu) = a S_{k\nu}$$

gelten. In den Gleichungen:

$$(41) \qquad (P_k P_\nu) = a S_{k\nu} \quad (k, \nu = 1 \ldots n)$$

sind daher alle Relationen zwischen je zwei von den P_ν enthalten.

Die Grösse a kann verschwinden, braucht es aber nicht.

Ist $a = 0$, so sind die $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$ infinitesimalen Transformationen P_ν, $P_{k\mu}$ durch die einfachen Relationen:

$$(42) \qquad \begin{cases} (S_{jk} S_{\mu\nu}) = \varepsilon_{k\mu} S_{j\nu} - \varepsilon_{j\mu} S_{k\nu} - \varepsilon_{k\nu} S_{j\mu} + \varepsilon_{j\nu} S_{k\mu} \\ (P_k S_{\mu\nu}) = \varepsilon_{k\mu} P_\nu - \varepsilon_{k\nu} P_\mu, \quad (P_k P_\nu) = 0 \\ \qquad\qquad (j, k, \mu, \nu = 1 \ldots n) \end{cases}$$

verknüpft, also genau durch dieselben Relationen wie die infinitesimalen Transformationen der Gruppe:

$$(43) \qquad p_\nu, \quad x_k p_\nu - x_\nu p_k \quad (\nu, k = 1 \ldots n)$$

aller Euklidischen Bewegungen des R_n. Nach dem Theorem 110 auf S. 614 von Abschn. I ist daher in diesem Falle die Gruppe P_ν, $S_{k\mu}$ mit der Gruppe (43) durch eine Punkttransformation des Raumes $x_1 \ldots x_n$ ähnlich.

Ist dagegen $a \neq 0$, so führen wir $\frac{1}{\sqrt{a}} P_\nu$ als neues P_ν ein und haben dann zwischen den $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$ infinitesimalen Transformationen P_ν, $S_{k\mu}$ die Relationen:

$$(44) \qquad \begin{cases} (S_{jk} S_{\mu\nu}) = \varepsilon_{k\mu} S_{j\nu} - \varepsilon_{j\mu} S_{k\nu} - \varepsilon_{k\nu} S_{j\mu} + \varepsilon_{j\nu} S_{k\mu} \\ (P_k S_{\mu\nu}) = \varepsilon_{k\mu} P_\nu - \varepsilon_{k\nu} P_\mu, \quad (P_k P_\nu) = S_{k\nu} \\ \qquad\qquad (j, k, \mu, \nu = 1 \ldots n). \end{cases}$$

Genau dieselben Relationen bestehen aber zwischen den infinitesimalen Transformationen einer schon auf S. 289 erwähnten Gruppe, nämlich zwischen den $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$ unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

$$(45) \qquad p_\nu - x_\nu \sum_1^n{}_\tau\, x_\tau p_\tau, \quad x_k p_\nu - x_\nu p_k \qquad (k, \nu = 1 \ldots n),$$

der grössten continuirlichen projectiven Gruppe des R_n, bei der die $(n-1)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit zweiten Grades:

$$(46) \qquad x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$$

invariant bleibt. Dem vorhin benutzten Theorem zufolge ist daher für $a \neq 0$ die Gruppe P_k, $S_{\mu\nu}$ mit der Gruppe (45) durch eine Punkttransformation des Raumes $x_1 \ldots x_n$ ähnlich.

Hiermit ist die zu Anfang des Kapitels gestellte Aufgabe für $n > 2$ vollständig erledigt, wir können also das Theorem aussprechen:

Theorem 24. *Lässt eine continuirliche Gruppe eines Raumes $x_1 \ldots x_n$ von mehr als zwei Dimensionen eine Differentialgleichung zweiten Grades:*

$$\sum_{k\,v}^{1\ldots n} f_{kv}(x_1 \ldots x_n)\, dx_k\, dx_v = 0$$

invariant, deren Determinante nicht identisch verschwindet, und transformirt sie ausserdem die Richtungen durch jeden festgehaltenen Punkt von allgemeiner Lage in möglichst allgemeiner Weise, also gerade $\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}$-gliedrig, so ist diese Gruppe stets endlich und hat entweder $\frac{n(n+1)}{1\,.\,2}$ oder $\frac{n(n+1)}{1\,.\,2}+1$ oder $\frac{(n+1)(n+2)}{1\,.\,2}$ Parameter; im ersten Falle ist sie durch eine Punkttransformation des Raumes $x_1 \ldots x_n$ entweder mit der Gruppe:

(I) $$\boxed{p_k,\ x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu \quad (k, \mu, \nu = 1 \ldots n)}$$

oder mit der Gruppe:

(II) $$\boxed{p_k - x_k \sum_1^{\tau}{}^{n} x_\tau p_\tau,\ x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu \quad (k, \mu, \nu = 1 \ldots n)}$$

ähnlich, im zweiten Falle ist sie mit der Gruppe:

(III) $$\boxed{p_k,\ x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu,\ \sum_1^{\tau}{}^{n} x_\tau p_\tau \quad (k, \mu, \nu = 1 \ldots n)}$$

ähnlich, im dritten mit der Gruppe:

(IV) $$\boxed{\begin{array}{l} p_k,\ x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu,\ \sum_1^{\tau}{}^{n} x_\tau p_\tau \\ 2x_k \sum_1^{\tau}{}^{n} x_\tau p_\tau - p_k \sum_1^{\tau}{}^{n} x_\tau^2 \\ (k, \mu, \nu = 1 \ldots n) \end{array}}$$

und zwar ebenfalls jedesmal durch eine Punkttransformation des Raumes $x_1 \ldots x_n$.

Offenbar ist jede der Gruppen (I) . . . (IV) primitiv; denn hält man den Punkt von allgemeiner Lage: $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ fest, so bleibt jedesmal in dem Raume der ∞^{n-1} Richtungen: $x_1' : \cdots : x_n'$ durch diesen Punkt nur die Mannigfaltigkeit zweiten Grades: $x_1'^2 + \cdots + x_n'^2 = 0$ invariant, dagegen keine ebene Mannigfaltigkeit von Richtungen. Da nun unser Theorem für $n > 2$, also insbesondere auch für $n = 3$ bewiesen ist, so liefern die vorstehenden Entwicklungen zugleich eine neue Begründung gewisser Ergebnisse des Kapitels 7 (vgl. S. 122 und S. 126—137).

§ 76.

Nunmehr wenden wir uns zu dem bisher ausgeschlossenen Falle $n = 2$, wir begnügen uns aber, wie schon früher angekündigt, mit der Aufstellung aller endlichen continuirlichen Gruppen des R_2, denen die hier verlangten Eigenschaften zukommen.

Es handelt sich also darum, in zwei Veränderlichen x_1, x_2 alle endlichen continuirlichen Gruppen aufzustellen, die eine Gleichung von der Form:

$$(47) \qquad \alpha(x_1, x_2)\, dx_1^2 + 2\beta(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 + \gamma(x_1, x_2)\, dx_2^2 = 0$$

mit nicht identisch verschwindender Determinante: $\beta^2 - \alpha\gamma$ invariant lassen und die ausserdem die ∞^1 Richtungen: $dx_1 : dx_2$ durch jeden festgehaltenen Punkt von allgemeiner Lage in möglichst allgemeiner Weise transformiren.

Halten wir einen Punkt x_1^0, x_2^0 von allgemeiner Lage fest, so bleiben offenbar unter den ∞^1 Richtungen: $dx_1 : dx_2$ durch diesen Punkt jedenfalls die beiden in Ruhe, die durch die Gleichung:

$$\alpha(x_1^0, x_2^0)\, dx_1^2 + 2\beta(x_1^0, x_2^0)\, dx_1 dx_2 + \gamma(x_1^0, x_2^0)\, dx_2^2 = 0$$

bestimmt sind; sollen daher diese ∞^1 Richtungen in möglichst allgemeiner Weise transformirt werden, so müssen sie nothwendig eingliedrig transformirt werden. Andrerseits folgt aus der Invarianz der beiden vorhin definirten Richtungen, dass jede der gesuchten Gruppen zwei verschiedene Schaaren von je ∞^1 Curven der Ebene x_1, x_2 invariant lässt (s. S. 60). Da wir nun alle endlichen continuirlichen Gruppen der Ebene kennen, die zwei verschiedene Schaaren von je ∞^1 Curven invariant lassen (s. S. 73), so brauchen wir nur unter diesen alle die aufzusuchen, bei denen die ∞^1 Richtungen durch jeden festgehaltenen Punkt von allgemeiner Lage gerade eingliedrig transformirt werden.

Auf diese Weise ergiebt sich, dass jede endliche continuirliche

Gruppe der Ebene von der hier verlangten Beschaffenheit bei geeigneter Wahl der Veränderlichen eine der folgenden Formen erhalten kann:

(48) $p_1,\ p_2,\ x_1p_1 + cx_2p_2 \quad (c \neq 1)$

(49) $p_1,\ p_2,\ x_1p_1,\ x_2p_2$

(50) $p_1 + p_2,\ x_1p_1 + x_2p_2,\ x_1^2p_1 + x_2^2p_2$

(51) $p_1,\ x_1p_1,\ x_1^2p_1;\ p_1,\ x_1p_1$

(52) $p_1,\ p_2,\ x_1p_1,\ x_1^2p_1;\ p_1, p_2,\ x_1p_1,\ x_2p_2,\ x_1^2p_1$

(53) $p_1,\ p_2,\ x_1p_1,\ x_2p_2,\ x_1^2p_1,\ x_2^2p_2$.

Während es also für $n > 2$ nur vier verschiedene Typen von derartigen Gruppen giebt, erhalten wir für $n = 2$ acht Typen, von denen zwei intransitiv sind und einer einen wesentlichen Parameter enthält.

Die Gruppen (51) und (52) lassen wir bei Seite, da es für $n > 2$ keine ihnen entsprechenden Gruppen giebt. Die übrigen Gruppen dagegen lassen sich auf solche Formen bringen, dass die Analogie mit den Räumen von mehr als zwei Dimensionen deutlich hervortritt. In der That, die Gruppe (50) ist (vgl. S. 76 und 88) durch eine Punkttransformation der Ebene x_1, x_2 ähnlich mit der dreigliedrigen projectiven Gruppe:

(50′) $$\begin{cases} p_1 - x_1(x_1p_1 + x_2p_2), \quad p_2 - x_2(x_1p_1 + x_2p_2) \\ x_1p_2 - x_2p_1 \end{cases}$$

des Kegelschnitts:

$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0.$$

Die Gruppen (48), (49) und (53) andrerseits verwandeln sich bei der Punkttransformation:

(54) $$x_1 = x_1' + ix_2', \quad x_2 = x_1' - ix_2'$$

der Reihe nach in die Gruppen:

(48′) $p_1',\ p_2',\ x_1'p_2' - x_2'p_1' + c'(x_1'p_1' + x_2'p_2')$

(49′) $p_1',\ p_2',\ x_1'p_2' - x_2'p_1',\ x_1'p_1' + x_2'p_2'$

(53′) $$\begin{cases} p_1',\ p_2',\ x_1'p_2' - x_2'p_1',\ x_1'p_1' + x_2'p_2' \\ 2x_1'(x_1'p_1' + x_2'p_2') - p_1'(x_1'^2 + x_2'^2) \\ 2x_2'(x_1'p_1' + x_2'p_2') - p_2'(x_1'^2 + x_2'^2), \end{cases}$$

wo das c' durch die Gleichung:

$$c' = \frac{i(1+c)}{1-c} \quad (c \neq 1)$$

definirt ist und also jeden endlichen Werth annehmen kann.

Wie man sieht, entsprechen die Gruppen (50′), (49′), (53′) genau

den früher für $n > 2$ gefundenen, die Gruppe (48′) allerdings hat für $n > 2$ nur dann ein Analogon, wenn c' verschwindet.

§ 77 *).

Wir haben gesehen, dass es keine unendlichen, sondern nur endliche continuirliche Gruppen giebt, die eine Gleichung von der Form:

$$(1) \qquad \sum_{k\nu}^{1\ldots n} f_{k\nu}(x_1 \ldots x_n)\, dx_k\, dx_\nu = 0$$

mit nicht verschwindender Determinante invariant lassen und die ∞^{n-1} Linienelemente durch jeden festgehaltnen Punkt von allgemeiner Lage in möglichst allgemeiner Weise transformiren. Damit ist aber noch keineswegs bewiesen, dass überhaupt jede continuirliche Gruppe, die eine Gleichung (1) mit nicht verschwindender Determinante invariant lässt, endlich ist, es bedarf vielmehr noch einer besondern Untersuchung, wenn man feststellen will, ob sich die Sache so verhält. Statt nun aber diese Untersuchung für die Gleichungen von der Form (1) allein durchzuführen, wollen wir, wie oben auf S. 315 angekündigt wurde, lieber gleich eine beliebige, in den dx_ν homogene Gleichung

$$(54) \qquad \Omega(x_1 \ldots x_n,\ dx_1 \ldots dx_n) = 0$$

betrachten. Wir werden sehen, dass die grösste continuirliche Gruppe von Punkttransformationen, bei der eine solche Gleichung invariant bleibt, unter gewissen Voraussetzungen stets endlich ist.

Wäre die Gleichung (54) in den dx_ν linear, wäre sie also eine Pfaffsche Gleichung, so gestattete sie sicher eine unendliche continuirliche Gruppe von Punkttransformationen; den Fall, dass die Gleichung (54) linear ist, müssen wir daher von vornherein ausschliessen. Wir können ferner ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass die Gleichung (54), als Gleichung in den dx_ν betrachtet, irreducibel ist, dass sie also nicht in mehrere Gleichungen für $dx_1 \ldots dx_n$ zerfällt. Diese Voraussetzung wird immer erfüllt sein, wenn wir uns (54) von vornherein nach einem der dx_ν aufgelöst denken, also etwa in der Form:

$$(54') \qquad dx_n = dx_{n-1}\, \omega\left(x_1 \ldots x_n,\ \frac{dx_1}{dx_{n-1}} \cdots \frac{dx_{n-2}}{dx_{n-1}}\right),$$

wo ω in der Umgebung irgend eines allgemein gelegenen Werthsystems seiner Argumente in eine gewöhnliche Potenzreihe entwickelt

*) Da die Entwicklungen der späteren Kapitel von denen des § 77 ganz unabhängig sind, so kann der Leser diesen Paragraphen zunächst überschlagen.

ist. Natürlich darf hier das Product: $dx_{n-1}\,\omega$ keine lineare Function von $dx_1 \ldots dx_{n-1}$ sein.

Da jedes Werthsystem x_r, dx_r ein Linienelement des R_n bestimmt, so ordnet die Gleichung (54′) jedem Punkte $x_1 \ldots x_n$ von allgemeiner Lage eine Schaar von ∞^{n-2} hindurchgehenden Linienelementen zu und diese Schaar bildet unter den gemachten Voraussetzungen eine krumme, nicht zerfallende Mannigfaltigkeit in dem Raume der ∞^{n-1} durch den Punkt gehenden Linienelemente. Denken wir uns nun in jedem Punkte des R_n alle hindurchgehenden ebenen $(n-1)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten:

$$(55) \qquad \xi_n - x_n = p_1(\xi_1 - x_1) + \cdots + p_{n-1}(\xi_{n-1} - x_{n-1})$$

construirt, die die eben besprochene Schaar von ∞^{n-2} Linienelementen berühren, so erhalten wir in jedem Punkte eine Schaar von unendlich vielen hindurchgehenden Mannigfaltigkeiten (55). Berücksichtigen wir daher, dass jeder Punkt $x_1 \ldots x_n$ zusammen mit einer hindurchgehenden ebenen Mannigfaltigkeit (55) ein M_{n-1}-element*) des R_n bestimmt, so erkennen wir, dass durch die Gleichung (54′) zugleich eine gewisse Schaar von M_{n-1}-elementen des R_n gegeben ist.

Die Gleichungen dieser Schaar von M_{n-1}-elementen sind leicht zu bestimmen.

Zunächst ist klar, dass die ebene Mannigfaltigkeit (55) dann und nur dann durch das Linienelement: $x_1 \ldots x_n$, $dx_1 \ldots dx_n$ hindurchgeht, wenn $p_1 \ldots p_n$ die Gleichung:

$$(56) \qquad dx_n - \sum_1^{n-1 k} p_k\, dx_k = 0$$

befriedigen. Setzen wir nun:

$$\frac{dx_1}{dx_{n-1}} = x_1', \cdots, \frac{dx_{n-2}}{dx_{n-1}} = x_{n-2}'$$

und:

$$\omega(x_1 \ldots x_n,\ x_1' \ldots x_{n-2}') = \omega',$$

so finden wir sofort, dass die Mannigfaltigkeit (55) die dem Punkte

*) s. Abschn. II, S. 103 f. Dort wird allerdings nur die Bezeichnung: „Element des R_n“ eingeführt und in dem ganzen zweiten Abschnitt ist nur von „Elementen“ die Rede. Hier jedoch, wo ja auch von Linienelementen des R_n gesprochen wird, brauchen wir, um Verwechselungen vorzubeugen, den Ausdruck: „Element einer $(n-1)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit des R_n“ oder kürzer: „M_{n-1}-element des R_n“. Diese Ausdrucksweise ist nicht blos leicht verständlich, sondern entspricht auch unserm früheren Gebrauche in der Ebene und im gewöhnlichen Raume, denn wir nannten ja die Elemente der Ebene auch Linienelemente und die Elemente des Raumes auch Flächenelemente (s. Abschn. II, S. 4 u. 47).

$x_1 \ldots x_n$ zugeordnete Schaar von ∞^{n-2} Linienelementen stets dann, aber auch nur dann berührt, wenn die Gleichungen:

$$(57)\qquad \begin{cases} p_1 = \dfrac{\partial \omega'}{\partial x_1'}, \ldots, p_{n-2} = \dfrac{\partial \omega'}{\partial x_{n-2}'} \\ p_{n-1} = \omega' - \sum_1^{n-2} x_v' \dfrac{\partial \omega'}{\partial x_v'} \end{cases}$$

bestehen; die Gleichungen der vorhin definirten Schaar von M_{n-1}-Elementen des R_n werden demnach erhalten, wenn man $x_1' \ldots x_{n-2}'$ aus (57) wegschafft.

Wie viele von $x_1' \ldots x_{n-2}'$ freie Gleichungen sich aus (57) ergeben, das hängt von der Beschaffenheit der Determinante:

$$(58)\qquad \sum \pm \frac{\partial^2 \omega'}{\partial x_1'^2} \cdots \frac{\partial^2 \omega'}{\partial x_{n-2}'^2}$$

ab. Verschwindet diese Determinante nicht identisch, so erhält man aus (57) durch Wegschaffung der x' nur eine Gleichung:

$$(59)\qquad F(x_1 \ldots x_n,\ p_1 \ldots p_{n-1}) = 0$$

zwischen $x_1 \ldots x_n$, $p_1 \ldots p_{n-1}$ allein, verschwindet dagegen die Determinante identisch, so erhält man aus (57) ein System von mindestens zwei unabhängigen Gleichungen zwischen $x_1 \ldots x_n$, $p_1 \ldots p_{n-1}$.

Wir wollen uns auf den Fall beschränken, dass die Determinante (58) nicht identisch verschwindet, wir wollen also mit andern Worten annehmen, dass die Schaar der ∞^{n-2} Linienelemente, die dem Punkte $x_1 \ldots x_n$ durch die Gleichung (54′) zugeordnet wird, ∞^{n-2} verschiedene durch diesen Punkt gehende, $(n-1)$-fach ausgedehnte Tangentialebenen besitzt, oder, was auf dasselbe hinauskommt, dass diese Schaar von ∞^{n-2} Linienelementen in dem $(n-1)$-fach ausgedehnten Raume aller ∞^{n-1} Linienelemente durch den Punkt $x_1 \ldots x_n$ eine nicht abwickelbare Mannigfaltigkeit bildet. Unter Einführung dieser Beschränkung wird es uns ohne Schwierigkeit gelingen, zu zeigen, dass die grösste continuirliche Gruppe von Punkttransformationen des R_n, bei der die Gleichung (54′) invariant bleibt, nur von einer endlichen Zahl von Parametern abhängt.

Den Fall, dass die Determinante (58) identisch verschwindet, lassen wir ganz bei Seite, weil er sich nicht so allgemein erledigen lässt.

Wir setzen also voraus, dass die Determinante (58) von Null verschieden ist und dass die Gleichung zwischen $x_1 \ldots x_n$, $p_1 \ldots p_{n-1}$, die sich aus (57) durch Wegschaffung der x' ergiebt, die Form (59) hat.

Die Grössen $p_1 \ldots p_{n-1}$ sind ursprünglich nichts andres als die Coordinaten der $(n-1)$-fach ausgedehnten Ebenen (55), die durch einen beliebigen Punkt $x_1 \ldots x_n$ gehen; die Gleichung (59) ist daher nach ihrer Ableitung im Grunde nur eine andre analytische Darstellung des geometrischen Gebildes, das durch die Gleichung (54′) definirt wird. Nun aber zeigt die Gleichung (56), dass man $p_1 \ldots p_{n-1}$ auch als die partiellen Differentialquotienten einer Function x_n der Veränderlichen $x_1 \ldots x_{n-1}$ betrachten kann; die Gleichung (59) lässt sich daher auch als eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit der unbekannten Function x_n auffassen.

Diese Auffassung der Gleichung (59) werden wir im Folgenden zu Grunde legen. Da nämlich die Gleichung (59) in gewissem Sinne nur eine andre Form der Gleichung (54′) ist, so ist klar, dass diese beiden Gleichungen gegenüber allen Punkttransformationen des R_n invariant mit einander verknüpft sind; hieraus aber folgt, dass der Inbegriff aller Punkttransformationen des R_n, die (54′) invariant lassen, identisch ist mit dem Inbegriff aller Punkttransformationen, bei denen die partielle Differentialgleichung erster Ordnung (59) invariant bleibt. Haben wir daher bewiesen, dass die grösste continuirliche Gruppe von Punkttransformationen des R_n, die (59) invariant lässt, blos endlich ist, so ist damit auch für die Gleichung (54′) dasselbe bewiesen.

Wir müssen jetzt Einiges aus der Integrationstheorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung als bekannt voraussetzen*).

Die partielle Differentialgleichung (59) scheidet unter den ∞^{2n-1} M_{n-1}-elementen des R_n eine Schaar von ∞^{2n-2} Elementen aus. Diese ∞^{2n-2} Elemente lassen sich, wie aus der Integrationstheorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung bekannt ist, in ganz bestimmter Weise in ∞^{2n-3} solche Elementmannigfaltigkeiten anordnen, dass jede dieser Elementmannigfaltigkeiten gerade ∞^1 Elemente enthält und dass jedes Element von allgemeiner Lage, das der Gleichung (59) genügt, einer und nur einer derartigen Elementmannigfaltigkeit angehört. Man bezeichnet diese ∞^{2n-3} Elementmannigfaltigkeiten als die Charakteristiken der Differentialgleichung (59).

Nun ordnet aber in unserm Falle die Gleichung (59) jedem Punkte

*) Die hier benutzten Sätze aus der Integrationstheorie dieser Differentialgleichungen sind allgemein bekannt; in Abschn. II sind sie nicht mit entwickelt worden, weil es da überhaupt nicht unsre Absicht war, eine vollständige Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zu geben. Wir werden jedoch in dem gegenwärtigen Abschnitte noch einmal auf diese Integrationstheorie zurückkommen.

von allgemeiner Lage eine solche Schaar von ∞^{n-2} hindurchgehenden M_{n-1}-elementen zu, die einen Kegel von ∞^{n-2} durch den Punkt gehenden Linienelementen umhüllt, den Kegel nämlich, der von der Gleichung (54′) dem Punkte zugeordnet wird. Demnach bestimmen die ∞^{2n-3} Charakteristiken von (59), als Punktgebilde des R_n aufgefasst, eine Schaar von ∞^{2n-3} Curven dieses Raumes und es gehen durch jeden Punkt des R_n gerade ∞^{n-2} solche Curven. Denkt man sich durch jeden Punkt des Raumes die ∞^{n-2} hindurchgehenden Charakteristiken gelegt, so erhält man ∞^n verschiedene $(n-1)$-fach ausgedehnte Punktmannigfaltigkeiten, die sämmtlich Integralmannigfaltigkeiten der Differentialgleichung (59) sind, die sogenannten Integralconoide von (59). Da jede Charakteristik ∞^1 verschiedene Punkte enthält, gehen durch sie offenbar auch gerade ∞^1 solche Integralconoide.

Für uns sind die Charakteristiken und die Integralconoide deshalb wichtig, weil jede Punkttransformation des R_n, bei der die Differentialgleichung (59) invariant bleibt, zugleich auch die Schaar ihrer ∞^{2n-3} Charakteristiken und die Schaar ihrer ∞^n Integralconoide invariant lässt.

Denken wir uns jetzt die ∞^{2n-3} Charakteristiken von (59) mit einer $(n-1)$-fach ausgedehnten ebenen Mannigfaltigkeit E von allgemeiner Lage geschnitten. Jede Charakteristik von (59) trifft E im Allgemeinen nur in einem Punkte und das zu diesem Punkte gehörige M_{n-1}-element der Charakteristik bestimmt auf E einen Punkt mit einer hindurchgehenden ebenen $(n-2)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit, es bestimmt also mit andern Worten ein gewisses M_{n-2}-element von E. Jeder Charakteristik von (59) ist auf diese Weise ein gewisses M_{n-2}-element von E zugeordnet. Andrerseits ist klar, dass durch jedes M_{n-2}-element von E stets eine gewisse, aber nothwendig discrete Anzahl von solchen M_{n-1}-elementen des R_n hindurchgeht, die der Gleichung (59) genügen. Folglich bestimmt jedes M_{n-2}-element von E eine gewisse discrete Anzahl von Charakteristiken der Differentialgleichung (59).

Hieraus ergiebt sich, dass zwischen den ∞^{2n-3} Charakteristiken von (59) und den ∞^{2n-3} M_{n-2}-elementen von E ein Entsprechen stattfindet, das jedenfalls innerhalb eines gewissen Bereiches von Charakteristiken und eines gewissen Bereiches von M_{n-2}-elementen eindeutig umkehrbar ist. Wir können uns daher die ∞^{2n-3} Charakteristiken von (59) geradezu auf die ∞^{2n-3} M_{n-2}-elemente von E abgebildet denken.

Bei der so definirten Abbildung werden offenbar zwei unendlich benachbarte Charakteristiken von (59), die einen Punkt gemein haben,

durch zwei unendlich benachbarte, vereinigt liegende M_{n-2}-elemente von E abgebildet. Den ∞^{n-2} Charakteristiken eines beliebigen Integralconoids von (59) entsprechen daher innerhalb E ∞^{n-2} M_{n-2}-elemente, von denen je zwei unendlich benachbarte vereinigt liegen, mit andern Worten ∞^{n-2} M_{n-2}-elemente von E, die eine Elementmannigfaltigkeit bilden. Demnach werden die ∞^n Integralconoide von (59) auf E durch ∞^n $(n-2)$-fach ausgedehnte Elementmannigfaltigkeiten abgebildet; da überdies die ∞^{n-2} Charakteristiken, die auf einem Integralconoid liegen, E im Allgemeinen in ∞^{n-2} verschiedenen Punkten treffen, so ist klar, dass die ∞^n Elementmannigfaltigkeiten von E, die den ∞^n Integralconoiden von (59) entsprechen, als Punktmannigfaltigkeiten im Allgemeinen $(n-2)$-fach ausgedehnt sind. Schliesslich ist noch zu bemerken, dass durch jedes M_{n-2}-element von E gerade ∞^1 von den eben besprochenen ∞^n $(n-2)$-fach ausgedehnten Punktmannigfaltigkeiten gehen; es folgt das daraus, dass durch jede Charakteristik von (59) gerade ∞^1 Integralconoide von (59) gehen*).

Wählen wir also $\mathfrak{z}, \mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_{n-2}$ zu Coordinaten der Punkte von E und $\mathfrak{z}, \mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_{n-2}, \mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_{n-2}$ zu Coordinaten der M_{n-2}-elemente von E, so entspricht innerhalb eines gewissen Bereiches jeder Charakteristik von (59) eindeutig umkehrbar ein Element: $\mathfrak{z}, \mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_{n-2}, \mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_{n-2}$. Den ∞^n Integralconoiden von (59) entsprechen ∞^n Elementmannigfaltigkeiten von E, die als Punktgebilde $(n-2)$-fach ausgedehnt sind und in Folge dessen durch Gleichungen von der Form:

$$(60) \qquad \begin{cases} \mathfrak{z} = \varphi(\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_{n-2};\ x_1 \ldots x_n), \quad \mathfrak{p}_\mu = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{x}_\mu} \\ (\mu = 1 \ldots n-2) \end{cases}$$

dargestellt werden; die Parameter dieser Schaar nennen wir $x_1 \ldots x_n$, weil jedes Integralconoid von (59) durch einen gewissen Punkt $x_1 \ldots x_n$ des R_n bestimmt ist. Endlich wissen wir noch, dass durch jedes Element: $\mathfrak{z}, \mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_{n-2}, \mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_{n-2}$ gerade ∞^1 Mannigfaltigkeiten der Schaar (60) hindurchgehen; hierin liegt, dass sich aus (60) gerade $\frac{1}{2}(n-2)(n-1)-1$ unabhängige von $x_1 \ldots x_n$ freie Relationen zwischen den $\frac{1}{2}(n-2)(n-1)$ partiellen Differentialquotienten zweiter Ordnung:

$$(61) \qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{x}_\mu \partial \mathfrak{x}_\nu} = \mathfrak{p}_{\mu\nu} \qquad (\mu, \nu = 1 \ldots n-2)$$

*) Die hier beschriebene Abbildung der Charakteristiken von (59) auf die M_{n-2}-elemente eines $(n-1)$-fach ausgedehnten Raumes haben wir für den Fall $n = 3$ bereits auf S. 126 ff. kennen gelernt, nur stellten wir sie dort auf etwas andre Weise her.

von z ergeben und dass sich alle Differentialquotienten zweiter und höherer Ordnung von z durch $z, x_1 \ldots x_{n-2}, p_1 \ldots p_{n-2}$ und durch einen der Differentialquotienten (61) etwa durch p_{ik} ausdrücken lassen. Demnach ist jede Mannigfaltigkeit der Schaar (60) vollkommen bestimmt, wenn ein ihr zugehöriges Element: $z, x_1 \ldots x_{n-2}, p_1 \ldots p_{n-2}$ und ausserdem noch der Werth eines gewissen unter den Differentialquotienten (61), etwa der Werth von p_{ik} gegeben ist.

Nunmehr wollen wir annehmen, dass G die grösste continuirliche Gruppe von Punkttransformationen ist, bei der die Gleichung (54′) oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Gleichung (59) invariant bleibt.

Die Gruppe G vertauscht, wie wir schon erwähnten, die ∞^{2n-3} Charakteristiken von (59) unter einander und zwar natürlich durch eine gewisse isomorphe Gruppe $\mathfrak{G}$. Da jede Transformation von G, bei der alle Charakteristiken von (59) in Ruhe bleiben, nothwendig mit der identischen Transformation zusammenfällt, so ist überdies klar, dass $\mathfrak{G}$ mit G holoedrisch isomorph ist.

Bilden wir jetzt die ∞^{2n-3} Charakteristiken von (59) in der vorhin beschriebenen Weise auf die ∞^{2n-3} M_{n-2}-elemente von E ab, so verwandelt sich $\mathfrak{G}$ in eine mit G holoedrisch isomorphe Gruppe $\mathfrak{G}'$ in den Veränderlichen $z, x_1 \ldots x_{n-2}, p_1 \ldots p_{n-2}$. Nun aber führt G zwei unendlich benachbarte Charakteristiken von (59), die sich schneiden, stets in zwei Charakteristiken von derselben Beschaffenheit über; andrerseits aber entsprechen zwei unendlich benachbarten Charakteristiken dieser Art zwei unendlich benachbarte Elemente: z, x_v, p_v und $z + dz, x_v + dx_v, p_v + dp_v$, die vereinigt liegen. Folglich ergiebt sich, dass die Gruppe $\mathfrak{G}'$ nichts andres ist als eine gewisse Gruppe von Berührungstransformationen des Raumes $z, x_1 \ldots x_{n-2}$. Erinnern wir uns endlich, dass G die Schaar der ∞^n Integralconoide von (59) invariant lassen muss und dass diese Integralconoide in dem Raume $z, x_1 \ldots x_{n-2}$ durch die ∞^n Elementmannigfaltigkeiten (60) abgebildet werden, so erkennen wir, dass die Gruppe $\mathfrak{G}'$ die Schaar der ∞^n Elementmannigfaltigkeiten (60) invariant lassen muss.

Ist $z^0, x_1^0 \ldots x_{n-2}^0, p_1^0 \ldots p_{n-2}^0$ irgend ein Element von allgemeiner Lage in dem Raume $z, x_1 \ldots x_{n-2}$, so gehen nach dem Frühern durch dieses Element gerade ∞^1 von den Elementmannigfaltigkeiten (60) und jede dieser Elementmannigfaltigkeiten ist vollständig bestimmt, wenn der zu dem Element z^0, x_v^0, p_v^0 gehörige Werth des Differentialquotienten zweiter Ordnung p_{ik} gegeben ist. Die in $\mathfrak{G}'$ enthaltenen Berührungstransformationen, bei denen das Element z^0, x_v^0, p_v^0 in Ruhe

bleibt, vertauschen natürlich die ∞^1 besprochenen Elementmannigfaltigkeiten unter einander durch eine Gruppe und es lässt sich zeigen, dass diese Gruppe höchstens dreigliedrig ist.

In der That, die eben definirten Berührungstransformationen transformiren offenbar die ∞^1 besprochenen Elementmannigfaltigkeiten genau so, wie sie den Differentialquotienten p_{ik} transformiren, sobald man in ihren Gleichungen überall z, x_ν, p_ν durch z^0, x_ν^0, p_ν^0 ersetzt und alle Differentialquotienten zweiter Ordnung von z durch p_{ik} ausgedrückt hat. Ist aber:

$$(62) \qquad \left\{ z' = Z(z, x, p), \quad x_\nu' = \Xi_\nu(z, x, p), \quad p_\nu' = \Pi_\nu(z, x, p) \right. \quad (\nu = 1 \ldots n-2)$$

die allgemeinste Berührungstransformation von $\mathfrak{G}'$, bei der das Element z^0, x_ν^0, p_ν^0 in Ruhe bleibt, so werden die Differentialquotienten zweiter Ordnung $p'_{\mu\nu}$ von z' offenbar rationale Functionen der $p_{\mu\nu}$ mit Coefficienten, die Functionen von z, $x_1 \ldots x_{n-2}$, $p_1 \ldots p_{n-2}$ sind. Setzt man daher: $z = z^0$, $x_\nu = x_\nu^0$, $p_\nu = p_\nu^0$ und drückt man alle $p_{\mu\nu}$ durch p_{ik} aus, so erhält man eine Gleichung von der Form:

$$(63) \qquad p'_{ik} = W(p_{ik}),$$

wo die Function W nur eine endliche Anzahl von Parametern enthält. Da nun die Gleichung (63) angiebt, in welcher Weise die ∞^1 durch z^0, x_ν^0, p_ν^0 gehenden Mannigfaltigkeiten (60) transformirt werden, so ist klar, dass diese Mannigfaltigkeiten durch eine endliche continuirliche Gruppe der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit transformirt werden. Aus Theor. I, S. 6 ergiebt sich schliesslich, dass die betreffende Gruppe höchstens dreigliedrig sein kann.

Hiermit ist bewiesen, dass die Transformationen von $\mathfrak{G}'$, die ein Element z^0, x_ν^0, p_ν^0 von allgemeiner Lage invariant lassen, die ∞^1 durch dieses Element gehenden Mannigfaltigkeiten (60) höchstens dreigliedrig transformiren. Kehren wir daher zur Gruppe G zurück, so finden wir, dass die Transformationen von G, die eine Charakteristik von (59) invariant lassen, die ∞^1 Integralconoide von (59), die durch diese Charakteristik gehen, höchstens dreigliedrig transformiren.

Nun hat es keine Schwierigkeit mehr, zu beweisen, dass G endlich ist.

Halten wir nämlich eine der ∞^{2n-3} Charakteristiken von (59) fest, so werden die ∞^1 hindurchgehenden Integralconoide höchstens dreigliedrig transformirt; soll daher nicht blos die Charakteristik, sondern auch jedes hindurchgehende Integralconoid in Ruhe bleiben, so sind höchstens $2n-3+3=2n$ Bedingungen zu befriedigen. Nun erfüllen die ∞^1 Integralconoide, die durch eine Charakteristik von (59) gehen,

den ganzen R_n gerade einmal, das heisst durch jeden Punkt von allgemeiner Lage im R_n geht eines und nur eines dieser ∞^1 Integralconoide. Andrerseits ist klar, dass es keine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung giebt, der alle ∞^n Integralconoide von (59) genügten, denn jedes Element der nichtlinearen partiellen Differentialgleichung (59) gehört sogar ∞^1 verschiedenen der ∞^n Integralconoide an. Halten wir demnach n verschiedene Charakteristiken von allgemeiner gegenseitiger Lage fest und ausserdem bei jeder dieser Charakteristiken alle ∞^1 hindurchgehenden Integralconoide, so gehen durch jeden Punkt von allgemeiner Lage n feste Integralconoide, die sich nur in diesem Punkte schneiden, es bleibt also jeder Punkt von allgemeiner Lage und demnach überhaupt jeder Punkt des Raumes in Ruhe. Da nun das Festhalten der n Charakteristiken und der hindurchgehenden Integralconoide höchstens $2nn$ Bedingungen repräsentirt, so leuchtet ein, dass G sicher nicht mehr als $2nn$ Parameter enthalten kann, dass es also endlich ist.

Damit ist unsre Aufgabe erledigt und wir haben das

Theorem 25. *Ist die Gleichung:*

$$F(x_1 \ldots x_n,\ dx_1 \ldots dx_n) = 0$$

in den dx homogen und als Gleichung in $dx_1 \ldots dx_n$ betrachtet irreducibel und ordnet sie überdies jedem Punkte $x_1 \ldots x_n$ von allgemeiner Lage einen solchen Kegel von ∞^{n-2} Linienelementen: $dx_1 \ldots dx_n$ zu, der ∞^{n-2} verschiedene durch den Punkt $x_1 \ldots x_n$ gehende $(n-1)$-fach ausgedehnte Tangentialebenen besitzt, so ist die grösste continuirliche Gruppe von Punkttransformationen des R_n, bei der die Gleichung: $F = 0$ invariant bleibt, nothwendig endlich und enthält sicher nicht mehr als $2nn$ Parameter.

Offenbar kann dieses Theorem auch so gefasst werden:

Theorem 26. *Ist die partielle Differentialgleichung erster Ordnung:*

$$\Omega(x_1 \ldots x_n,\ p_1 \ldots p_{n-1}) = 0 \quad \left(p_\nu = \frac{\partial x_n}{\partial x_\nu}\right)$$

so beschaffen, dass die ∞^{n-2} $(n-1)$-fach ausgedehnten Ebenen:

$$\mathfrak{x}_n - x_n = p_1(\mathfrak{x}_1 - x_1) + \cdots + p_{n-1}(\mathfrak{x}_{n-1} - x_{n-1}),$$

die sie jedem Punkte $x_1 \ldots x_n$ von allgemeiner Lage zuordnet, einen durch den Punkt $x_1 \ldots x_n$ gehenden Kegel von n Dimensionen umhüllen, so ist die grösste continuirliche Gruppe von Punkttransformationen des R_n, bei der die Gleichung: $\Omega = 0$

invariant bleibt, endlich und enthält sicher nicht mehr als $2nn$ Parameter.

Die Methoden, deren wir uns im Vorstehenden bedient haben, führen unter Umständen auch dann noch zum Ziele, wenn ein System von $m < n - 1$ in Bezug auf die dx von einander unabhängigen Gleichungen:

$$(64) \qquad F_\mu\left(x_1 \ldots x_n,\ \frac{dx_1}{dx_n} \cdots \frac{dx_{n-1}}{dx_n}\right) = 0 \quad (\mu = 1 \ldots m)$$

vorgelegt ist. Ohne uns auf die Ausführung der hierzu erforderlichen Betrachtungen einzulassen, wollen wir nur mittheilen, dass die grösste continuirliche Gruppe von Punkttransformationen, bei der das System (64) invariant bleibt, jedenfalls dann endlich ist, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind: erstens muss das System von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, das mit dem System (64) invariant verknüpft ist, aus gerade m Gleichungen:

$$(65) \qquad \Omega_\mu(x_1 \ldots x_n,\ p_1 \ldots p_{n-1}) = 0 \quad (\mu = 1 \ldots m)$$

bestehen, die in Bezug auf $p_1 \ldots p_{n-1}$ von einander unabhängig und nicht linear sind und zweitens muss das System (65) unbeschränkt-integrabel sein, das heisst, es müssen die Ausdrücke:

$$[\Omega_\mu \Omega_\nu] = \sum_1^{n-1\tau} \left\{ \frac{\partial \Omega_\mu}{\partial p_\tau}\left(\frac{\partial \Omega_\nu}{\partial x_\tau} + p_\tau \frac{\partial \Omega_\nu}{\partial x_n}\right) - \frac{\partial \Omega_\nu}{\partial p_\tau}\left(\frac{\partial \Omega_\mu}{\partial x_\tau} + p_\tau \frac{\partial \Omega_\mu}{\partial x_n}\right) \right\}$$

sämmtlich vermöge (65) verschwinden.

Kapitel 18.

Einige Eigenschaften der im vorigen Kapitel gefundenen Gruppen.

Was die Gruppen (I), (II) und (III) auf S. 334 bedeuten, haben wir schon gesehen: (I) ist die Gruppe aller Euklidischen Bewegungen des R_n, (III) ist die Gruppe der Euklidischen Bewegungen und der Aehnlichkeitstransformationen, (II) endlich ist die projective Gruppe einer nicht ausgearteten, $(n - 1)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit zweiten Grades und kann daher auch kurz als eine Gruppe von nicht-euklidischen Bewegungen des R_n bezeichnet werden.

Demnach bleibt nur noch die Bedeutung der Gruppe (IV) festzustellen, was im nächsten Paragraphen geschehen soll. Hieran schliesst sich ein Paragraph über gewisse charakteristische Eigenschaften, die den Gruppen (I) und (II) gemeinsam sind, ferner ein Paragraph über

die Zusammensetzung der Gruppen (I) . . . (IV). In einem vierten Paragraphen werden dann noch zwei wichtige Sätze über die Gruppe (II) bewiesen.

§ 78.

Unter den infinitesimalen Transformationen der Gruppe:

$$\text{(IV)} \qquad \begin{cases} p_\mu, \quad x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \quad \sum_1^n x_\tau p_\tau \\ 2x_\mu \sum_1^n x_\tau p_\tau - p_\mu \sum_1^n x_\tau^2 \end{cases} \qquad (\mu, \nu = 1 \ldots n)$$

sind die in der ersten Reihe stehenden Euklidische Bewegungen und Aehnlichkeitstransformationen des R_n, alle diese lassen daher die Gleichung:

$$\text{(1)} \qquad dx_1^2 + \cdots + dx_n^2 = 0$$

invariant. Man überzeugt sich ferner durch eine einfache Rechnung, die hier auszuführen wohl nicht nöthig ist, dass auch die infinitesimalen Transformationen in der zweiten Reihe von (IV) die Gleichung (1) invariant lassen. Hieraus folgt, dass die ganze Gruppe (IV) die Gleichung (1) invariant lässt.

Wir behaupten, dass für $n > 2$ die Gruppe (IV) überhaupt die grösste continuirliche Gruppe von Punkttransformationen des R_n ist, bei der die Gleichung (1) invariant bleibt.

In der That, es sei G die betreffende grösste continuirliche Gruppe, dann muss G jedenfalls die Gruppe (IV) als Untergruppe enthalten. Andrerseits aber müssen bei G die ∞^{n-1} Richtungen: $dx_1 : \cdots : dx_n$ durch jeden festgehaltenen Punkt von allgemeiner Lage derart transformirt werden, dass die Gleichung (1) invariant bleibt, demnach müssen diese Richtungen in möglichst allgemeiner Weise transformirt werden, soweit es die Invarianz der Gleichung (1) erlaubt. Nehmen wir daher noch unser Theorem 24 auf S. 334 zu Hülfe, so erkennen wir, dass G nicht mehr Parameter enthalten kann als die Gruppe (IV), das heisst, dass G mit der Gruppe (IV) zusammenfällt.

Nun ist es üblich, jede Punkttransformation des R_n, bei der die Gleichung (1) invariant bleibt, als eine *conforme* Transformation dieses Raumes zu bezeichnen. Demnach können wir auch sagen: *In jedem Raume von $n > 2$ Dimensionen ist die Gruppe* (IV) *die grösste continuirliche Gruppe von conformen Transformationen.*

Man kann dieses Ergebniss benutzen, um für $n > 2$ überhaupt alle conformen Transformationen des R_n zu bestimmen.

Bei jeder conformen Transformation des R_n muss offenbar die Gruppe (IV) als die grösste continuirliche Gruppe von conformen Transformationen dieses Raumes invariant bleiben. Umgekehrt ist jede Transformation des R_n, bei der die Gruppe (IV) invariant bleibt, nothwendig eine conforme Transformation, denn die Gruppe (IV) lässt ausser der Gleichung (1) keine andre Gleichung von dieser Form invariant. Wollen wir daher die allgemeinste conforme Transformation des R_n bestimmen, so haben wir nur die allgemeinste Punkttransformation des R_n aufzusuchen, bei der die Gruppe (IV) in sich übergeht. Das soll jetzt geschehen*).

Jede Transformation, bei der die Gruppe (IV) in sich übergeht, hat die Form:

$$x_\nu' = x_\nu'^0 + \sum_1^n{}_\mu \alpha_{\nu\mu}(x_\mu - x_\mu^0) + \cdots \quad (\nu = 1 \ldots n),$$

wo x_μ^0 und $x_\nu'^0$ zwei Punkte von allgemeiner Lage sind, wo ferner die weggelassenen Glieder auf der rechten Seite von der zweiten und von höherer Ordnung in den $x_\mu - x_\mu^0$ sind und wo endlich die Determinante der $\alpha_{\nu\mu}$ nicht verschwindet. Da aber die Gruppe (IV) alle n Translationen $p_1 \ldots p_n$ enthält, so können wir hier $x_\mu - x_\mu^0$ als neues x_μ und $x_\nu' - x_\nu'^0$ als neues x_ν' einführen und können uns darauf beschränken, alle Transformationen von der Form:

$$x_\nu' = \sum_1^n{}_\mu \alpha_{\nu\mu} x_\mu + \cdots \quad (\nu = 1 \ldots n) \tag{2}$$

aufzusuchen, bei denen die Gruppe (IV) in sich übergeht.

Jede Transformation (2) von der verlangten Beschaffenheit lässt die Gleichung (1) invariant, demnach muss auch die verkürzte Transformation:

$$x_\nu' = \sum_1^n{}_\mu \alpha_{\nu\mu} x_\mu'' \quad (\nu = 1 \ldots n) \tag{3}$$

diese Gleichung invariant lassen und also auch die Gruppe (IV) in sich überführen. Folglich können wir die Transformation (2) dadurch erhalten, dass wir zuerst eine Transformation von der Form:

$$x_\mu'' = x_\mu + \cdots \quad (\mu = 1 \ldots n) \tag{4}$$

ausführen, bei der die Gruppe (IV) in sich übergeht, und sodann die

*) In Abschn. I, S. 360 f. ist eine allgemeine Methode angegeben, die zur Lösung der hier gestellten Aufgabe benutzt werden kann; die hier auseinandergesetzte Methode ist im Grunde nur eine dem vorliegenden Falle angepasste Umgestaltung jener allgemeinen.

Transformation (3). Suchen wir daher zunächst alle Transformationen von der Form (4), bei denen die Gruppe (IV) in sich übergeht.

Unter den gemachten Voraussetzungen bestehen vermöge der Transformation (4) Relationen von der Form:

$$(5)\quad \begin{cases} U = U'' + \sum_1^n{}_k \gamma_k V_k'', \quad V_\mu = V_\mu'' \\ x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu = x_\mu'' p_\nu'' - x_\nu'' p_\mu'' + \sum_1^n{}_k \beta_{\mu\nu k} V_k'' \\ p_\mu = p_\mu'' + \sum_{ik}^{1\ldots n} \alpha_{\mu ik}(x_i'' p_k'' - x_k'' p_i'') + \sum_k^{1\ldots n} \beta_{\mu k} V_k'', \end{cases}$$

wo wir von den Abkürzungen:

$$\sum_1^n{}_\tau x_\tau p_\tau = U$$

$$2x_\mu \sum_1^n{}_\tau x_\tau p_\tau - p_\mu \sum_1^n{}_\tau x_\tau^2 = V_\mu$$

Gebrauch gemacht haben. Um diese Relationen zu vereinfachen, gehen wir davon aus, dass U'' und die V_μ'' in den Beziehungen:

$$(U'' V_\mu'') = V_\mu'', \quad (V_\mu'' V_\nu'') = 0$$

stehen, dass also bei den endlichen Transformationen der eingliedrigen Gruppe:

$$\sum_1^n{}_\mu \lambda_\mu V_\mu'' = W'' f$$

erstens die ganze Schaar der ∞^n infinitesimalen Transformationen: $e_0 U'' + e_1 V_1'' + \cdots + e_n V_n''$ und ausserdem jede einzelne der infinitesimalen Transformationen V_ν'' invariant bleibt (s. Abschn. I, S. 252, Theor. 43 und S. 258 f.); wir versuchen daher die γ_k durch eine Transformation einer derartigen eingliedrigen Gruppe wegzuschaffen.

Bei der endlichen Transformation:

$$x_\nu''' = x_\nu'' + \frac{t}{1} W'' x_\nu'' + \frac{t^2}{1 \cdot 2} W'' W'' x_\nu'' + \cdots$$
$$(\nu = 1 \ldots n)$$

der eingliedrigen Gruppe $W'' f$ ergiebt sich:

$$V_\nu'' = V_\nu''' \quad (\nu = 1 \ldots n)$$

und ausserdem:

$$U'' = \varrho U''' + \sum_1^n{}_k \varrho_k V_k''',$$

wo ϱ und die ϱ_k gewisse Functionen von t sind, die sich aus den Differentialgleichungen:

$$\frac{d\varrho}{dt} = 0, \quad \frac{d\varrho_k}{dt} = \lambda_k$$

und den Anfangsbedingungen: $[\varrho]_{t=0} = 1$, $[\varrho_k]_{t=0} = 0$ bestimmen (a. a. O. Theor. 43), es wird also:

$$U'' = U''' + \sum_1^n{}^k \lambda_k t\, V_k''',$$

das heisst: wenn wir $\lambda_k t = -\gamma_k$ wählen, so erhalten die Gleichungen (5) bei Einführung der x_ν''' die einfache Form:

$$(5') \quad \begin{cases} U = U''', \quad V_\nu = V_\nu''' \quad (\nu = 1 \ldots r) \\ x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu = x_\mu''' p_\nu''' - x_\nu''' p_\mu''' + \sum_1^n{}^k \beta'_{\mu\nu k} V_k''' \\ p_\mu = p_\mu''' + \sum_{ik}^{1\ldots n} \alpha'_{\mu ik} (x_i''' p_k''' - x_k''' p_i''') + \sum_k^{1\ldots n} \beta'_{\mu k} V_k'''. \end{cases}$$

Durch Combination mit der Gleichung: $U = U'''$ ergiebt sich hier noch, dass die $\beta'_{\mu\nu k}$, $\alpha'_{\mu i\nu}$, $\beta'_{\mu k}$ alle verschwinden und aus den Relationen: $U = U'''$, $p_\mu = p_\mu'''$ folgt dann schliesslich: $x_\mu = x_\mu'''$.

Hiermit ist bewiesen, dass die endlichen Transformationen der eingliedrigen Gruppe:

$$\sum_1^n{}^k \gamma_k V_k$$

die allgemeinsten Transformationen von der Form (4) sind, bei denen die Gruppe (IV) in sich übergeht. Wir erwähnen noch, dass diese endlichen Transformationen die Form:

$$(6) \quad \left\{ x_\mu'' = \frac{x_\mu - \gamma_\mu t \sum_1^n{}^\tau x_\tau^2}{1 - 2t \sum_\nu^{1\ldots n} \gamma_\nu x_\nu + t^2 \sum_{\nu\tau}^{1\ldots n} \gamma_\nu{}^2 x_\tau{}^2} \right. \quad (\mu = 1 \ldots n)$$

besitzen, wie man sich durch Integration leicht überzeugt.

Fassen wir das Gesagte zusammen, so erkennen wir, dass jede Transformation, bei der die Gruppe (IV) invariant bleibt, in der Form darstellbar ist: STS_1, wo S und S_1 Transformationen der Gruppe (IV) selbst sind, während T eine Transformation von der Form (3) bezeichnet, bei der die Gleichung (1) invariant bleibt.

Nun ist aus der Theorie der quadratischen Formen bekannt, dass im Falle eines ungeraden n die Transformationen (3), bei denen die Gleichung (1) invariant bleibt, stets eine continuirliche Gruppe bilden; diese Gruppe fällt offenbar mit der zusammen, die von den infinitesimalen Transformationen:

$$(7) \qquad p_\mu,\ x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu,\ \sum_1^n{}_\tau\, x_\tau p_\tau \qquad (\mu, \nu = 1 \ldots n)$$

erzeugt wird, sie ist also in der Gruppe (IV) enthalten. Demnach ist die Gruppe (IV) bei ungeradem n überhaupt die grösste Gruppe von conformen Transformationen des R_n.

Ist andrerseits n gerade, so zerfällt der Inbegriff aller Transformationen (3), bei denen (1) invariant bleibt, in zwei getrennte Schaaren, von denen die eine eine continuirliche, von den infinitesimalen Transformationen (7) erzeugte Gruppe bildet, während die andre dadurch erhalten wird, dass man zuerst die allgemeinste Transformation der Gruppe (7) ausführt und sodann eine geeignete Umlegung des R_n, etwa diese:

$$(8) \qquad x_1' = x_1, \ldots, x_{n-1}' = x_{n-1}, \ x_n' = -x_n,$$

bei der jede Punktfigur in eine zu ihr symmetrische übergeht. Da nun die Transformation (8) ihrerseits die Gruppe (IV) invariant lässt, so ergiebt sich, dass bei geradem n die allgemeinste conforme Transformation des R_n in zwei Schaaren zerfällt, deren eine die Gruppe (IV) ist, während die andre durch Verbindung der Gruppe (IV) mit der Transformation (8) erhalten wird.

Die vorstehenden Betrachtungen liefern uns noch ein andres beachtenswerthes Ergebniss.

Es ist nämlich bekannt, dass die Euklidischen Bewegungen, die Umlegungen, die Aehnlichkeitstransformationen und die Transformationen durch reciproke Radien im R_n lauter conforme Transformationen sind und es ist ferner bekannt, dass diese Transformationen zusammen eine Gruppe bestimmen — die sogenannte „Gruppe der reciproken Radien“ — die gerade $\frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2}$ Parameter enthält, also genau so viele wie die Gruppe (IV). Hieraus können wir schliessen, *dass in jedem Raume von mehr als zwei Dimensionen die Gruppe aller conformen Transformationen mit der Gruppe der reciproken Radien zusammenfällt* *).

*) Dieser Satz ist für $n = 3$ zuerst von Liouville aufgestellt und bewiesen worden; für $n > 3$ hat ihn zuerst Lie aufgestellt (1871, s. Math. Ann. Bd. 5, S. 186 Anm.); einen Beweis für beliebiges $n > 2$ hat zuerst Darboux veröffentlicht.

Schliesslich wollen wir noch das folgende Theorem beweisen:

Theorem 27*). *Ist $n > 1$, so kann die Gruppe:*

$$\text{(IV)} \qquad \begin{cases} p_\mu, \; x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \; \sum_1^n{}_\tau \, x_\tau p_\tau \\ x_\mu \sum_1^n{}_\tau \, x_\tau p_\tau - p_\mu \sum_1^n{}_\tau \, x_\tau^2 \\ (\mu, \nu = 1 \ldots n) \end{cases}$$

niemals durch eine Punkttransformation in eine projective Gruppe übergeführt werden.

Für $n > 1$ ist die Gruppe (IV) offenbar nicht projectiv, da sie n nicht projective infinitesimale Transformationen von zweiter Ordnung in $x_1 \ldots x_n$ enthält. Könnte nun die Gruppe (IV) durch eine Punkttransformation:

$$\text{(9)} \qquad y_\nu = y_\nu^0 + \sum_1^n{}_k \, \alpha_{\nu k} (x_k - x_k^0) + \cdots \qquad (\nu = 1 \ldots n)$$

in eine projective Gruppe G übergeführt werden, so müsste G n infinitesimale Transformationen von zweiter Ordnung in den $y_\nu - y_\nu^0$ enthalten, die, weil G projectiv wäre, die Form hätten:

$$(y_\nu - y_\nu^0) \sum_1^n{}_\tau \, (y_\tau - y_\tau^0) \, q_\tau \qquad (\nu = 1 \ldots n).$$

Nun aber erhalten diese infinitesimalen Transformationen, wenn die Transformation (9) rückwärts ausgeführt wird, die Form:

$$\sum_1^n{}_k \, \alpha_{\nu k} (x_k - x_k^0) \sum_1^n{}_\tau \, (x_\tau - x_\tau^0) \, p_\tau + \cdots \qquad (\nu = 1 \ldots n),$$

wo die weggelassenen Glieder von der dritten und von höherer Ordnung in den $x_k - x_k^0$ sind, infinitesimale Transformationen von dieser Form sind jedoch augenscheinlich in der Gruppe (IV) nicht enthalten, also kommen wir auf einen Widerspruch und somit ist unser Theorem bewiesen.

§ 79.

Im vorigen Kapitel haben wir Gruppen betrachtet, bei denen eine Gleichung:

$$\sum_{k\nu}^{1 \ldots n} f_{k\nu}(x_1 \ldots x_n) \, dx_k \, dx_\nu = 0$$

*) s. Lie, Leipz. Ber. 1890, S. 312.

mit nicht verschwindender Determinante invariant bleibt. Man kann aber auch verlangen, dass nicht blos eine solche Gleichung, sondern sogar ein Ausdruck von der Form:

$$\sum_{k\,v}^{1\ldots n} f_{kv}(x_1 \ldots x_n)\, dx_k\, dx_v \tag{10}$$

mit nicht verschwindender Determinante invariant bleibe.

Soll eine continuirliche Gruppe einen Ausdruck von der Form (10) invariant lassen und soll sie ausserdem die ∞^{n-1} Linienelemente durch jeden Punkt von allgemeiner Lage in möglichst allgemeiner Weise transformiren, so kann man stets (vgl. S. 315) erreichen, dass sie in der Umgebung eines Punktes $x_1^0 \ldots x_n^0$ von allgemeiner Lage n infinitesimale Transformationen:

$$p_1 + \cdots, \quad \cdots, \quad p_n + \cdots$$

von nullter Ordnung und $\frac{1}{2}n(n-1)$ Transformationen:

$$(x_v - x_v^0)p_k - (x_k - x_k^0)p_v + \cdots \quad (k, v = 1 \ldots n)$$

von erster Ordnung enthält, während sie dagegen keine Transformation erster Ordnung von der Form:

$$\sum_{1}^{n} (x_\tau - x_\tau^0)p_\tau + \cdots$$

und also nach S. 320 f. auch keine Transformation von zweiter oder höherer Ordnung enthalten kann. Die Entwicklungen des vorigen Kapitels zeigen daher unmittelbar, dass das Theorem gilt:

Theorem 28. *Lässt eine continuirliche Gruppe von Punkttransformationen des R_n einen Differentialausdruck zweiten Grades:*

$$\sum_{k,\,v}^{1\ldots n} f_{kv}(x_1 \ldots x_n)\, dx_k\, dx_v \tag{10}$$

mit nicht verschwindender Determinante invariant und transformirt sie ausserdem die ∞^{n-1} Linienelemente durch jeden festgehaltenen Punkt von allgemeiner Lage in möglichst allgemeiner Weise, so enthält sie gerade $\frac{1}{2}n(n+1)$ Parameter und ist durch eine Punkttransformation des R_n entweder mit der Gruppe:

$$p_v, \quad x_k p_v - x_v p_k \quad (v, k = 1 \ldots n) \tag{I}$$

der Euklidischen Bewegungen oder mit der projectiven Gruppe:

$$(\text{II}) \qquad p_\nu - x_\nu \sum_1^n{}^\tau x_\tau p_\tau, \quad x_k p_\nu - x_\nu p_k \qquad (k, \nu = 1 \ldots n)$$

der Mannigfaltigkeit zweiten Grades:

$$\sum_1^n{}^\tau x_\tau^2 - 1 = 0$$

ähnlich.

In der That lässt auch die Gruppe (I) den Differentialausdruck:

$$(11) \qquad dx_1^2 + \cdots + dx_n^2$$

invariant und die Gruppe (II) den Differentialausdruck:

$$(12) \qquad \frac{\sum_1^n{}^\tau dx_\tau^2 \left\{1 - \sum_1^n{}^\varrho x_\varrho^2\right\} + \left\{\sum_1^n{}^\tau x_\tau dx_\tau\right\}^2}{\left\{1 - \sum_1^n{}^\tau x_\tau^2\right\}^2}.$$

Zugleich ist offenbar jede dieser beiden Gruppen die grösste continuirliche Gruppe von Punkttransformationen, bei der der betreffende Differentialausdruck invariant bleibt.

Bemerkenswerth ist, dass man die Gruppe (II) auf eine andre Form bringen kann, bei der der zugehörige invariante Differentialausdruck wesentlich einfacher ist. Zu dieser neuen Form der Gruppe (II) gelangt man folgendermassen:

Die conforme Gruppe (IV), S. 334 lässt die Gleichung: $\Sigma dx_r^2 = 0$ invariant und enthält die Gruppe (I) als Untergruppe. Es liegt daher nahe, zu vermuthen, dass die Gruppe (IV) auch eine Untergruppe enthält, die mit der Gruppe (II) ähnlich ist; die wird dann einen Differentialausdruck von der Form:

$$\varrho(x_1 \cdots x_n)(dx_1^2 + \cdots + dx_n^2)$$

invariant lassen. Wirklich findet man leicht, dass die Gruppe:

$$(\text{II}') \qquad p_\mu - \tfrac{1}{4}\left\{2x_\mu \sum_1^n{}^\tau x_\tau p_\tau - p_\mu \sum_1^n{}^\tau x_\tau^2\right\}, \; x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu \qquad (\mu, \nu = 1 \ldots n),$$

die ja eine Untergruppe von (IV) ist, dieselbe Zusammensetzung hat wie die Gruppe (II), und daraus kann man nach Abschn. I, Theor. 110, S. 614 schliessen, dass beide Gruppen durch eine Punkttransformation des R_n ähnlich sind. Der invariante Differentialausdruck, der zu der Gruppe (II′) gehört, lautet:

$$(13) \qquad \left\{ \frac{\sum_1^n {}_\tau \, dx_\tau^2}{\left(1 - \frac{1}{4}\sum_1^n {}_\tau \, x_\tau^2\right)^2}, \right.$$

er hat also in der That die vermuthete Form.

Die Form (13) ist deshalb von besonderem Interesse, weil sie mit der übereinstimmt, die Riemann in seiner Habilitationsrede*) angegeben hat. Man sieht hieraus, dass der Inhalt des Theorems 28 mit dem von Riemann aufgestellten Satze über Differentialausdrücke zweiten Grades in einem gewissen Zusammenhange steht**). Freilich ist Riemanns Ausgangspunkt von dem unsrigen verschieden, selbst wenn man davon absieht, dass Riemann nur reelle Werthe der Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$ berücksichtigt. Riemann denkt sich nämlich das Linienelement des R_n durch einen Ausdruck von der Form (10) bestimmt und verlangt, dass eine gewisse Covariante des Ausdrucks (10), die er als das Krümmungsmass des R_n bezeichnet, für alle Punkte des Raumes denselben Werth habe. Unter dieser Voraussetzung zeigt er, dass der Ausdruck (10) durch eine Punkttransformation des R_n auf die Form:

$$\frac{\sum_1^n {}_\tau \, dx_\tau^2}{\left(1 + \frac{\alpha}{4}\sum_1^n {}_\tau \, x_\tau^2\right)^2}$$

gebracht werden kann. Trotzdem kann man sagen, dass unser Theorem 28 in gewissem Sinne mit dem Riemannschen Satze übereinstimmt, Riemann sagt nämlich auf S. 264 seiner Abhandlung: „Der gemeinsame Charakter dieser Mannigfaltigkeiten, deren Krümmungsmass constant ist, kann auch so ausgedrückt werden, dass sich die Figuren in ihnen ohne Dehnung bewegen können. Denn offenbar würden die Figuren in ihnen nicht beliebig verschiebbar und drehbar sein, wenn nicht in jedem Punkte in allen Richtungen das Krümmungsmass dasselbe wäre.“ Hierin liegt, dass Riemanns Forderung, das Krüm-

*) Riemanns gesammelte Werke S. 254—269; der betreffende Differentialausdruck findet sich auf S. 264. Uebrigens theilt Riemann seinen Satz mit, ohne den Beweis auszuführen; den vollständigen Beweis haben erst später Lipschitz und Christoffel geliefert.

**) Auf diesen Zusammenhang hat Lie bereits in Bd. X seines Archivs auf S. 411 hingewiesen (Kristiania 1885).

mungsmass solle constant sein, mit der Forderung, dass sich alle Figuren ohne Dehnung bewegen können, äquivalent ist. Die letztere Forderung aber kommt, wie hier nicht näher ausgeführt werden soll, auf die Voraussetzung unsers Theorems 28 hinaus, dass bei der gesuchten Gruppe von Transformationen die Linienelemente durch jeden festgehaltenen Punkt von allgemeiner Lage in möglichst allgemeiner Weise transformirt werden.

§ 80.

Wir wenden uns jetzt zur Untersuchung der Zusammensetzung der Gruppen (I) . . . (IV).

Die Gruppe (IV) ist einfach, sobald $n > 2$ ist. Wäre nämlich Γ eine invariante Untergruppe von (IV) und

$$W = \sum_{v}^{1 \ldots n} \alpha_v p_v + \sum_{kv}^{1 \ldots n} \beta_{kv} (x_k p_v - x_v p_k) + \beta \sum_{v}^{1 \ldots n} x_v p_v + \\ + \sum_{v}^{1 \ldots n} \gamma_v \left\{ 2 x_v \sum_{k}^{1 \ldots n} x_k p_k - p_v \sum_{k}^{1 \ldots n} x_k^2 \right\}$$

eine infinitesimale Transformation von Γ, so müsste Γ auch die infinitesimalen Transformationen:

$$(p_k W) \quad (p_j (p_k W))$$

enthalten, es gäbe daher in Γ sicher eine infinitesimale Transformation von der Form:

$$\lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_n p_n,$$

in der $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ nicht sämmtlich verschwänden; durch Combination dieser Transformation mit den $x_k p_v - x_v p_k$ würde sich, da $n > 2$ ist, ergeben, dass Γ alle p_k enthielte, ferner durch Combination der p_k mit den Transformationen:

$$2 x_v \sum_{\tau}^{1 \ldots n} x_\tau p_\tau - p_v \sum_{\tau}^{1 \ldots n} x_\tau^2 \qquad (v = 1 \ldots n), \tag{14}$$

dass in Γ auch $x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n$, sowie alle $x_k p_v - x_v p_k$ vorkämen, endlich würde man durch Combination von: $x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n$ mit den Transformationen (14) erkennen, dass Γ auch alle n Transformationen (14) enthielte: Γ wäre also mit der Gruppe (IV) identisch. Demnach ist die Gruppe (IV) wirklich einfach.

Was die Gruppe (II), S. 334 anbelangt, so ist klar, dass sie im Falle $n = 3$ nicht einfach ist, denn die sechsgliedrige projective Gruppe

einer nicht ausgearteten Fläche zweiten Grades im dreifach ausgedehnten Raume enthält zwei dreigliedrige invariante Untergruppen (s. S. 199 f.). Der Fall $n > 3$ erledigt sich durch den Umstand, dass die projective Gruppe (II) einer nicht ausgearteten Fläche zweiten Grades im R_n mit der Gruppe der reciproken Radien im R_{n-1} gleichzusammengesetzt ist, die zuletzt genannte Gruppe kann ja nach einer Bemerkung von F. Klein*) aus der zuerst genannten durch stereographische Projection erhalten werden; da nun die Gruppe der reciproken Radien des R_{n-1} für $n - 1 > 2$ stets einfach ist, wie wir oben gezeigt haben, ist auch die Gruppe (II) für $n > 3$ stets einfach.

Wir haben demnach das

Theorem 29**). *Die continuirliche Gruppe der reciproken Radien im n-fach ausgedehnten Raume ist für $n > 2$ stets einfach; die continuirliche projective Gruppe einer nicht ausgearteten $(n-1)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit zweiten Grades im Raume von n Dimensionen ist für $n > 3$ stets einfach.*

Es blieben jetzt noch die Gruppen (I) und (III), S. 334 zu untersuchen, die offenbar nicht einfach sind, da sie beide die Gruppe aller Translationen als invariante Untergruppe enthalten. Wir begnügen uns aber mit den folgenden Bemerkungen:

Ist $n = 3$ oder > 4, so enthält die Gruppe (I) keine andre invariante Untergruppe als die schon genannte: $p_1 \dots p_n$ und die Gruppe (III) enthält ausser $p_1 \dots p_n$ nur noch die Gruppe: $p_1, \dots p_n, x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n$ und die Gruppe (I) als invariante Untergruppen; ist dagegen $n = 4$, so treten in der Gruppe (I) noch zwei und in der Gruppe (III) noch vier andre invariante Untergruppen auf. Es rührt das daher, dass die Gruppe:

$$(15) \qquad x_k p_v - x_v p_k \qquad (k, v = 1 \dots n)$$

für $n = 3$ und $n > 4$ einfach ist, für $n = 4$ aber zwei dreigliedrige invariante Untergruppen enthält.

§ 81.

Wir beweisen jetzt noch die beiden in der Einleitung des Kapitels angekündigten Sätze über die projective Gruppe einer Mannigfaltigkeit zweiten Grades im R_n; der erste von ihnen lautet folgendermassen:

Theorem 30***). *Die grösste continuirliche projective Gruppe*

---

*) Math. Ann. Bd. 5, S. 267 (1871).

**) Dieses Theorem hat Lie zuerst aufgestellt und bewiesen (s. Archiv for Math. Bd. X, S. 413, Kristiania 1885).

***) Zuerst aufgestellt und bewiesen von Lie, Leipz. Ber. 1890, S. 319 f.

einer nicht ausgearteten Mannigfaltigkeit zweiten Grades des R_n steckt, wenn $n > 1$ ist, in keiner grössern continuirlichen Untergruppe der allgemeinen projectiven Gruppe dieses Raumes.

Für $n = 2$ ist dieses Theorem richtig, denn nach S. 94, Theor. 7 lässt jede continuirliche Untergruppe der allgemeinen projectiven Gruppe der Ebene entweder eine Gerade oder einen Punkt oder einen Kegelschnitt invariant; da nun die dreigliedrige projective Gruppe eines nichtausgearteten Kegelschnitts weder eine Gerade, noch einen Punkt invariant lässt, so steckt sie in keiner grössern continuirlichen Untergruppe der allgemeinen projectiven Gruppe der Ebene. Hieraus folgt, dass wir, um unser Theorem zu beweisen, nur zu zeigen brauchen: sobald es für den Raum von $n - 1 \geqq 2$ Dimensionen gilt, gilt es auch für den von n Dimensionen.

Wir nehmen also an, dass unser Theorem für den Raum von $n - 1$ Dimensionen richtig ist, und betrachten nun im R_n die grösste continuirliche projective Gruppe G einer nicht ausgearteten Mannigfaltigkeit zweiten Grades. Wir werden zeigen, dass jede grössere continuirliche projective Gruppe $\mathfrak{G}$ des R_n, in der G enthalten ist, mit der allgemeinen projectiven Gruppe dieses Raumes zusammenfällt.

Ist P ein Punkt von allgemeiner Lage in dem R_n, so erzeugen alle infinitesimalen Transformationen von G, die P invariant lassen, eine continuirliche Gruppe, bei der die ∞^{n-1} Richtungen: $dx_1 : \cdots : dx_n$ durch den Punkt P durch eine continuirliche projective Gruppe g transformirt werden und zwar ist g offenbar die grösste continuirliche projective Gruppe einer gewissen nichtausgearteten Mannigfaltigkeit zweiten Grades in dem R_{n-1} jener ∞^{n-1} Richtungen. Andrerseits erzeugen alle infinitesimalen Transformationen von $\mathfrak{G}$, die P invariant lassen, eine continuirliche Untergruppe von $\mathfrak{G}$, bei der die ∞^{n-1} besprochenen Richtungen durch eine gewisse projective Gruppe $\mathfrak{g}$ transformirt werden.

Es ist klar, dass g in $\mathfrak{g}$ enthalten ist; nun aber steckt g unter den gemachten Voraussetzungen in keiner grössern continuirlichen Untergruppe der allgemeinen projectiven Gruppe des R_{n-1}, also ergiebt sich, dass $\mathfrak{g}$ entweder mit g oder mit der allgemeinen projectiven Gruppe des Raumes jener ∞^{n-1} Richtungen zusammenfällt.

Wäre $\mathfrak{g}$ mit g identisch, so wäre $\mathfrak{G}$ nach dem Theor. 24, S. 334 durch eine Punkttransformation des R_n entweder mit der Gruppe der reciproken Radien des R_n ähnlich oder mit der Gruppe der Euklidischen Bewegungen und Aehnlichkeitstransformationen. Das erste ist ausgeschlossen, weil die Gruppe der reciproken Radien überhaupt nicht durch Punkttransformation in eine projective Gruppe übergeführt werden

kann (s. Theor. 27, S. 352). Aber auch der zweite Fall kann nicht eintreten, denn dann wäre $\mathfrak{G}$ nach Theor. 19, S. 292 mit der Gruppe der Aehnlichkeitstransformationen durch eine projective Transformation ähnlich und liesse in Folge dessen eine $(n-1)$-fach ausgedehnte ebene Mannigfaltigkeit invariant, während doch G keine solche ebene Mannigfaltigkeit in Ruhe lässt und demnach auch in keiner projectiven Gruppe, die das thut, enthalten sein kann.

Nunmehr bleibt blos die Annahme übrig, dass $\mathfrak{g}$ mit der allgemeinen projectiven Gruppe des R_{n-1} zusammenfällt. Bei dieser Annahme ist $\mathfrak{G}$ nach Abschn. I, Theor. 112, S. 631 entweder mit der allgemeinen projectiven oder mit der allgemeinen linearen oder endlich mit der speciellen linearen Gruppe des R_n ähnlich und zwar durch eine projective Transformation dieses Raumes (s. Theor. 18, S. 288). Die zwei zuletzt genannten Gruppen kommen aber gar nicht in Frage, da sie beide je eine ebene $(n-1)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit invariant lassen, also ergiebt sich, dass unter den gemachten Voraussetzungen die allgemeine projective Gruppe des R_n die einzige grössere continuirliche projective Gruppe des R_n ist, in der G steckt.

Damit ist unser Theorem allgemein bewiesen. Man kann es übrigens auch noch verallgemeinern und den Satz aussprechen: *Die grösste projective Gruppe einer nicht ausgearteten Mannigfaltigkeit zweiten Grades des R_n ist in keiner grössern Untergruppe der allgemeinen projectiven Gruppe dieses Raumes enthalten.* Um diesen Satz zu beweisen, würde man sich auf das Kap. 18 des Abschnitts I zu stützen haben.

Der zweite der beiden in der Einleitung des Kapitels angekündigten Sätze lautet so:

Satz 1. *Ist $n>1$, so steckt die grösste continuirliche projective Gruppe einer nichtausgearteten Mannigfaltigkeit zweiten Grades des R_n ausser in der allgemeinen projectiven Gruppe sonst in keiner endlichen continuirlichen Gruppe des R_n, bei der die ∞^{n-1} Linienelemente durch jeden festgehaltenen Punkt von allgemeiner Lage in allgemeinster Weise, das heisst gerade (n^2-1)-gliedrig transformirt werden.*

Es sei h die grösste continuirliche projective Gruppe einer nicht ausgearteten Mannigfaltigkeit zweiten Grades im R_n und H sei eine endliche continuirliche Gruppe des R_n, in der h als Untergruppe enthalten ist und bei der die ∞^{n-1} Linienelemente durch jeden festgehaltenen Punkt von allgemeiner Lage in möglichst allgemeiner Weise transformirt werden. Dann behauptet unser Satz, dass H die allgemeine projective Gruppe des R_n ist.

In der That, nach Abschn. I, Theor. 112, S. 631 ist H durch eine

Punkttransformation des R_n entweder mit der allgemeinen projectiven oder mit der allgemeinen linearen oder mit der speciellen linearen Gruppe des R_n ähnlich. Bei dieser Punkttransformation verwandelt sich h offenbar wieder in eine projective Gruppe, nach Theorem 19, S. 292 ist daher die betreffende Punkttransformation nothwendig projectiv und H ist in Folge dessen selbst eine projective Gruppe. Das Theorem 30, S. 357 zeigt nunmehr, dass H mit der allgemeinen projectiven Gruppe des R_n zusammenfällt.

Kapitel 19.

Die reellen Gruppen.

Während wir bei allen bisherigen Untersuchungen die auftretenden Veränderlichen und Parameter als complexe Grössen betrachtet haben, wollen wir uns jetzt einmal sowohl die Veränderlichen als die Parameter auf reelle Werthe beschränkt denken und nur Gruppen mit reellen Transformationen betrachten. Wir entwickeln zunächst, allerdings nur sehr kurz*), die allgemeine Theorie der reellen Gruppen. Sodann vervollständigen wir die Untersuchungen der ersten Abtheilung soweit, dass wir auf der Geraden und der Ebene alle endlichen reellen Gruppen und alle reellen projectiven Gruppen angeben können. Schliesslich erledigen wir noch die in Kapitel 17 behandelte Aufgabe insbesondere für reelle Gruppen.

§ 82.

Es sei:

$$(1) \qquad x_\nu' = f_\nu(x_1 \ldots x_n;\ a_1 \ldots a_r) \quad (\nu = 1 \ldots n)$$

eine r-gliedrige Gruppe von reellen Transformationen. Die Transformationen der Gruppe seien paarweise zu einander invers; die Functionen $f_1 \ldots f_n$ seien zunächst analytische Functionen ihrer Argumente, im Weierstrassschen Sinne, wir denken sie uns demnach, indem wir unter $x_1^0 \ldots x_n^0$, $a_1^0 \ldots a_r^0$ ein reelles Werthsystem von allgemeiner Lage verstehen, als gewöhnliche, aber natürlich reelle Potenzreihen der $x_\nu - x_\nu^0$, $a_k - a_k^0$ gegeben.

---

*) Es ist nicht schwer, sich bei den einzelnen Theorien von Abschnitt I und II klar zu machen, wieweit sie sich ohne Aenderung auf reelle Gruppen übertragen lassen und wo sie umgestaltet werden müssen, um auf die reellen Gruppen anwendbar zu sein. Hier besprechen wir nur einige der wichtigsten Punkte (vgl. Abschn. I, S. 1).

Unter diesen Voraussetzungen zeigen die Entwicklungen der Kapitel 2, 4 und 9 des Abschnitts I unmittelbar, dass die Gruppe (1) r unabhängige infinitesimale Transformationen:

$$X_k f = \sum_1^n{}_v \xi_{kv}(x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_v} \qquad (k = 1 \dots r)$$

enthält, die paarweise in Beziehungen von der Form:

$$(X_k X_j) = \sum_1^r{}_s c_{kjs} X_s f \qquad (k, j = 1 \dots r) \tag{2}$$

stehen, und zwar sind hier die ξ_{kj} reelle gewöhnliche Potenzreihen von: $x_1 - x_1^0, \dots, x_n - x_n^0$ und die c_{kjs} sind reelle Constanten.

Ist nun andrerseits irgend eine infinitesimale Transformation:

$$Zf = \sum_1^n{}_v \xi_v(x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_v}$$

gegeben, in der die ξ reelle gewöhnliche Potenzreihen sind, so leuchtet ein, dass die Gleichungen:

$$x_v' = x_v + \frac{t}{1} Z x_v + \frac{t^2}{1 \cdot 2} Z Z x_v + \cdots \qquad (v = 1 \dots n)$$

mit dem reellen Parameter t eine eingliedrige Gruppe von reellen Transformationen darstellen, eine eingliedrige Gruppe, von der wir natürlich sagen, dass sie von der reellen infinitesimalen Transformation Zf erzeugt sei. Verstehen wir daher unter $e_1 \dots e_r$ willkürliche reelle Parameter, so stellt der Ausdruck:

$$e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f \tag{3}$$

∞^{r-1} verschiedene reelle infinitesimale Transformationen dar, die ebensoviele reelle eingliedrige Gruppen erzeugen, und es ist unter den oben gemachten Voraussetzungen klar, dass der Inbegriff dieser ∞^{r-1} eingliedrigen Gruppen eben die Gruppe (1) bildet. Demnach können wir sagen: *Jede r-gliedrige reelle Gruppe* (1) *mit paarweise inversen Transformationen ist von r unabhängigen reellen infinitesimalen Transformationen: $X_1 f \dots X_r f$ erzeugt, die paarweise in Beziehungen von der Form* (2) *stehen, unter den c_{kjs} reelle Zahlen verstanden.*

Aber aus den Entwicklungen des Kapitels 9 von Abschnitt I geht zugleich hervor, dass auch das Umgekehrte gilt: *Wenn die r unabhängigen reellen infinitesimalen Transformationen: $X_1 f \dots X_r f$ paarweise in Beziehungen von der Form* (2) *stehen, wo die c_{kjs} reelle Zahlen bedeuten, so erzeugen sie eine r-gliedrige reelle Gruppe mit paarweise inversen Transformationen.*

Da die Functionen in den Gleichungen (1) analytische Functionen ihrer Argumente sind, so behalten die Gleichungen (1) auch dann noch einen Sinn, wenn man $x_1 \ldots x_n$, $a_1 \ldots a_r$ als complexe Functionen ihrer Argumente auffasst. Andrerseits ist klar, dass die Bedingungen, aus deren Erfülltsein die Gruppeneigenschaft der Gleichungen (1) für reelle Werthe von $x_1 \ldots x_n$, $a_1 \ldots a_r$ folgt, von selbst zugleich für die complexen Werthe dieser Grössen erfüllt sind. Die Gleichungen (1) bestimmen demnach unter den gemachten Voraussetzungen auch dann noch eine r-gliedrige Gruppe, wenn man die x und a als complexe Grössen auffasst, natürlich eine Gruppe von complexen Transformationen. Der Ausdruck (3) stellt augenscheinlich die allgemeine infinitesimale Transformation dieser letzteren Gruppe dar, sobald man in ihm die x_v als complexe Veränderliche und die e_k als complexe Parameter betrachtet. Also:

Zu jeder r-gliedrigen reellen Gruppe g_r in n reellen Veränderlichen, die durch analytische Gleichungen dargestellt wird, gehört eine ganz bestimmte r-gliedrige Gruppe G_r von complexen Transformationen; diese Gruppe G_r wird erhalten, wenn man die Veränderlichen und die Parameter von g_r als complexe Grössen auffasst.

Die enge Beziehung, in der die Gruppe G_r zu g_r steht, legt es nahe, bei der Untersuchung von g_r stets auch G_r mit in Betracht zu ziehen; es ist daher wünschenswerth, sich allgemein darüber klar zu werden, welche Eigenschaften beiden Gruppen gemeinsam sind und worin sie sich unterscheiden können. Wir werden deshalb jetzt die im ersten Abschnitte eingeführten Begriffe: Transitivität, Intransitivität, Primitivität u. s. w. der Reihe nach durchgehen und prüfen, wie sich g_r und G_r diesen Begriffen gegenüber verhalten.

Wir nennen g_r natürlich *transitiv*, wenn jeder reelle Punkt $x_1 \ldots x_n$ von allgemeiner Lage bei g_r gerade ∞^n verschiedene reelle Lagen annimmt; im entgegengesetzten Falle nennen wir g_r *intransitiv*. Hieraus geht hervor, dass g_r transitiv oder intransitiv ist, jenachdem sich unter den r Gleichungen:

$$X_1 f = 0, \ldots, X_r f = 0 \tag{4}$$

gerade n oder weniger von einander unabhängige befinden, mit andern Worten: G_r und g_r sind stets zu gleicher Zeit transitiv, aber auch zu gleicher Zeit intransitiv. Ist insbesondere g_r intransitiv, so haben die Gleichungen (4) eine gewisse Anzahl etwa $m < n$ unabhängige Lösungen gemein, die offenbar stets als reelle Functionen von $x_1 \ldots x_n$ gewählt werden können; werden diese Lösungen gleich willkürlichen

reellen Constanten gesetzt, so erhält man eine Zerlegung des reellen Raumes $x_1 \ldots x_n$ in ∞^m $(n - m)$-fach ausgedehnte reelle Mannigfaltigkeiten, die sämmtlich bei g_r invariant bleiben.

Imprimitiv nennen wir g_r, wenn es eine bei g_r invariante Zerlegung des reellen Raumes $x_1 \ldots x_n$ in ∞^m $(n - m)$-fach ausgedehnte reelle Mannigfaltigkeiten giebt, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn g_r ein $(n - m)$-gliedriges reelles vollständiges System:

$$Y_k f = \sum_1^n {}_\nu \eta_{k\nu}(x_1 \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_\nu} = 0 \qquad (k = 1 \ldots n - m;\ 0 < m < n)$$

invariant lässt; im entgegengesetzten Falle nennen wir g_r *primitiv*.

Hier kann offenbar der Fall eintreten, dass g_r primitiv ist, G_r aber imprimitiv, denn es ist denkbar, dass g_r kein reelles vollständiges System invariant lässt, während bei G_r ein vollständiges System invariant bleibt, dessen Coefficienten imaginäre Functionen von $x_1 \ldots x_n$ sind. Tritt dieser Fall ein, so muss G_r offenbar auch das conjugirt imaginäre vollständige System invariant lassen. Ueberhaupt ist klar, dass stets, wenn bei G_r nur *ein* $(n - m)$-gliedriges vollständiges System invariant bleibt, dieses System eine reelle Form erhalten kann und auch bei g_r invariant bleibt, dass aber mehrere bei G_r invariante vollständige Systeme, soweit sie nicht durch reelle Gleichungen dargestellt werden können, sich paarweise als conjugirt imaginär zusammenordnen müssen.

Einfach nennen wir die Gruppe g_r, wenn sie keine reelle invariante Untergruppe enthält. Ist g_r einfach, so kann G_r trotzdem zusammengesetzt sein, die invarianten Untergruppen von G_r müssen sich nur dann paarweise als conjugirt imaginär zusammenordnen. Dieser Fall tritt zum Beispiel bei der projectiven Gruppe der Fläche zweiten Grades: $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ ein. Die Gruppe aller reellen und complexen Transformationen, bei denen diese Fläche zweiten Grades invariant bleibt, enthält nämlich zwei dreigliedrige invariante Untergruppen, die conjugirt imaginär sind, entsprechend den beiden conjugirt imaginären Schaaren von Erzeugenden der Fläche (vgl. Kap. 10); dagegen enthält die Gruppe aller reellen projectiven Transformationen, bei denen die Fläche in sich übergeht, keine reelle invariante Untergruppe, sie ist also einfach.

Erwähnt sei noch, dass jede l-gliedrige invariante Untergruppe von G_r, die innerhalb G_r einzig in ihrer Art ist, nothwendig l unab-

hängige reelle infinitesimale Transformationen enthält, die eine reelle invariante Untergruppe von g_r erzeugen.

Ist $\mathfrak{g}_r$ eine zweite reelle r-gliedrige Gruppe in m reellen Veränderlichen $y_1 \ldots y_m$, so sagen wir, dass g_r und $\mathfrak{g}_r$ *gleichzusammengesetzt* sind, wenn $\mathfrak{g}_r$ r unabhängige reelle infinitesimale Transformationen: $Y_1 f \ldots Y_r f$ enthält, die durch Beziehungen von der Form:

$$(Y_k Y_j) = \sum_1^r{}^s c_{kjs}\, Y_s f \qquad (k, j = 1 \ldots r)$$

mit denselben reellen Constanten c_{kjs} wie bei (2) verknüpft sind. Wenn g_r und $\mathfrak{g}_r$ in diesem Sinne gleichzusammengesetzt sind, so sind natürlich auch die zugehörigen Gruppen G_r und $\mathfrak{G}_r$ von complexen Transformationen gleichzusammengesetzt im Sinne von Abschn. I, S. 291; dagegen folgt aus dem Gleichzusammengesetztsein von G_r und $\mathfrak{G}_r$ noch keineswegs das von g_r und $\mathfrak{g}_r$, denn es ist denkbar, dass sich $\mathfrak{G}_r$ und G_r nur in imaginärer Weise holoedrisch isomorph auf einander beziehen lassen. Ein Beispiel hierfür bieten die beiden Gruppen: $p,\ xp,\ x^2p$ und: $xq - yp,\ yr - zq,\ zp - xr,$ die als Gruppen von complexen Transformationen betrachtet gleichzusammengesetzt sind, nicht aber als Gruppen von reellen Transformationen, denn die erste von ihnen enthält reelle zweigliedrige Untergruppen, die zweite nicht.

Zwei r-gliedrige reelle Gruppen g_r und $\mathfrak{g}_r$ in den reellen Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$ rechnen wir zu demselben *Gruppentypus*, wenn sie durch eine reelle Punkttransformation in $x_1 \ldots x_n$ mit einander ähnlich sind. Sollten g_r und $\mathfrak{g}_r$ nicht durch eine reelle Punkttransformation mit einander ähnlich sein, so könnte immer noch der Fall eintreten, dass die zugehörigen Gruppen G_r und $\mathfrak{G}_r$ von complexen Transformationen durch eine imaginäre Punkttransformation mit einander ähnlich wären.

Wünscht man zu entscheiden, ob zwei r-gliedrige reelle *transitive* Gruppen g_r und $\mathfrak{g}_r$ in den reellen Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$ durch eine reelle Punkttransformation ähnlich sind, so muss man zunächst feststellen, ob sie in dem angegebenen Sinne gleichzusammengesetzt sind. Sind sie das, so genügt das Theorem 76 auf S. 425 von Abschn. I, um die Frage nach der Aehnlichkeit zu entscheiden; man muss nur noch die zwei Forderungen hinzufügen, dass die in diesem Theorem verlangte holoedrisch isomorphe Beziehung der beiden Gruppen auf einander in reeller Weise möglich sei und dass man für $x_1^0 \ldots x_n^0$ und $y_1^0 \ldots y_n^0$ zwei reelle Punkte von allgemeiner Lage wählen könne. In der That, a. a. O. auf S. 427 wird eine Transformation T aufgestellt,

vermöge deren die beiden Gruppen: $X_1 f \ldots X_r f$ und: $Z_1 f \ldots Z_r f$ unter den in Theorem 76 gemachten Voraussetzungen mit einander ähnlich sind; es ist nun klar, dass aus den besonderen Forderungen, die wir soeben noch zu diesen Voraussetzungen hinzugefügt haben, ohne Weiteres folgt, dass diese Transformation T reell wird.

Wir haben uns im Vorhergehenden auf solche reelle Gruppen beschränkt, die durch analytische Gleichungen dargestellt werden. Was lässt sich nun über die reellen Gruppen sagen, deren Transformationsgleichungen nicht analytisch und also blos für reelle Werthe der Veränderlichen und der Parameter definirt sind?

Wir begnügen uns mit einigen kurzen Bemerkungen über diese Gruppen.

Die Gleichungen:

$$(5) \qquad x_v' = F_v(x_1 \ldots x_n;\ a_1 \ldots a_r) \quad (v = 1 \ldots n),$$

in denen die F_v reelle nichtanalytische Functionen ihrer reellen Argumente sind, mögen eine r-gliedrige Gruppe mit paarweise inversen Transformationen darstellen. Sollen auf diese Gruppe die im ersten Abschnitt entwickelten Methoden anwendbar sein, so müssen die F_v jedenfalls gewisse Differentialquotienten nach den $n + r$ Grössen $x_1 \ldots x_n$, $a_1 \ldots a_r$ besitzen. Wir wollen uns nicht damit aufhalten, die kleinste Zahl von erforderlichen Differentialquotienten festzustellen, wir begnügen uns vielmehr mit der Mittheilung der Thatsache, dass die Existenz aller Differentialquotienten von erster und einer gewissen Anzahl von Differentialquotienten von zweiter Ordnung hinreicht, um die Hauptsätze der Kapitel 2, 4 und 9 von Abschn. I auch für Gruppen von der hier betrachteten Beschaffenheit zu beweisen. Indem man sich etwa auf die Untersuchungen von Cauchy und Lipschitz über die Existenz der Lösungen *reeller* nichtanalytischer Differentialgleichungen stützt, kann man insbesondere die nachfolgenden beiden Theoreme beweisen:

Theorem 31. *Wenn die Gleichungen:*

$$(5) \qquad x_v' = F_v(x_1 \ldots x_n;\ a_1 \ldots a_r) \quad (v = 1 \ldots n)$$

eine r-gliedrige reelle Gruppe darstellen, deren Transformationen sich paarweise als invers zusammenordnen, und wenn die Functionen F_v alle Differentialquotienten erster und eine gewisse, hier nicht näher zu bestimmende Zahl von Differentialquotienten zweiter Ordnung nach $x_1 \ldots x_n$, $a_1 \ldots a_r$ besitzen, so ist die betreffende Gruppe von r unabhängigen reellen infinitesimalen Transformationen:

$$Z_k f = \sum_1^n{}_\nu \xi_{k\nu}(x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \quad (k = 1 \dots r)$$

erzeugt, in denen die $\xi_{k\nu}$ nach jeder von den Veränderlichen $x_1 \dots x_n$ einmal differentiirbar sind. Diese infinitesimalen Transformationen $Z_k f$ stehen überdies paarweise in Beziehungen von der Form:

$$(6) \qquad (Z_k Z_j) = \sum_1^r{}_s c_{kjs} Z_s f \quad (k, j = 1 \dots r),$$

unter den c_{kjs} reelle Zahlen verstanden.

Theorem 32. *Sind die r reellen infinitesimalen Transformationen:*

$$Z_k f = \sum_1^n{}_\nu \xi_{k\nu}(x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \quad (k = 1 \dots r)$$

von einander unabhängig, sind ferner die rn reellen Functionen $\xi_{k\nu}$ nach jeder der n Veränderlichen $x_1 \dots x_n$ einmal differentiirbar und bestehen endlich Beziehungen von der Form:

$$(6) \qquad (Z_k Z_j) = \sum_1^r{}_s c_{kjs} Z_s f \quad (k, j = 1 \dots r),$$

unter den c_{kjs} reelle Zahlen verstanden, so erzeugen $Z_1 f \dots Z_r f$ eine r-gliedrige reelle Transformationsgruppe mit paarweise inversen Transformationen.

Von grosser Wichtigkeit ist ferner das

Theorem 33. *Sind die Transformationen:*

$$(5) \qquad x_\nu' = F_\nu(x_1 \dots x_n;\ a_1 \dots a_r) \quad (\nu = 1 \dots n)$$

einer r-gliedrigen reellen Gruppe paarweise zu einander invers, besitzen ferner die F_ν sämmtliche Differentialquotienten von erster Ordnung nach $x_1 \dots x_n$, $a_1 \dots a_r$ und eine gewisse hier nicht näher zu bestimmende Zahl von Differentialquotienten zweiter Ordnung, so kann die betreffende Gruppe, wenn sie transitiv *ist, stets durch Einführung neuer Veränderlicher $y_1 \dots y_n$ und neuer Parameter $l_1 \dots l_r$ auf eine solche Form:*

$$y_\nu' = f_\nu(y_1 \dots y_n;\ l_1 \dots l_r) \quad (\nu = 1 \dots n)$$

gebracht werden, dass die f_ν analytische *Functionen ihrer Argumente sind**).

---

*) Diesen Satz hat Lie zuerst in den Leipziger Berichten von 1888 ausgesprochen, S. 17.

Die Wichtigkeit dieses Theorems beruht darauf, dass es uns ermöglicht, *uns bei der Bestimmung reeller transitiver Gruppen von vornherein auf solche Gruppen zu beschränken, die durch reelle analytische Gleichungen dargestellt werden, also mit andern Worten auf solche Gruppen, in deren infinitesimalen Transformationen:*

$$\sum_1^n{}_v \xi_{kv}(x_1 \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_v} \quad (k = 1, 2 \ldots)$$

die ξ_{kv} analytische Functionen von $x_1 \ldots x_n$ sind.

Den Beweis des Theorems 33 wollen wir nur andeuten.

Es seien:

$$Z_k f = \sum_1^n{}_v \xi_{kv}(x_1 \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_v} \quad (k = 1 \ldots r)$$

r unabhängige infinitesimale Transformationen, von denen die transitive Gruppe (5) erzeugt ist. Dann bestehen sicher Relationen von der Form:

$$(6) \qquad (Z_k Z_j) = \sum_1^r{}_s c_{kjs} Z_s f \quad (k, j = 1 \ldots r),$$

in denen die c_{kjs} reelle Zahlen sind. Hieraus folgt zunächst, wie in Abschn. I, Kap. 16, dass zu der Gruppe (5) eine adjungirte Gruppe gehört, die von den infinitesimalen Transformationen:

$$E_k f = \sum_{vs}^{1 \ldots r} c_{vks} e_v \frac{\partial f}{\partial e_s} \quad (k = 1 \ldots r)$$

erzeugt ist. Andrerseits kann man leicht beweisen, dass $E_1 f \ldots E_r f$ gerade in den Beziehungen:

$$(E_k E_j) = \sum_1^r{}_s c_{kjs} E_s f \quad (k, j = 1 \ldots r)$$

stehen, dass also die c_{kjs} die bekannten Gleichungen:

$$\sum_1^r{}_v \{ c_{kjv} c_{vhs} + c_{jhv} c_{vks} + c_{hkv} c_{vjs} \} = 0$$
$$(k, j, h, s = 1 \ldots r)$$

befriedigen*). Nach Anleitung von Abschn. II, S. 294 ff. kann man nunmehr eine r-gliedrige reelle einfach transitive Gruppe aufstellen, die

*) Aus den Gleichungen (6) kann man das Bestehen dieser Relationen zwischen dem c_{kjs} nicht direct schliessen, weil man nicht weiss, ob die ξ_{kv} zweite Differentialquotienten besitzen und weil man in Folge dessen die Jacobische Identität nicht anwenden kann.

mit der Gruppe (5) gleichzusammengesetzt ist und in deren infinitesimalen Transformationen:

$$U_k f = \sum_1^r {}_v \omega_{kv}(u_1 \ldots u_r) \frac{\partial f}{\partial u_v} \quad (k = 1 \ldots r)$$

die ω_{kv} reelle analytische Functionen ihrer Argumente sind. Da andrerseits die Parametergruppe der Gruppe (5) ebenfalls reell, einfach transitiv und mit der Gruppe (5) gleichzusammengesetzt ist, so ist klar, dass diese Parametergruppe durch eine reelle Punkttransformation mit der Gruppe: $U_1 f \ldots U_r f$ ähnlich ist (vgl. Abschn. I, Theor. 64, S. 340). Berücksichtigt man endlich die Entwicklungen des Kapitels 22 von Abschnitt I und das auf S. 427 f. ebenda Gesagte, so erkennt man leicht, dass auch die Gruppe (5) selbst durch eine reelle Punkttransformation in eine reelle *analytische* Gruppe übergeführt werden kann.

Das Theorem 33 beschränkt sich auf *transitive* reelle Gruppen. Dass für die *intransitiven* reellen Gruppen ein ähnliches Theorem nicht bestehen kann, ergiebt sich schon durch Betrachtung der intransitiven Gruppen der Ebene. Zum Beispiel erzeugen ja die drei infinitesimalen Transformationen:

$$X_1 f = q, \quad X_2 f = xq, \quad X_3 f = F(x) q$$

stets eine dreigliedrige intransitive Gruppe der Ebene, welche nichtlineare Function von x auch F sein mag (vgl. S. 39), also auch dann, wenn F eine reelle nichtanalytische Function von x ist. Tritt dieser Fall ein, so lässt sich die Gruppe: $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ sicher nicht durch geeignete Wahl der Veränderlichen in eine analytische Gruppe überführen, denn wäre etwa:

$$X_k f = \xi_k(x, y) p + \eta_k(x, y) q \quad (k = 1, 2, 3)$$

eine analytische Form der Gruppe, so müssten zwei Identitäten von der Form:

$$X_2 f \equiv \varrho_2(x, y) X_1 f, \quad X_3 f \equiv \varrho_3(x, y) X_1 f$$

bestehen, wo ϱ_2 und ϱ_3 analytische Functionen wären, die ihrerseits der Identität:

$$\varrho_3(x, y) \equiv F(\varrho_2(x, y))$$

genügten, das aber ist offenbar unmöglich, sobald F keine analytische Function seines Arguments ist.

Wir wollen jetzt die vorstehenden allgemeinen Betrachtungen durch einige Beispiele erläutern und zwar wollen wir die Untersuchungen der Kapitel 1 ... 5 insbesondere mit Rücksicht auf die Bestimmung

der reellen Gruppen umgestalten. Wir werden sehen, dass wir zu den damaligen Entwicklungen nur wenig hinzuzufügen brauchen.

§ 83.

Bestimmung aller reellen endlichen und aller reellen projectiven Gruppen auf der Geraden und der Ebene.

Die endlichen continuirlichen Gruppen auf der Geraden sind sämmtlich transitiv, die reellen unter ihnen können wir uns daher nach S. 366 f. von vornherein auf eine solche Form gebracht denken, dass die auftretenden Functionen reelle analytische Functionen sind. Hieraus folgt, dass die Entwicklungen der S. 2—6 ohne Weiteres auch zur Bestimmung der reellen Gruppen auf der Geraden führen, nur muss man natürlich den Punkt von allgemeiner Lage, der auf S. 2 zum Coordinatenanfang gewählt wird, reell annehmen. Das Theorem 1 auf S. 6 bleibt demnach auch gültig, wenn man sagt: Jede *reelle* endliche continuirliche Gruppe einer *reellen* einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit ist durch *reelle* Punkttransformation ähnlich u. s. w. Zu demselben Ergebnisse gelangt man übrigens auch auf Grund des § 2, S. 7 ff., denn es macht für das Endergebniss offenbar keinen Unterschied, wenn man der Definitionsgleichung (6) auf S. 7 eine reelle Form vorschreibt.

Anders ist es bei den *reellen* projectiven Gruppen der Geraden; hier bedürfen die Auseinandersetzungen des § 4, S. 12 ff. einer kleinen Ergänzung, wenn man die Aufgabe für die reellen Gruppen vollständig erledigen will.

Ist g eine reelle Untergruppe der dreigliedrigen reellen allgemeinen projectiven Gruppe auf der Geraden, so lässt die zugehörige Gruppe G von complexen Transformationen (vgl. S. 362) nach Theorem 2, S. 17 entweder zwei verschiedene Punkte invariant oder nur einen, der allerdings doppelt zählen kann. Bleibt nur ein Punkt invariant, so ist der nothwendig reell und kann durch eine reelle projective Transformation ins Unendliche verlegt werden, in diesem Falle kann daher g durch reelle projective Transformationen auf eine der beiden Formen:

$$(7) \qquad \boxed{p,\ xp} \qquad \boxed{p}$$

gebracht werden. Bleiben andrerseits bei G zwei verschiedene Punkte invariant, so sind die entweder beide reell oder beide imaginär und zwar conjugirt imaginär; sind sie reell, so kann man sie durch eine

reelle projective Transformation in die Punkte 0 und ∞ überführen, sind sie imaginär, in die beiden Punkte: $+i$, $-i$. Demnach lässt sich dann g durch reelle projective Transformationen in eine der beiden Formen:

$$(8) \qquad \boxed{xp} \qquad \boxed{(x^2+1)p}$$

überführen. Damit ist für jeden Typus von reellen Untergruppen der reellen projectiven Gruppe: p, xp, x^2p ein Repräsentant gefunden.

Die reellen linearen homogenen Gruppen in zwei Veränderlichen sind in Theorem 3, S. 26 schon fast alle aufgezählt, es fehlen nur die, die zwei conjugirt imaginäre Gerade durch den Punkt: $x = y = 0$ festhalten; da man jedes Paar von solchen Geraden durch eine reelle lineare homogene Transformation in das Geradenpaar: $(x+iy)(x-iy) = 0$ überführen kann, so ist klar, dass man zu den Gruppen des Theorems 3 nur noch die beiden:

$$(9) \qquad \boxed{xq - yp,\ xp + yq} \qquad \boxed{xq - yp + c(xp + yq)}$$

hinzuzufügen braucht. Hier bedeutet c natürlich eine reelle Constante, die man übrigens der Bedingung: $c \gtrless 0$ unterwerfen kann, da man durch Vertauschung von x mit y eine Gruppe von derselben Form mit dem Parameter $-c$ erhält. Uebrigens kann man jetzt auch in der Gruppe 7 des Theorems 3 das c auf die Werthe, die >0 sind, beschränken.

Wir kommen zu den *reellen endlichen Gruppen der Ebene**).

Ist g_r eine r-gliedrige Gruppe dieser Art und ist g_r im Sinne von S. 363 *primitiv*, so ist es nothwendig zugleich transitiv und kann daher nach S. 366 auf eine solche Form gebracht werden, dass nur analytische Functionen auftreten. Nehmen wir an, dass g_r bereits eine solche Form hat, so sind noch zwei Fälle denkbar: entweder ist nämlich auch die zugehörige r-gliedrige Gruppe G_r von complexen Transformationen (s. S. 362) primitiv oder sie ist imprimitiv.

Im ersten Falle werden bei g_r offenbar die ∞^1 reellen Linienelemente durch jeden festgehaltenen reellen Punkt von allgemeiner Lage durch eine dreigliedrige reelle projective Gruppe transformirt, also in möglichst allgemeiner Weise. Beachten wir daher, dass die Entwicklungen des Kap. 29 in Abschn. I auch dann noch gültig bleiben,

*) Lie hat schon in den Leipziger Berichten von 1889, S. 156 die Bestimmung der reellen Gruppen der Ebene angedeutet.

wenn man sich auf reelle Werthe von $x_1 \ldots x_n$ und auf reelle analytische Transformationen beschränkt (vgl. auch S. 364 f.), so gelangen wir zu dem Ergebniss, dass g_r in diesem Falle stets durch eine reelle Punkttransformation der Ebene mit einer der drei Gruppen des Theorems 5, S. 35 ähnlich ist.

Im zweiten Falle lässt G_r mindestens eine Schaar von ∞^1 Curven der Ebene invariant. Liesse es blos eine solche Schaar invariant, so bestände diese Schaar nach S. 363 aus den Charakteristiken einer reellen linearen partiellen Differentialgleichung und enthielte somit ∞^1 reelle Curven, deren Inbegriff natürlich bei g_r invariant bliebe; g_r wäre also gegen unsre Voraussetzung imprimitiv. Liesse G_r andrerseits unendlich viele Schaaren von je ∞^1 Curven invariant, so blieben mit jedem festgehaltenen reellen Punkte von allgemeiner Lage zugleich alle hindurchgehenden Linienelemente in Ruhe und daher auch alle hindurchgehenden reellen Linienelemente, es gäbe folglich sogar unendlich viele bei g_r invariante reelle Schaaren von je ∞^1 Curven. Demnach (vgl. S. 61) muss G_r nothwendig zwei und nur zwei Schaaren von je ∞^1 Curven invariant lassen und diese beiden Schaaren müssen conjugirt imaginär sein, das heisst, sie müssen durch zwei Gleichungen von der Form:

$$\varphi(x, y) + i\,\psi(x, y) = \text{const.}; \quad \varphi(x, y) - i\,\psi(x, y) = \text{const.}$$

dargestellt werden, wo φ und ψ von einander unabhängige reelle Functionen sind. Ueberdies ist klar, dass G_r, wenn es die eine der beiden Schaaren gerade l-gliedrig transformirt, auch die andre l-gliedrig transformiren muss; G_r enthält ja r unabhängige reelle infinitesimale Transformationen und diese Transformationen ändern sich offenbar nicht, wenn man $+i$ mit $-i$ vertauscht.

Nun kennen wir alle endlichen continuirlichen Gruppen der Ebene, bei denen zwei und nur zwei Schaaren von je ∞^1 Curven invariant bleiben (s. S. 73), und unter diesen Gruppen giebt es nur vier Typen von solchen Gruppen, bei denen beide invariante Schaaren gleichvielgliedrig transformirt werden, es sind das die Typen, die durch die vier Gruppen:

$$(10) \qquad \begin{cases} p_1,\ x_1p_1,\ x_1^2p_1,\ q_1,\ y_1q_1,\ y_1^2q_1 \\ p_1,\ x_1p_1,\ q_1,\ y_1q_1 \\ p_1 + q_1,\ x_1p_1 + y_1q_1,\ x_1^2p_1 + y_1^2q_1 \\ p_1,\ q_1,\ x_1p_1 + c_1y_1q_1 \quad (c_1 \neq 0, 1) \end{cases}$$

repräsentirt werden. Da die beiden zu diesen Gruppen gehörigen invarianten Curvenschaaren: $x_1 = \text{const.}$, und: $y_1 = \text{const.}$ reell sind, so

muss offenbar jede Gruppe G_r von der betrachteten Beschaffenheit durch eine imaginäre Transformation mit einer der Gruppen (10) ähnlich sein.

Ist die Gliederzahl r von G_r gleich sechs, so ist G_r durch eine imaginäre Transformation mit der ersten unter den Gruppen (10) ähnlich. Diese Transformation*) hat nothwendig die Form:

$$x_1 = \alpha(x, y) + i\beta(x, y), \quad y_1 = \varphi(\alpha - i\beta),$$

wo α und β zwei reelle von einander unabhängige Functionen sind, während φ eine reelle oder imaginäre Function von: $\alpha - i\beta$ ist; bei der bewussten Transformation müssen ja die ∞^1 Curven: $x_1 = \text{const.}$ in ∞^1 imaginäre Curven übergehen und die Curven: $y_1 = \text{const.}$ in die ∞^1 conjugirt imaginären Curven. Führen wir daher in G_r die reellen Functionen α und β als neue x und y ein, so erhält G_r eine neue Form, die die ursprüngliche ersetzen kann, und die in Rede stehende Transformation bekommt die Gestalt:

$$x_1 = x + iy, \quad y_1 = \varphi(x - iy).$$

Durch Auflösung finden wir hieraus:

$$x = \frac{x_1 + \omega(y_1)}{2}, \quad y = \frac{x_1 - \omega(y_1)}{2i}, \tag{11}$$

wo ω eine reelle oder imaginäre Function bedeutet. Demnach muss sich die neue Form von G_r ergeben, wenn wir in die erste der Gruppen (10) an Stelle von x_1, y_1 die neuen Veränderlichen x, y einführen.

Nun bekommen wir vermöge (11):

$$p_1 = \frac{1}{2i}(ip + q)$$

$$x_1 p_1 = \frac{x + iy}{2i}(ip + q)$$

$$x_1^2 p_1 = \frac{(x + iy)^2}{2i}(ip + q),$$

also sind:

$$ip + q, \quad xq - yp + i(xp + yq)$$
$$-2xyp + (x^2 - y^2)q + i\{(x^2 - y^2)p + 2xyq\}$$

drei imaginäre infinitesimale Transformationen, die in der neuen Form von G_r auftreten. Da aber G_r sechsgliedrig ist und sechs unabhängige reelle infinitesimale Transformationen enthält, so muss es ausser den eben geschriebenen auch noch die zugehörigen conjugirt imaginären Transformationen enthalten, das heisst es muss von den sechs reellen infinitesimalen Transformationen:

*) Das hier bei den sechs- und den vier-gliedrigen Gruppen G_r benutzte Verfahren hat Lie bereits in den Leipziger Berichten von 1890 auf S. 406 ff. angewendet.

$$(12) \qquad \begin{array}{|c|}\hline p,\ q,\ xq - yp,\ xp + yq \\ (x^2 - y^2)p + 2xyq,\ 2xyp + (y^2 - x^2)q \\ \hline \end{array}$$

erzeugt sein. Da diese Transformationen wirklich eine sechsgliedrige reelle Gruppe erzeugen, so ist jede sechsgliedrige Gruppe G_r von der hier betrachteten Beschaffenheit durch eine reelle Punkttransformation der Ebene mit der Gruppe (12) ähnlich.

Die Gruppe (12) ist die grösste endliche continuirliche Gruppe der Ebene, bei der die beiden Curvenschaaren: $x + iy = \text{const.}$, $x - iy = \text{const.}$ invariant bleiben; sie ist uns schon auf S. 336 begegnet, wir erhielten sie damals aus der ersten der Gruppen (10) durch die Transformation:

$$(13) \qquad x = \frac{x_1 + y_1}{2}, \quad y = \frac{x_1 - y_1}{2i}.$$

Ist G_r viergliedrig, so ist es durch eine imaginäre Transformation mit der zweiten der Gruppen (10) ähnlich; die eben angestellten Betrachtungen zeigen daher, dass es durch eine reelle Punkttransformation der Ebene mit der Gruppe:

$$(14) \qquad \begin{array}{|c|}\hline p,\ q,\ xq - yp,\ xp + yq \\ \hline \end{array}$$

ähnlich ist.

Die Gruppe: $p_1,\ q_1,\ x_1p_1 + c_1y_1q_1$ $(c_1 \neq 0,\ 1)$ enthält nur eine zweigliedrige invariante Untergruppe, nämlich $p_1,\ q_1$. Ist daher G_r dreigliedrig und mit der genannten Gruppe durch eine imaginäre Punkttransformation ähnlich, so enthält es eine zweigliedrige invariante Untergruppe, die mit der Gruppe: $p_1,\ q_1$ durch imaginäre Punkttransformation ähnlich ist und in der es nach S. 363 f. sicher zwei unabhängige reelle infinitesimale Transformationen giebt. Hieraus folgt, dass die betreffende invariante Untergruppe durch eine reelle Punkttransformation auf die Form: $p,\ q$ gebracht werden kann und dass G_r zu gleicher Zeit die Form:

$$p,\ q,\ (a_1x + a_2y)p + (a_3x + a_4y)q$$

erhält, wo die a reelle Constanten sind. Berücksichtigt man schliesslich, dass G_r zwei und nur zwei conjugirt imaginäre Schaaren von je ∞^1 Curven invariant lassen soll, so findet man auf Grund von S. 370 leicht, dass G_r durch eine reelle Punkttransformation in die Gruppe:

$$(15) \qquad \begin{array}{|c|}\hline p,\ q,\ yp - xq + c(xp + yq) \\ \hline \end{array}$$

überführbar ist.

Endlich müssen wir noch den Fall erledigen, dass G_r dreigliedrig und mit der Gruppe: $p_1 + q_1$, $x_1 p_1 + y_1 q_1$, $x_1^2 p_1 + y_1^2 q_1$ durch eine imaginäre Punkttransformation ähnlich ist. In diesem Falle kommen wir zum Ziel, indem wir die zu der Gruppe G_3 gehörige adjungirte Gruppe betrachten.

Sind $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ irgend drei reelle unabhängige infinitesimale Transformationen der gesuchten dreigliedrigen Gruppe G_3, so bestehen Relationen von der Form:

$$(X_k X_j) = \sum_1^3{}_s c_{kjs} X_s f \quad (k, j = 1, 2, 3),$$

wo die c_{kjs} reelle Zahlen bedeuten; die adjungirte Gruppe von G_3 wird daher von drei unabhängigen reellen linearen homogenen infinitesimalen Transformationen: $E_1 f$, $E_2 f$, $E_3 f$ in den drei Veränderlichen e_1, e_2, e_3 erzeugt, zwischen denen die Beziehungen:

$$(E_k E_j) = \sum_1^3{}_s c_{kjs} E_s f \quad (k, j = 1, 2, 3)$$

mit denselben Constanten c_{kjs} bestehen. Deuten wir e_1, e_2, e_3 als homogene Coordinaten der Punkte einer Ebene, so bestimmen $E_1 f$, $E_2 f$, $E_3 f$ eine dreigliedrige reelle projective Gruppe Γ dieser Ebene und zwar ist Γ transitiv und lässt einen gewissen nicht ausgearteten Kegelschnitt invariant (vgl. S. 13 ff.), der offenbar durch eine reelle Gleichung dargestellt wird. Nun gestattet jeder reelle Punkt von allgemeiner Lage in der Ebene von G_3 eine und nur eine reelle infinitesimale Transformation: $e_1 X_1 f + e_2 X_2 f + e_3 X_3 f$ von G_3 und andrerseits gestattet der reelle Punkt: $e_1 : e_2 : e_3$ in der Ebene von Γ nur die infinitesimale Transformation: $e_1 E_1 f + e_2 E_2 f + e_3 E_3 f$ von Γ, die beiden reellen transitiven Gruppen G_3 und Γ sind demnach durch eine reelle Punkttransformation mit einander ähnlich (vgl. S. 364 f.).

Hiermit ist bewiesen, dass G_3 durch eine reelle Punkttransformation in die dreigliedrige reelle projective Gruppe eines Kegelschnitts mit reeller Gleichung übergeführt werden kann; da nun jeder solche Kegelschnitt durch eine reelle projective Transformation entweder die Form: $x^2 + y^2 - 1 = 0$ oder die Form: $x^2 + y^2 + 1 = 0$ erhalten kann, so ergiebt sich, dass jede reelle Gruppe G_3 von der hier betrachteten Beschaffenheit durch eine reelle Punkttransformation entweder mit der Gruppe:

$$(16) \qquad \boxed{p - x(xp + yq),\ q - y(xp + yq),\ yp - xq}$$

oder mit der Gruppe:

(17) $$\boxed{p + x(xp + yq),\ q + y(xp + yq),\ yp - xq}$$

ähnlich ist.

Nunmehr kennen wir alle endlichen continuirlichen reellen Gruppen von Punkttransformationen der Ebene, die als Gruppen von reellen Transformationen primitiv, als Gruppen von complexen Transformationen dagegen imprimitiv sind. Wir wollen jedoch die dreigliedrigen unter diesen Gruppen jetzt noch einmal und zwar auf einem directen Wege bestimmen; wir werden dabei noch zu zwei andern bemerkenswerthen Formen der Gruppen (16) und (17) gelangen.

Ist G_3 eine dreigliedrige reelle Gruppe von der verlangten Beschaffenheit, so denken wir uns die infinitesimalen Transformationen von G_3 in der Umgebung eines reellen Punktes von allgemeiner Lage in Potenzreihen entwickelt. Verlegen wir den betreffenden Punkt durch eine reelle Punkttransformation in den Coordinatenanfang, so enthält G_3, weil es transitiv ist, in der Umgebung von: $x = y = 0$ zwei reelle infinitesimale Transformationen von nullter Ordnung in den x, y, etwa:

$$P = p + \cdots, \quad Q = q + \cdots$$

und ausserdem noch eine von erster Ordnung, die wir in der Form:

$$S = yp - xq + c(xp + yq) + \cdots$$

annehmen können, unter c eine reelle Zahl verstanden; denn mit dem Punkte: $x = y = 0$ bleiben zugleich zwei hindurchgehende conjugirt imaginäre Linienelemente invariant und die können wir stets durch eine reelle lineare homogene Transformation in die beiden Linienelemente: $dx + i\,dy = 0$, $dx - i\,dy = 0$ überführen (vgl. S. 370). Noch ist zu bemerken, dass in P und Q die weggelassenen Glieder alle von erster und höherer Ordnung in x, y sind, in S aber alle von zweiter und höherer.

Da P, Q, S reelle unabhängige infinitesimale Transformationen einer dreigliedrigen Gruppe sind, so bestehen Relationen von der Form:

(18) $$\begin{cases} (PS) = -Q + cP + \alpha S, \ (QS) = P + cQ + \beta S \\ (PQ) = \lambda P + \mu Q + \gamma S, \end{cases}$$

wo α, β, γ, λ, μ reelle Constanten sind. Setzen wir daher:

$$P' = P + aS, \quad Q' = Q + bS,$$

so kommt:

$$(P'S) = -Q' + cP' + (b - ca + \alpha)S$$
$$(Q'S) = \quad P' + cQ' - (a + cb - \beta)S.$$

Hier können wir, da c reell ist, stets zwei solche endliche reelle Zahlen finden, dass rechts die Glieder mit S verschwinden, wir können also in den Gleichungen (18) α und β gleich Null setzen. Durch Bildung der Jacobischen Identität zwischen P, Q, S ergiebt sich sodann:

$$\lambda(-Q + cP) + \mu(P + cQ) - 2c(PQ) = 0$$

und mithin:

$$\mu - \lambda c = 0, \quad \mu c + \lambda = 0, \quad c\gamma = 0,$$

also, da c reell ist: $\lambda = \mu = 0$, während γ jedenfalls nur dann verschieden von Null sein kann, wenn c verschwindet.

Ist $\gamma = 0$, so hat unsre Gruppe die Zusammensetzung:

$$(19) \qquad (P, Q) = 0, \quad (PS) = -Q + cP, \quad (QS) = P + cQ.$$

Eine reelle Gruppe von dieser Zusammensetzung ist:

$$(15) \qquad \boxed{p,\ q,\ yp - xq + c(xp + yq)},$$

da nun der Punkt: $x = y = 0$ auch dieser Gruppe gegenüber ein Punkt von allgemeiner Lage ist, so ergiebt sich bei Berücksichtigung des auf S. 364 f. Gesagten, dass jede reelle Gruppe: P, Q, S von der Zusammensetzung (19) mit der Gruppe (15) durch eine reelle Punkttransformation ähnlich ist. In der Gruppe (15) kann man überdies noch den reellen Parameter c der Beschränkung: $c \gtrless 0$ unterwerfen, da die Gruppen von der Form (15) paarweise durch die Transformation: $x_1 = y$, $y_1 = x$ mit einander ähnlich sind.

Wie wir schon auf S. 336 gesehen haben, wird die Gruppe (15) aus der letzten der Gruppen (10) durch die Transformation (13) erhalten und zwar bestehen zwischen den Parametern c und c_1 die Beziehungen:

$$c = i \cdot \frac{c_1 + 1}{c_1 - 1}, \quad c_1 = \frac{c + i}{c - i} = \frac{c^2 - 1 + 2ci}{c^2 + 1},$$

die Gruppe: p_1, q_1, $x_1 p_1 + c_1 y_1 q_1$ ($c_1 \neq 0, 1$) verwandelt sich daher bei der Transformation (13) nur dann in eine reelle Gruppe, wenn der absolute Betrag von c_1 den Werth 1 hat.

Ist die oben vorkommende reelle Constante $\gamma \neq 0$, so ist $c = 0$ und unsre G_3 hat die Zusammensetzung:

$$(PQ) = \gamma S, \quad (PS) = -Q, \quad (QS) = P.$$

Jenachdem nun $\gamma > 0$ oder < 0 ist, führen wir entweder:

$$\frac{2P}{\sqrt{\gamma}}, \quad \frac{2Q}{\sqrt{\gamma}} \quad \text{oder:} \quad \frac{2P}{\sqrt{-\gamma}}, \quad \frac{2Q}{\sqrt{-\gamma}}$$

als neue P und Q ein und erreichen dadurch, dass γ einen der beiden Werthe: $+4$, -4 erhält. Wir haben daher entweder die Zusammensetzung:

(19′) $$(PQ) = 4S, \quad (PS) = -Q, \quad (QS) = P$$

oder diese:

(19″) $$(PQ) = -4S, \quad (PS) = -Q, \quad (QS) = P.$$

Es liegt nun nahe zu fragen, ob nicht die Gruppe (12) zwei reelle Untergruppen von derartiger Zusammensetzung enthält, und wirklich findet man leicht, dass die reelle Untergruppe:

(20) $$\boxed{p + (x^2 - y^2)p + 2xyq, \quad q + 2xyp + (y^2 - x^2)q, \quad yp - xq}$$

von (12) die Zusammensetzung (19′) hat, während die Untergruppe:

(21) $$\boxed{p - (x^2 - y^2)p - 2xyq, \quad q - 2xyp - (y^2 - x^2)q, \quad yp - xq}$$

die Zusammensetzung (19″) besitzt. Auf Grund des S. 364 f. Gesagten können wir daher schliessen, dass jede dreigliedrige reelle Gruppe von der Form: P, Q, S die eine der beiden Zusammensetzungen (19′), (19″) besitzt, durch reelle Punkttransformation mit der unter den Gruppen (20), (21) ähnlich ist, die dieselbe Zusammensetzung hat.

Von vornherein ist klar, dass die beiden Gruppen (20) und (21) mit der dritten der Gruppen (10) durch eine imaginäre Punkttransformation ähnlich sind; da aber bei dieser letzten Gruppe der Punkt: $x_1 = y_1 = 0$ kein Punkt von allgemeiner Lage ist, so empfiehlt es sich zunächst, in ihr solche neue Veränderliche einzuführen, dass der Coordinatenanfang ein Punkt von allgemeiner Lage wird. Wir erreichen das durch die Transformation:

$$x_2 = x_1, \quad y_2 = -\frac{1}{y_1},$$

bei der die Gruppe: $p_1 + q_1$, $x_1 p_1 + y_1 q_1$, $x_1^2 p_1 + y_1^2 q_1$ die Form:

(22) $$p_2 + y_2^2 q_2, \quad q_2 + x_2^2 p_2, \quad x_2 p_2 - y_2 q_2$$

erhält. Man sieht nun sofort, dass diese Gruppe durch die Transformation:

(23) $$x = \frac{x_2 + y_2}{2}, \quad y = \frac{x_2 - y_2}{2i}$$

mit der Gruppe (20) und durch die Transformation:

(24) $$x = \frac{x_2 - y_2}{2}, \quad y = \frac{x_2 + y_2}{2i}$$

mit der Gruppe (21) ähnlich ist.

Hiermit ist die auf S. 375 angekündigte neue Bestimmung der dreigliedrigen unter den gesuchten Gruppen vollendet. Wir erwähnen nur noch, dass die Gruppen (20) und (21) durch reelle Punkttransformationen bezüglich mit den Gruppen (17) und (16) auf S. 374 f.

ähnlich sind. Während nun aber die beiden reellen Gruppen (20) und (21) in der ganzen reellen Ebene primitiv sind, ist von den beiden reellen Gruppen (16) und (17) nur die zweite in der ganzen reellen Ebene primitiv, die erste dagegen ist zwar im Innern des Kegelschnitts: $x^2+y^2-1=0$, den sie invariant lässt, primitiv, aber in dem übrigen Theile der reellen Ebene ist sie imprimitiv, da sie die Schaar der reellen Tangenten dieses Kegelschnitts invariant lässt.

Nunmehr sprechen wir das Theorem aus:

Theorem 34. *Ist eine reelle endliche continuirliche Gruppe der Ebene primitiv, lässt sie also keine Schaar von ∞^1 reellen Curven invariant, so ist sie durch eine reelle Punkttransformation der Ebene ähnlich entweder mit der allgemeinen projectiven Gruppe, oder mit der allgemeinen linearen oder mit der speciellen linearen oder mit einer der Gruppen:* (12), (14), (15) *auf S. 373,* (20) *und* (21) *auf S. 377.*

Es bleiben jetzt noch die reellen imprimitiven Gruppen der Ebene zu bestimmen, also die, bei denen mindestens eine Schaar von ∞^1 reellen Curven invariant bleibt.

Sind: $X_1 f \ldots X_r f$ r unabhängige reelle infinitesimale Transformationen einer solchen Gruppe und ist: $\varphi(x, y) = \text{const.}$ eine bei der Gruppe invariante reelle Curvenschaar, so bestehen Gleichungen von der Form:

$$X_k(\varphi) = \omega_k(\varphi) \quad (k = 1 \ldots r),$$

wo die ω_k reelle Functionen von φ sind. Führen wir daher durch eine reelle Punkttransformation das φ als neues x ein, so erhält unsre Gruppe die reelle Form:

$$X_k f = \omega_k(x)\, p + \eta_k(x, y)\, q \quad (k = 1 \ldots r)$$

und die verkürzten reellen infinitesimalen Transformationen:

$$\overline{X}_k f = \omega_k(x)\, p \quad (k = 1 \ldots r)$$

erzeugen eine reelle mit der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ isomorphe Gruppe der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit. Da nun nach S. 369 jede reelle endliche continuirliche Gruppe der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit durch eine reelle Punkttransformation mit einer der Gruppen:

$$p,\ xp,\ x^2 p;\quad p,\ xp;\quad p$$

ähnlich ist, so können jetzt ohne Weiteres die Ueberlegungen des § 8 (S. 36 ff.) angewandt werden und das auf S. 38 aufgestellte Programm bleibt auch jetzt massgebend, nur muss man sich natürlich von vorn-

herein auf reelle Transformationen von der Form (5), S. 38, beschränken, wenn man die einzelnen Gruppen auf Normalformen bringen will.

Die Entwicklungen des § 9 (S. 38 ff.) liefern nunmehr alle reellen intransitiven Gruppen der Ebene; die Normalformen dieser Gruppen bleiben die alten: [1], [2], [3], aber die Functionen $F_k(x)$ brauchen jetzt nicht mehr analytische Functionen von x zu sein, sondern sie sind ganz willkürliche reelle Functionen, die *weder differentiirbar noch integrirbar* zu sein brauchen.

Ebenso liefern die in § 10, 11 und 12 (S. 42 ff.) durchgeführten Rechnungen ohne Weiteres auch alle reellen transitiven Gruppen der Ebene, die eine reelle Schaar von ∞^1 Curven invariant lassen. Die dort benutzten Variabelnänderungen sind nämlich so gewählt, dass sie reell ausfallen, sobald die behandelte Gruppe reell ist. Nur einmal, nämlich auf S. 47, wird eine Variabelnänderung benutzt, die unter Umständen nicht reell ist, denn es wird die Constante h dadurch fortgeschafft, dass $x\sqrt[r]{h}$ als neues x eingeführt wird; man bemerkt jedoch sofort, dass man zu demselben Ziele gelangt, wenn man: $\frac{1}{h}y$ als neues y einführt und diese Variabelnänderung ist immer reell, wenn die in Frage kommende Gruppe reell ist.

Demnach kann jede reelle Gruppe der Ebene, die eine reelle Schaar von ∞^1 Curven invariant lässt, durch eine reelle Punkttransformation auf eine der Formen: [1] . . . [20] des Kapitels 3 gebracht werden, nur bei den beiden Formen [5] und [6] auf S. 44 f. wird durch die Beschränkung auf reelle Gruppen eine kleine Aenderung nöthig. Die Constanten $\alpha_1 \ldots \alpha_l$, die dort auftreten, brauchen nämlich, auch wenn die Gruppe reell ist, nicht alle reell zu sein, sondern sie können auch paarweise conjugirt imaginär sein. Will man daher, wie billig, nur reelle infinitesimale Transformationen der betreffenden reellen Gruppen angeben, so muss man statt der Normalformen [5] und [6] die folgenden wählen:

[5″]
$$\left.\begin{array}{l} e^{\alpha_k x}\cos\beta_k x\,.\,q,\quad x e^{\alpha_k x}\cos\beta_k x\,.\,q,\quad \ldots\quad x^{m_k} e^{\alpha_k x}\cos\beta_k x\,.\,q,\\ e^{\alpha_k x}\sin\beta_k x\,.\,q,\quad x e^{\alpha_k x}\sin\beta_k x\,.\,q,\quad \ldots\quad x^{m_k} e^{\alpha_k x}\sin\beta_k x\,.\,q, \end{array}\right\} p$$
$$(k=1,\,2\ldots l;\quad l>0)$$

[6″]
$$\left.\begin{array}{l} e^{\alpha_k x}\cos\beta_k x\,.\,q,\quad x e^{\alpha_k x}\cos\beta_k x\,.\,q,\quad \ldots\quad x^{m_k} e^{\alpha_k x}\cos\beta_k x\,.\,q,\quad yq\\ e^{\alpha_k x}\sin\beta_k x\,.\,q,\quad x e^{\alpha_k x}\cos\beta_k x\,.\,q,\quad \ldots\quad x^{m_k} e^{\alpha_k x}\cos\beta_k x\,.\,q,\quad p \end{array}\right.$$
$$(k=1,\,2\ldots l;\quad l>0)$$

wo die α_k und β_k reelle Constanten sind.

Die Entwicklungen des § 13, S. 52 ff. lassen sich, soweit sie intransitive Gruppen betreffen, sofort auf den Fall reeller Gruppen anwenden. Der Schluss des § 13 bedarf jedoch bei den reellen Gruppen einer kleinen Umänderung, weil man da von den Normalformen [5″] und [6″] ausgehen muss. Es ergiebt sich leicht, dass man in den Gruppen von der Form [6″] stets eine der nicht verschwindenden Constanten α_k, β_k durch Einführung eines neuen x gleich 1 machen kann. Andrerseits kann man in den Gruppen von der Form [6″] stets durch eine reelle Transformation erreichen, dass eines der α_k gleich Null wird und dass eine der dann noch von Null verschiedenen Constanten α_k, β_k den Werth 1 erhält; dagegen kann man, wenn alle α_k verschwinden und alle β_k von Null verschieden sind, niemals durch reelle Transformation erreichen, dass eines der β_k gleich Null wird.

Endlich behalten auch die Untersuchungen des § 17 (S. 65 ff.) für reelle Gruppen ihre Gültigkeit.

Nunmehr können wir angeben, wie die Tabelle auf S. 71—73 vervollständigt werden muss, wenn man für jeden Typus (s. S. 364) von endlichen continuirlichen *reellen* Gruppen der Ebene einen und nur einen Repräsentanten zu haben wünscht: man muss zu den primitiven Gruppen noch die fünf Gruppen:

$$(25)\quad \left\{\begin{array}{l} \boxed{p,\ q,\ xq-yp,\ xp+yq,\ (x^2-y^2)p+2xyq,\ 2xyp+(y^2-x^2)q} \\ \boxed{p,\ q,\ xq-yp,\ xp+yq} \quad \boxed{p,\ q,\ xq-yp+c(xp+yq)\ \ (c\gtrless 0)} \\ \boxed{p+(x^2-y^2)p+2xyq,\ q+2xyp+(y^2-x^2)q,\ xq-yp} \\ \boxed{p-(x^2-y^2)p-2xyq,\ q-2xyp-(y^2-x^2)q,\ xq-yp} \end{array}\right.$$

hinzufügen (s. Theor. 34, S. 378) und ausserdem muss man die siebente Gruppe auf S. 72 durch die Gruppe [6″], S. 379 und die erste Gruppe auf S. 73 durch die Gruppe [5″] ersetzen; dabei ist noch zu beachten, dass die Gruppe [6″] mindestens vier und die Gruppe [5″] mindestens drei Parameter haben muss.

Schliesslich kommen wir zur Bestimmung aller *reellen projectiven Gruppen* der Ebene.

Ist g_r eine r-gliedrige reelle projective Gruppe der Ebene, so ist die zugehörige Gruppe G_r von complexen Transformationen (s. S. 362) ebenfalls eine r-gliedrige projective Gruppe. Ist daher $r < 8$, so lässt G_r nach Theorem 7, S. 94 entweder einen Punkt oder eine Gerade

invariant oder es ist die dreigliedrige projective Gruppe eines nicht ausgearteten Kegelschnitts.

Tritt der letzte Fall ein, so muss der betreffende Kegelschnitt offenbar durch eine reelle Gleichung zweiten Grades zwischen x und y dargestellt werden, und da bekanntlich jeder solche Kegelschnitt durch eine reelle projective Transformation auf eine der beiden Formen:

$$x^2 + y^2 + 1 = 0, \quad x^2 + y^2 - 1 = 0$$

gebracht werden kann, so ist g_r nothwendig durch eine reelle projective Transformation mit einer der beiden schon auf S. 374 f. erwähnten Gruppen:

$$(26) \quad \begin{cases} \boxed{p + x^2p + xyq,\ q + xyp + y^2q,\ yp - xq} \\ \boxed{p - x^2p - xyq,\ q - xyp - y^2q,\ yp - xq} \end{cases}$$

ähnlich.

Lässt G_r andrerseits einen Punkt invariant und ist dieser Punkt imaginär, so muss es jedesmal auch den conjugirt imaginären Punkt und also auch die reelle Verbindungslinie beider Punkte festhalten; lässt es dagegen eine imaginäre Gerade invariant, so muss es offenbar auch die conjugirt imaginäre und den reellen Schnittpunkt beider in Ruhe lassen. Mit andern Worten: jedesmal wenn bei G_r ein imaginärer Punkt oder eine imaginäre Gerade invariant bleibt, bleibt zugleich ein imaginäres Linienelement in Ruhe, von dem aber entweder die Gerade oder der Punkt reell ist.

Wir können in Folge dessen die reellen projectiven Gruppen g_r, bei deren zugehörigen Gruppen G_r mindestens ein Punkt oder eine Gerade invariant bleibt, in drei Klassen eintheilen. In die erste Klasse rechnen wir g_r, wenn G_r überhaupt kein Linienelement invariant lässt, in die zweite, wenn G_r mindestens ein reelles Linienelement invariant lässt, in die dritte, wenn G_r kein reelles, sondern nur imaginäre Linienelemente invariant lässt.

Gehört g_r der ersten Klasse an, so lässt G_r entweder eine reelle Gerade aber keinen auf ihr liegenden Punkt oder einen reellen Punkt aber keine hindurchgehende Gerade invariant; nach § 24, S. 94 ff. ist daher G_r durch eine projective Transformation der Ebene mit einer der Gruppen [1] . . . [6] auf S. 95 und 96 ähnlich. Es liegt auf der Hand, dass dann auch g_r durch eine reelle projective Transformation mit einer dieser Gruppen ähnlich ist.

Gehört g_r der zweiten Klasse an, so kann es durch eine reelle projective Transformation in eine reelle Untergruppe der fünfgliedrigen reellen Gruppe:

[7] $$p,\ q,\ xq,\ xp,\ yq$$

übergeführt werden (vgl. S. 96). Wir brauchen daher blos alle reellen Untergruppen von [7] zu bestimmen.

Da jede reelle Untergruppe von [7] augenscheinlich die ∞^1 reellen Geraden: $x =$ const. entweder null- oder ein- oder zweigliedrig transformirt, so können wir diese Untergruppen genau in derselben Weise bestimmen, wie das in § 25, S. 97 ff. unter Benutzung der Ergebnisse des § 20, S. 81 ff. durchgeführt ist. Dass wir uns jetzt auf reelle Gruppen beschränken, macht dabei gar keinen Unterschied, da wir damals nur solche endliche Transformationen der Gruppe [7] benutzt haben, die reell sind, wenn die betrachtete Untergruppe von [7] reell ist*). Hieraus folgt, dass jede reelle Untergruppe der Gruppe [7] durch eine reelle Transformation dieser Gruppe auf eine der Formen: [8] ... [39] (s. S. 97 ff.) gebracht werden kann. Die Untersuchungen des § 26, S. 103 ff. zeigen endlich, welche unter den gefundenen Gruppen innerhalb der reellen allgemeinen projectiven Gruppe gleichberechtigt sind. Man überzeugt sich auf diese Weise, dass in der Tabelle auf S. 106 f. alle reellen projectiven Gruppen, die ein reelles Linienelement invariant lassen, repräsentirt sind.

Gehört endlich g_r unsrer dritten Klasse an, so lässt G_r entweder eine reelle Gerade und auf ihr zwei conjugirt imaginäre Punkte invariant oder einen reellen Punkt und zwei hindurchgehende conjugirt imaginäre Gerade. Im ersten Falle verlegen wir die beiden invarianten Punkte durch eine reelle projective Transformation in die imaginären Kreispunkte, dann wird g_r eine reelle Untergruppe der viergliedrigen reellen Gruppe:

(27) $$\boxed{p,\ q,\ yp - xq,\ xp + yq}\ .$$

Im zweiten Falle führen wir die beiden invarianten Geraden in die beiden: $x + iy = 0$, $x - iy = 0$ über und damit g_r in eine reelle Untergruppe der viergliedrigen reellen Gruppe:

(28) $$\boxed{yp - xq,\ xp + yq,\ x^2p + xyq,\ xyp + y^2q}\ ,$$

die offenbar mit der Gruppe (27) gleichzusammengesetzt und dualistisch

*) Eine Ausnahme hiervon findet nur auf S. 82 statt, dort kann nämlich die infinitesimale Transformation: $p + (\alpha' x + \beta' y + \gamma')\, q$ durch *reelle* Transformationen von der benutzten Form nur auf eine der vier Formen: $p_1 + y_1 q_1$; $p_1 + x_1 q_1$; $p_1 - x_1 q_1$; p_1 gebracht werden; augenscheinlich geht aber: $p_1 - x_1 q_1$ in: $p_2 + x_2 q_2$ über, wenn man die reelle endliche Transformation: $x_2 = x_1$, $y_2 = -y_1$ der Gruppe [7] anwendet.

ist. Wir brauchen jedoch nur solche Untergruppen dieser beiden Gruppen zu berücksichtigen, die kein reelles Linienelement stehen lassen.

Enthält eine reelle Untergruppe von (27) keine infinitesimale Translation, so hat sie eine der drei Formen:

$$yp - xq + \alpha p + \beta q,\quad xp + yq + \lambda p + \mu q$$
$$yp - xq + c(xp + yq) + \alpha p + \beta q,$$
$$xp + yq + \alpha p + \beta q.$$

Von diesen Formen braucht die dritte nicht berücksichtigt zu werden, da bei ihr unendlich viele reelle Linienelemente invariant bleiben. In den beiden ersten Fällen kann man durch eine reelle Transformation:

$$x_1 = x + a,\quad y_1 = y + b$$

stets die beiden Formen:

(29) $$\boxed{yp - xq,\ xp + yq} \qquad \boxed{yp - xq + c(xp + yq)}$$

erreichen, wo die reelle Constante c wegen der Vertauschbarkeit von x und y auf die Werthe: $c \gtrless 0$ beschränkt werden kann.

Enthielte eine reelle Untergruppe γ von (27) blos eine infinitesimale reelle Translation: $\alpha p + \beta q$, so erzeugte die eine eingliedrige invariante Untergruppe von γ, γ hätte daher, wie man sofort sieht, eine der beiden Formen:

$$\alpha p + \beta q;\ \alpha p + \beta q,\ xp + yq + \lambda p + \mu q$$

und liesse daher unendlich viele reelle Linienelemente in Ruhe.

Enthält endlich eine reelle Untergruppe von (27), die kein reelles Linienelement stehen lässt, p und q beide, so hat sie die Form:

(30) $$\boxed{p,\ q,\ yp - xq + c(xp + yq)},$$

wo $c \gtrless 0$ angenommen werden kann.

In ähnlicher Weise erkennt man, dass jede reelle Untergruppe von (28), die kein reelles Linienelement invariant lässt, durch eine reelle projective Transformation auf eine der Formen (29) und:

(31) $$\boxed{yp - xq + c(xp + yq),\ x^2p + xyq,\ xyp + y^2q}$$

gebracht werden kann.

Damit sind nunmehr alle reellen projectiven Gruppen der Ebene bestimmt. Da die zweite der Gruppen (26), S. 381 offenbar durch eine reelle projective Transformation mit der Gruppe:

$$p + xq,\ xp + 2yq,\ (x^2 - y)p + xyq$$

des reellen Kegelschnitts: $y - \frac{1}{2}x^2 = 0$ ähnlich ist, so ergiebt sich, dass man zu den Gruppen auf S. 106 f. nur noch die Gruppen:

$$(32)' \quad \left\{ \begin{array}{c} \boxed{p + x^2 p + xyq,\ q + xyp + y^2 q,\ yp - xq} \\ \boxed{p,\ q,\ yp - xq,\ xp + yq} \sim \boxed{x^2 p + xyq,\ xyp + y^2 q,\ yp - xq,\ xp + yq} \\ \boxed{p,\ q,\ yp - xq + c(xp + yq)\ (c \gtrless 0)} \sim \boxed{x^2 p + xyq,\ xyp + y^2 q,\ yp - xq - c(xp + yq)\ (c \gtrless 0)} \\ \boxed{yp - xq,\ xp + yq} \quad \boxed{yp - xq + c(xp + yq)\ (c \gtrless 0)} \end{array} \right.$$

hinzuzufügen braucht, um auch für jeden Typus von reellen projectiven Gruppen der Ebene einen und nur einen Repräsentanten zu haben. Erwähnt sei noch, dass alle Gruppen, die hier oder auf S. 106 f. als zu einander dualistisch bezeichnet sind, es durch eine *reelle* dualistische Transformation sind.

Ebenso wie wir alle reellen Gruppen von Punkttransformationen der Ebene bestimmt haben, kann man natürlich auch alle reellen endlichen Berührungstransformationsgruppen der Ebene aufsuchen. Wir wollen die Bestimmung dieser Gruppen nicht durchführen, wir beschränken uns vielmehr auf einige Bemerkungen über die irreducibeln unter diesen Gruppen.

Eine reelle Gruppe G von Berührungstransformationen der Ebene ist irreducibel, wenn sie keine reelle Schaar von ∞^2 Curven invariant lässt. Ist nun G auch als Gruppe von complexen Berührungstransformationen irreducibel, lässt es also auch keine imaginäre Schaar von ∞^2 Curven invariant, so ist es, wie man sich leicht überzeugt, entweder zehn- oder sieben- oder sechsgliedrig und durch eine reelle Berührungstransformation mit einer der drei Gruppen ähnlich, die in Abschn. II auf S. 432, 425 und 419 angegeben sind. Ist andrerseits G als Gruppe von complexen Berührungstransformationen reducibel, so lässt es zwei conjugirt imaginäre Schaaren von je ∞^2 Curven invariant und kann, wie Engel bemerkt hat, durch eine reelle Berührungstransformation auf eine solche Form gebracht werden, dass diese beiden invarianten Curvenschaaren durch die gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 1 = 0$$

definirt werden. G ist in diesem Falle durch eine imaginäre Berührungstransformation entweder mit der allgemeinen projectiven Gruppe der Ebene ähnlich oder mit gewissen Untergruppen dieser Gruppe.

Endlich noch ein paar Worte über die reellen Gruppen von Euklidischen Bewegungen im gewöhnlichen Raume.

Alle diese Gruppen sind reelle Untergruppen der Gruppe:

$$(33) \qquad \boxed{p,\ q,\ r,\ xq - yp,\ yr - zq,\ zp - xr}$$

ihre Bestimmung kann nach der in Kapitel 11 auseinandergesetzten Methode durchgeführt werden. Da nun die Gruppe:

$$xq - yp,\ yr - zq,\ zp - xr$$

augenscheinlich keine reellen zweigliedrigen Untergruppen enthält, so findet man ohne Schwierigkeit, dass jede solche Gruppe, die nicht mit der Gruppe (33) zusammenfällt, durch eine reelle Transformation der Gruppe (33) auf eine der Formen:

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{ccc} \boxed{xq - yp,\ yr - zq,\ zp - xr} & & \boxed{xq - yp,\ p,\ q,\ r} \\ \boxed{xq - yp + cr} & \boxed{xq - yp,\ r} & \boxed{xq - yp + cr,\ p,\ q} \\ \boxed{p} & \boxed{p,\ q} & \boxed{p,\ q,\ r} \end{array} \right.$$

gebracht werden kann*). Hier bedeutet c natürlich einen reellen Parameter.

§ 84.

Reelle Gruppen des R_n mit einer reellen invarianten Gleichung: $\sum f_{kv}(x_1 \ldots x_n)\, dx_k\, dx_v = 0$.

Wir nehmen jetzt das Problem des Kapitels 17 wieder auf, aber indem wir uns auf reelle Gruppen beschränken. Wir suchen also alle *reellen* Gruppen in den n *reellen* Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$, bei denen eine *reelle* Gleichung von der Form:

$$(35) \qquad \sum_{k,\,v}^{1\ldots n} f_{kv}(x_1 \ldots x_n)\, dx_k\, dx_v = 0$$

*) Die reellen Gruppen von Bewegungen hat zuerst C. Jordan aufgestellt, (1868 in den Annali di Matematica), die nichtreellen kommen bei ihm nicht vor.

mit nicht verschwindender Determinante invariant bleibt und bei denen die ∞^{n-1} *reellen* Linienelemente: $dx_1 \ldots dx_n$ durch jeden festgehaltenen *reellen* Punkt von allgemeiner Lage in möglichst allgemeiner Weise transformirt werden. *Die Zahl n setzen wir dabei zunächst grösser als 2 voraus.*

Gäbe es unter den gesuchten Gruppen eine intransitive, so zerfiele der Raum bei dieser Gruppe in ∞^q reelle $(n-q)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten, die sämmtlich invariant blieben und wo q einen der Werthe $1, 2 \ldots n-1$ hätte; dann aber bliebe mit jedem festgehaltenen reellen Punkte von allgemeiner Lage zugleich ein ebenes Bündel von ∞^{n-q-1} hindurchgehenden reellen Linienelementen invariant, die reellen Linienelemente durch den festgehaltenen Punkt würden also sicher nicht in so allgemeiner Weise transformirt, wie es mit der Invarianz der Gleichung (35) verträglich ist. Demnach sind die gesuchten Gruppen alle transitiv. Auf Grund des Theorems 33, S. 366 können wir uns daher von vornherein auf solche Gruppen beschränken, in deren Transformationsgleichungen nur analytische Functionen auftreten.

Es sei nun $x_1^0 \ldots x_n^0$ ein reeller Punkt von allgemeiner Lage. Durch eine reelle Translation können wir dann zunächst diesen Punkt in den Coordinatenanfang verlegen, wir dürfen also ohne Weiteres: $x_1^0 = \cdots = x_n^0 = 0$ annehmen. Ferner können wir, wie sich aus der bekannten Theorie der reellen quadratischen Formen ergiebt, durch eine reelle lineare homogene Transformation in den x stets erreichen, dass die Gleichung:

$$\sum_{k,\nu}^{1 \ldots n} f_{k\nu}(0 \ldots 0)\, dx_k\, dx_\nu = 0$$

die einfache Form:

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_m^2 - (dx_{m+1}^2 + \cdots + dx_n^2) = 0 \tag{36}$$

erhält, wo die positive ganze Zahl m der Bedingung: $\frac{1}{2}n \leqq m \leqq n$ genügt.

Nunmehr ergiebt sich, da $n > 2$ sein soll, in derselben Weise wie auf S. 316 ff., dass jede Gruppe von der verlangten Beschaffenheit in der Umgebung des Punktes: $x_1 = \cdots = x_n = 0$ von allgemeiner Lage die folgenden infinitesimalen Transformationen enthält:

Erstens n reelle infinitesimale Transformationen:

$$p_1 + \cdots, \quad \cdots, \quad p_n + \cdots \tag{37}$$

von nullter Ordnung in den x.

Zweitens entweder $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ oder $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + 1$ unabhängige reelle

infinitesimale Transformationen erster Ordnung, aus denen sich keine Transformation von zweiter oder höherer Ordnung linear ableiten lässt. Im ersten Falle haben diese Transformationen die Form:

$$(38)\qquad \begin{cases} x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + \cdots, \quad x_\mu p_{m+k} + x_{m+k} p_\mu + \cdots \\ x_{m+k} p_{m+j} - x_{m+j} p_{m+k} + \cdots \\ (\mu, \nu = 1 \ldots m;\ k, j = 1 \ldots n-m), \end{cases}$$

im zweiten kommt zu den eben geschriebenen noch eine reelle Transformation von der Form:

$$(39)\qquad \sum_1^n{}_\nu x_\nu p_\nu + \cdots$$

hinzu.

Infinitesimale Transformationen von höherer Ordnung treten entweder gar nicht auf, oder es kommen n solche von zweiter Ordnung vor, nämlich:

$$(40)\qquad \begin{cases} 2 x_\mu \sum_1^n{}_\tau x_\tau p_\tau - \Big(\sum_1^m{}_\nu x_\nu^2 - \sum_1^{n-m}{}_k x_{m+k}^2 \Big) p_\mu + \cdots \\ 2 x_{m+j} \sum_1^n{}_\tau x_\tau p_\tau + \Big(\sum_1^m{}_\nu x_\nu^2 - \sum_1^{n-m}{}_k x_{m+k}^2 \Big) p_{m+k} + \cdots \\ (\mu = 1 \ldots m;\ j = 1 \ldots n-m). \end{cases}$$

Diese Transformationen, die natürlich reell sein müssen, können jedoch nur dann auftreten, wenn eine Transformation von der Form (39) vorhanden ist. Infinitesimale Transformationen von dritter und höherer Ordnung sind ausgeschlossen.

Enthält daher eine Gruppe von der verlangten Beschaffenheit eine Transformation von der Form (39), so sind nur zwei Fälle denkbar: entweder ist sie von $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} + 1$ infinitesimalen Transformationen von der Form: (37), (38), (39) erzeugt oder von $\frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2}$ Transformationen von der Form (37) . . . (40). Im ersten Falle erkennt man durch Verbindung des auf S. 364 f. Gesagten mit den Entwicklungen in Abschn. I, S. 616—618, dass die Gruppe durch eine reelle Punkttransformation des R_n mit der Gruppe:

$$(41)\qquad \boxed{\begin{array}{c} p_1 \cdots p_n,\ x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n,\ x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu \\ x_\mu p_{m+k} + x_{m+k} p_\mu,\ x_{m+k} p_{m+j} - x_{m+j} p_{m+k} \\ (\mu, \nu = 1 \ldots m;\ k, j = 1 \ldots n-m) \end{array}}$$

ähnlich ist. Im zweiten Falle ergiebt sich ebenso, dass die Gruppe durch eine reelle Punkttransformation die Form:

(42)
$$\begin{gathered}
p_1 \dots p_n, \quad U, \quad x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu \\
x_\mu p_{m+k} + x_{m+k} p_\mu, \quad x_{m+k} p_{m+j} - x_{m+j} p_{m+k} \\
2 x_\mu U - \Big(\sum_1^m{}_\tau \, x_\tau^2 - \sum_1^{n-m}{}_s \, x_{m+s}^2 \Big) p_\mu \\
2 x_{m+k} U + \Big(\sum_1^m{}_\tau \, x_\tau^2 - \sum_1^{n-m}{}_s \, x_{m+s}^2 \Big) p_{m+k} \\
(\mu, \nu = 1 \dots m; \; k, j = 1 \dots n-m)
\end{gathered}$$

erhalten kann, wo zur Abkürzung: $x_1 p_1 + \dots + x_n p_n = U$ gesetzt ist.

Jetzt fehlen nur noch die reellen Gruppen des R_n, die von $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$ unabhängigen infinitesimalen Transformationen von der Form (37), (38) erzeugt sind.

Es sei g eine solche Gruppe und G sei die nach S. 362 zu ihr gehörige Gruppe von complexen Transformationen. Denken wir uns in G an Stelle von $x_1 \dots x_n$ die neuen Veränderlichen:

$$x_1' = x_1, \dots, x_m' = x_m, \quad x_{m+1}' = i x_{m+1}, \dots, \quad x_n' = i x_n$$

eingeführt, so erhalten wir eine Gruppe, die von $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$ infinitesimalen Transformationen von der Form:

$$p_\mu' + \dots, \quad x_\mu' p_\nu' - x_\nu' p_\mu' + \dots \quad (\mu, \nu = 1 \dots n)$$

erzeugt ist und die nach S. 333 durch eine Punkttransformation von der Gestalt:

$$\mathfrak{x}_1 = x_1' + \dots, \quad \dots, \quad \mathfrak{x}_n = x_n' + \dots$$

entweder in die Gruppe:

(43)
$$\mathfrak{p}_\mu, \quad \mathfrak{x}_\mu \mathfrak{p}_\nu - \mathfrak{x}_\nu \mathfrak{p}_\mu \quad (\mu, \nu = 1 \dots n)$$

aller Euklidischen Bewegungen übergeführt werden kann oder in die projective Gruppe:

(44)
$$\mathfrak{p}_\mu - \mathfrak{x}_\mu \mathfrak{U}, \quad \mathfrak{x}_\mu \mathfrak{p}_\nu - \mathfrak{x}_\nu \mathfrak{p}_\mu \quad (\mu, \nu = 1 \dots n)$$

der Mannigfaltigkeit zweiten Grades: $\mathfrak{x}_1^2 + \dots + \mathfrak{x}_n^2 - 1 = 0$. Wir können daher schliessen, dass G jedenfalls durch eine reelle oder imaginäre Punkttransformation mit einer der beiden Gruppen (43), (44) ähnlich ist und zwar durch eine Punkttransformation, die sich in der Umgebung des Coordinatenanfangs regulär verhält.

Zuerst betrachten wir den Fall, dass G mit der Gruppe (43) ähnlich ist.

Von der Gruppe (43) der Euklidischen Bewegungen wissen wir (s. S. 357), dass sie nur *eine* n-gliedrige invariante Untergruppe mit

paarweise vertauschbaren infinitesimalen Transformationen enthält, nämlich die Gruppe: $\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_n$ aller Translationen. Für die mit ihr ähnliche Gruppe G gilt natürlich entsprechendes, auch sie kann nur *eine* n-gliedrige invariante Untergruppe enthalten, deren Transformationen paarweise vertauschbar sind. Diese invariante Untergruppe γ von G muss nach S. 363 f. n unabhängige *reelle* infinitesimale Transformationen enthalten, die, wie man sich leicht überzeugt, sämmtlich von nullter Ordnung in $x_1 \ldots x_n$ sind und daher die Form:

$$p_1 + \cdots, \quad \cdots, \quad p_n + \cdots$$

haben. Auf Grund von S. 364 f. können wir daher schliessen, dass γ durch eine reelle Punkttransformation von der Form:

$$\overline{x}_r = x_r + \cdots \qquad (r = 1 \ldots n)$$

mit der Gruppe: $\overline{p}_1 \ldots \overline{p}_n$ aller Translationen ähnlich ist. Führen wir diese Transformation auf G aus, so bekommt G die Gestalt:

$$(45) \quad \begin{cases} \overline{p}_1 \cdots \overline{p}_n, \ \overline{x}_\mu \overline{p}_\nu - \overline{x}_\nu \overline{p}_\mu + \cdots, \ \overline{x}_\mu \overline{p}_{m+k} + \overline{x}_{m+k} \overline{p}_\mu + \cdots \\ \qquad \overline{x}_{m+k} \overline{p}_{m+j} - \overline{x}_{m+j} \overline{p}_{m+k} + \cdots \\ \qquad (\mu, \nu = 1 \ldots m; \ k, j = 1 \ldots n - m) \end{cases}$$

und in dieser neuen Gruppe muss selbstverständlich: $\overline{p}_1 \ldots \overline{p}_n$ eine invariante Untergruppe sein. Hieraus folgt sofort, dass in den infinitesimalen Transformationen (45) die weggelassenen Glieder zweiter und höherer Ordnung verschwinden.

Wenn also die Gruppe G durch eine reelle oder imaginäre Punkttransformation mit der Gruppe (43) der Euklidischen Bewegungen ähnlich ist, so ist sie durch eine reelle Punkttransformation mit der Gruppe:

$$(46) \quad \begin{array}{l} p_1 \cdots p_n, \ x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \ x_\mu p_{m+k} + x_{m+k} p_\mu \\ \qquad x_{m+k} p_{m+j} - x_{m+j} p_{m+k} \\ \qquad (\mu, \nu = 1 \ldots m; \ k, j = 1 \ldots n - m) \end{array}$$

ähnlich. Dasselbe gilt natürlich von der reellen Gruppe g, zu der G gehört.

Es sei zweitens G durch eine reelle oder imaginäre Punkttransformation mit der Gruppe (44) ähnlich.

Die Gruppe (44) steckt nach S. 359, Satz 1 nur in einer einzigen endlichen continuirlichen Gruppe, bei der die ∞^{n-1} Linienelemente durch jeden festgehaltenen Punkt von allgemeiner Lage in allgemeinster Weise, das heisst $(n^2 - 1)$-gliedrig transformirt werden, nämlich nur in der $n(n+2)$-gliedrigen allgemeinen projectiven Gruppe:

$$(47) \qquad \mathfrak{p}_\mu, \ \mathfrak{x}_\mu \mathfrak{p}_\nu, \ \mathfrak{x}_\mu \mathfrak{U} \qquad (\mu, \nu = 1 \ldots n)$$

des Raumes $\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_n$. Die Gruppe G, die mit der Gruppe (44) durch eine in der Umgebung des Coordinatenanfangs reguläre Punkttransformation ähnlich ist, kann daher jedenfalls nur in einer einzigen endlichen continuirlichen Gruppe Γ stecken, bei der die Linienelemente durch den Coordinatenanfang, sobald dieser festgehalten wird, in allgemeinster Weise transformirt werden. Diese Gruppe Γ ist $n(n+2)$-gliedrig und enthält, da sie einzig in ihrer Art ist, $n(n+2)$ unabhängige *reelle* infinitesimale Transformationen, die nach Abschn. I, Kap. 29 die Form haben:

$$p_\mu + \cdots, \quad x_\mu p_\nu + \cdots, \quad x_\mu \sum_1^n{}_\tau x_\tau p_\tau + \cdots$$
$$(\mu, \nu = 1 \ldots n).$$

Hieraus folgt zunächst, dass Γ durch eine reelle Transformation von der Gestalt:

$$\mathfrak{x}_1 = x_1 + \cdots, \quad \mathfrak{x}_n = x_n + \cdots$$

mit der Gruppe (47) ähnlich ist (vgl. S. 364 f.). Zu gleicher Zeit ergiebt sich aber, dass bei dieser Transformation die Gruppe G in eine *projective* Gruppe von der Form:

$$(48) \qquad \begin{cases} \mathfrak{p}_1 + \cdots, \ \cdots, \ \mathfrak{p}_n + \cdots \\ \mathfrak{x}_\mu \mathfrak{p}_\nu - \mathfrak{x}_\nu \mathfrak{p}_\mu + \cdots, \ \mathfrak{x}_\mu \mathfrak{p}_{m+k} + \mathfrak{x}_{m+k} \mathfrak{p}_\mu + \cdots \\ \mathfrak{x}_{m+k} \mathfrak{p}_{m+j} - \mathfrak{x}_{m+j} \mathfrak{p}_{m+k} + \cdots \\ (\mu, \nu = 1 \ldots m; \ k, j = 1 \ldots n-m) \end{cases}$$

übergeht, deren infinitesimale Transformationen sämmtlich reell sind.

Da die Gruppe (48) projectiv und mit der Gruppe (44) ähnlich ist, so ist sie nach Theor. 19, S. 292 selbst die projective Gruppe einer nicht ausgearteten Mannigfaltigkeit zweiten Grades. Die Gleichung dieser Mannigfaltigkeit ist in unserm Falle offenbar reell, demnach ist auch die zum Coordinatenanfang gehörige $(n-1)$-fach ausgedehnte Polarebene reell. Da überdies der Coordinatenanfang ein Punkt von allgemeiner Lage ist und also nicht auf seiner Polarebene liegt, so können wir seine Polarebene durch eine reelle projective Transformation von der Gestalt: $\mathfrak{x}_\nu' = \mathfrak{x}_\nu + \cdots$ ins Unendliche verlegen. Die Gruppe (48) wird dabei die einfache Form:

$$(48') \qquad \begin{cases} \mathfrak{p}_1 + \cdots, \ \cdots, \ \mathfrak{p}_n + \cdots \\ \mathfrak{x}_\mu \mathfrak{p}_\nu - \mathfrak{x}_\nu \mathfrak{p}_\mu, \quad \mathfrak{x}_\mu \mathfrak{p}_{m+k} + \mathfrak{x}_{m+k} \mathfrak{p}_\mu \\ \mathfrak{x}_{m+k} \mathfrak{p}_{m+j} - \mathfrak{x}_{m+j} \mathfrak{p}_{m+k} \\ (\mu, \nu = 1 \ldots m; \ k, j = 1 \ldots n-m) \end{cases}$$

annehmen. Nun aber sind die ∞^1 Mannigfaltigkeiten:

$$\mathfrak{x}_1^2 + \cdots + \mathfrak{x}_m^2 - (\mathfrak{x}_{m+1}^2 + \cdots + \mathfrak{x}_n^2) = \frac{1}{a}$$

offenbar die einzigen nicht ausgearteten Mannigfaltigkeiten zweiten Grades, die bei den $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ infinitesimalen Transformationen:

$$\mathfrak{x}_\mu \mathfrak{p}_\nu - \mathfrak{x}_\nu \mathfrak{p}_\mu, \quad \mathfrak{x}_\mu \mathfrak{p}_{m+k} + \mathfrak{x}_{m+k} \mathfrak{p}_\mu$$
$$\mathfrak{x}_{m+k} \mathfrak{p}_{m+j} - \mathfrak{x}_{m+j} \mathfrak{p}_{m+k}$$

invariant bleiben. Die infinitesimalen Transformationen nullter Ordnung unter den Transformationen (48′) können daher auf die Form:

$$\mathfrak{p}_\mu - a \mathfrak{x}_\mu \mathfrak{U}, \quad \mathfrak{p}_{m+k} + a \mathfrak{x}_{m+k} \mathfrak{U}$$
$$(\mu = 1 \ldots m; \quad k = 1 \ldots n-m),$$

gebracht werden, wo a eine reelle, von Null verschiedene Constante sein muss. Durch eine reelle projective Transformation kann man schliesslich a entweder gleich -1 oder gleich $+1$ machen.

Wenn also G durch eine reelle oder imaginäre Punkttransformation mit der Gruppe (44) ähnlich ist, so giebt es stets eine reelle Punkttransformation, bei der G und somit auch g entweder die Form:

$$\begin{gathered} p_\mu + x_\mu U, \quad p_{m+k} - x_{m+k} U, \quad x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu \\ x_\mu p_{m+k} + x_{m+k} p_\mu, \quad x_{m+k} p_{m+j} - x_{m+j} p_{m+k} \\ (\mu, \nu = 1 \ldots m; \quad k, j = 1 \ldots n-m) \end{gathered} \tag{49}$$

oder die Form:

$$\begin{gathered} p_\mu - x_\mu U, \quad p_{m+k} + x_{m+k} U, \quad x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu \\ x_\mu p_{m+k} + x_{m+k} p_\mu, \quad x_{m+k} p_{m+j} - x_{m+j} p_{m+k} \\ (\mu, \nu = 1 \ldots m; \quad k, j = 1 \ldots n-m) \end{gathered} \tag{50}$$

erhält. Ist insbesondre $n = 2m$, so sind offenbar diese beiden Formen durch die reelle projective Transformation:

$$x_\mu' = x_{m+\mu}, \quad x_{m+\mu}' = x_\mu \quad (\mu = 1 \ldots m)$$

mit einander ähnlich.

Hiermit sind auch alle reellen Gruppen von der Form (37), (38) gefunden und die Aufgabe, die wir uns gestellt hatten, ist erledigt. Wir erhalten das

Theorem 35. *Lässt eine reelle continuirliche Gruppe in $n > 2$ reellen Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$ eine reelle Gleichung:*

$$\sum_{k\nu}^{1 \ldots n} f_{k\nu}(x_1 \ldots x_n)\, dx_k dx_\nu = 0$$

mit nicht identisch verschwindender Determinante invariant und ist sie ausserdem so beschaffen, dass die ∞^{n-1} reellen

Linienelemente durch jeden festgehaltnen Punkt von allgemeiner Lage in möglichst allgemeiner Weise transformirt werden, so hat sie entweder $\frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2}$ *oder* $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} + 1$ *oder* $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$ *Parameter. Im ersten Falle ist sie durch eine reelle Punkttransformation des* R_n *ähnlich mit einer Gruppe von der Form* (42), *S.* 388, *wo* m *eine der ganzen Zahlen ist, die der Bedingung:* $\frac{1}{2}n \leqq m \leqq n$ *genügen. Im zweiten Falle ist sie durch eine reelle Punkttransformation ähnlich mit einer Gruppe von der Form* (41). *Im dritten Falle kann sie durch eine reelle Punkttransformation entweder in eine Gruppe von der Form* (46), *S.* 389 *übergeführt werden, oder in die reelle projective Gruppe einer solchen nicht ausgearteten Mannigfaltigkeit zweiten Grades, die durch eine reelle Gleichung zwischen* $x_1 \ldots x_n$ *dargestellt wird.*

Was endlich den Fall $n = 2$ angeht, so können wir uns sehr kurz fassen.

Lässt eine reelle Gruppe der Ebene eine reelle Gleichung:

$$\alpha(x, y)\,dx^2 + 2\beta(x, y)\,dx\,dy + \gamma(x, y)\,dy^2 = 0$$

mit nicht identisch verschwindender Determinante: $\beta^2 - \alpha\gamma$ invariant, so kann man zunächst durch eine reelle Punkttransformation erreichen, dass die Gleichung eine der beiden Formen:

$$dx^2 + dy^2 = 0, \quad dx\,dy = 0$$

erhält. Ausserdem ist noch die Forderung hinzuzufügen, dass die ∞^1 reellen Linienelemente durch jeden festgehaltenen reellen Punkt von allgemeiner Lage in möglichst allgemeiner Weise, also eingliedrig transformirt werden. Die verschiedenen Formen, auf die eine derartige Gruppe gebracht werden kann, falls sie endlich ist, ergeben sich sofort, wenn man die Entwicklungen der SS. 370—380 benutzt.

Abtheilung V.

Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie.

Von einer Anzahl einfacher Grundbegriffe und Axiome ausgehend hat Euklid die Geometrie rein geometrisch entwickelt, ohne analytische Hülfsmittel zu benutzen. So bewunderungswürdig sein Lehrgebäude auch ist, so lässt es doch, wenn man die darin benutzten Grundlagen ins Auge fasst, noch einiges zu wünschen übrig.

Erstens nämlich übersieht man nicht, ob das System der Euklidischen Grundbegriffe und Axiome wirklich vollständig ist, auch ist es jetzt wohl allgemein anerkannt, dass Euklid im Laufe der Entwicklung stillschweigend Voraussetzungen eingeführt hat, die als Axiome hätten formulirt werden müssen. Zum Beispiel beruht die Einführung des Begriffs Flächenraum bei Euklid auf einem wirklichen Axiome, das von ihm nicht aufgestellt ist.

Zweitens aber ist es denkbar, dass gewisse unter den Euklidischen Axiomen überflüssig sind, das heisst, dass sie auf Grund der früheren Definitionen und Axiome bewiesen werden können.

Im Grunde ist es *zunächst* viel wichtiger, sich darüber Gewissheit zu verschaffen, ob man ein vollständig ausreichendes System von Grundbegriffen und Axiomen besitzt, als nach etwaigen überflüssigen Axiomen zu fragen. Trotzdem harrt die Frage, inwieweit das Euklidische System von Axiomen vervollständigt werden muss, noch immer der endgültigen Erledigung. Um so eifriger hat man sich mit der zweiten Frage beschäftigt, sind doch die neueren Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie eigentlich nur durch die Frage nach der Beweisbarkeit oder Unbeweisbarkeit des elften Euklidischen Axioms, des Parallelenaxioms veranlasst worden.

Nachdem mehrere Mathematiker, namentlich Legendre, zahlreiche vergebliche Versuche gemacht hatten, das Parallelenaxiom zu beweisen, gelang es zuerst Lobatschewski (1829) und kurz darauf Bolyay (1832) die Unbeweisbarkeit des Axioms indirect darzuthun,

sie zeigten nämlich, dass sich eine Geometrie aufbauen lässt, in der das Parallelenaxiom gar nicht benutzt wird. Aus älteren Briefen von Gauss, die freilich erst viel später veröffentlicht worden sind, geht hervor, dass Gauss schon lange vorher zu ähnlichen Ergebnissen gelangt war.

Heute muss man sich eigentlich wundern, dass die Mathematiker erst auf diesem Umwege über die Nothwendigkeit des Parallelenaxioms aufgeklärt werden mussten, während doch ein einziger Blick auf die Kugeloberfläche ihnen hätte zeigen können, dass auch ohne das Parallelenaxiom eine widerspruchsfreie Geometrie möglich ist, die jedenfalls innerhalb eines passend gewählten Bereichs die vorhergehenden Axiome Euklids erfüllt.

Lobatschewski und Bolyay hatten ihre Geometrie ganz in der Weise Euklids entwickelt, also rein geometrisch. Riemann war der erste, der analytische Hülfsmittel anwendete, um über die Grundlagen der Geometrie Aufschluss zu gewinnen. Leider besitzen wir von seiner Hand keine ausführliche Darstellung seiner Untersuchungen, sondern wir sind auf die sehr knappen und darum oft schwer verständlichen Auseinandersetzungen in seiner 1854 gehaltenen Habilitationsrede*) angewiesen.

Riemann stellt an die Spitze seiner Untersuchung den Satz, dass der Raum eine Zahlenmannigfaltigkeit sei, dass also die Punkte des Raumes durch Coordinaten bestimmt werden können. Sodann fragt er, welche Eigenschaften dieser Zahlenmannigfaltigkeit zugeschrieben werden müssen, damit in ihr die Euklidische oder eine ähnliche Geometrie gelte. Die Beantwortung dieser Frage ist offenbar eine rein analytische Aufgabe, die für sich allein gelöst werden kann.

Allerdings tritt bei Riemann die wahre Bedeutung des Satzes, dass der Raum eine Zahlenmannigfaltigkeit sei, nicht hervor. Riemann sucht diesen Satz zu beweisen, aber sein Beweis kann nicht als stichhaltig gelten. Will man wirklich beweisen, dass der Raum eine Zahlenmannigfaltigkeit ist, so muss man vorher unzweifelhaft eine nicht geringe Anzahl von Axiomen aufstellen und dessen scheint sich Riemann nicht bewusst gewesen zu sein. Man muss dabei freilich auch bedenken, dass es Riemann darauf ankam, durch Einführung der Zahlenmannigfaltigkeit dem Problem eine rein analytische Fassung zu geben und dass die Voraussetzungen, unter denen die Einführung der Zahlenmannigfaltigkeit erst möglich ist, für ihn Nebensache waren. Dazu kommt, dass seine Abhandlung eine Probevorlesung

*) Abh. d. Gött. Akad. Bd. 13, 1867. Riemanns ges. Werke, 1. Aufl. S. 254 ff.

und nicht zum Drucke bestimmt war; wäre er dazu gekommen, sie selbst zu veröffentlichen, er hätte gewiss manches anders gemacht.

Uebrigens ist die Einführung der Zahlenmannigfaltigkeit in die Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie keineswegs eine Willkürlichkeit, sondern in der Natur der Sache begründet. Beim Aufbau der Geometrie sind nämlich verschiedene Stufen zu unterscheiden. Eine Stufe ist vom Parallelenaxiome sowie von den Begriffen Flächeninhalt und irrationale Zahl unabhängig. Es giebt aber auch höhere Stufen, u. A. eine, wo sich der Begriff der irrationalen Zahl nicht vermeiden lässt und wo es als Axiom eingeführt werden muss, dass jedenfalls die Gerade eine Zahlenmannigfaltigkeit sei. Hr. G. Cantor ist der Erste, der auf die Nothwendigkeit hingewiesen hat, ein Axiom dieser Art einzuführen, wenn man das Gebäude der Geometrie zum Abschluss bringen will.

Die Geometrie der Zahlenmannigfaltigkeit begründet Riemann auf den Begriff des Bogenelements, aus dem sich durch Integration der Begriff der Länge einer endlichen Linie ergiebt. Er verlangt, dass das Quadrat des Bogenelements eine ganze homogene Function zweiten Grades von den Differentialen der Coordinaten sei; indem er u. A. noch die Forderung hinzufügt, dass sich jede Linie beliebig ohne Aenderung ihrer Länge bewegen könne, gelangt er zu dem Ergebniss, dass ausser der Euklidischen Geometrie noch zwei andre Geometrien möglich seien. Von diesen fällt die eine mit der von Lobatschewski aufgestellten zusammen, die andere entspricht der Geometrie auf der Kugeloberfläche.

Riemanns Untersuchungen über das Bogenelement, die allerdings von Riemann selbst nur skizzirt sind, haben vor allen Dingen vom Standpunkte der Analysis aus das grösste Interesse; sie sind u. A. wahrscheinlich die Veranlassung gewesen, dass später (von 1870 an) die Herren Lipschitz und Christoffel die Theorie der Differentialausdrücke zweiten Grades entwickelt haben, denn jedenfalls Herr Lipschitz verfolgte bei der Entwicklung seiner Theorie zugleich den Zweck, zu entscheiden, ob die von Riemann aufgestellten Behauptungen richtig wären. Dagegen kann man nicht leugnen, dass die Riemannschen Betrachtungen über den eigentlichen Gegenstand der Untersuchung, nämlich über die Grundlagen der Geometrie wenig Aufschluss geben. Riemanns Axiome beziehen sich nämlich alle auf das Bogenelement, also nur auf Eigenschaften des Raumes im Infinitesimalen; will man aus ihnen auf die Beschaffenheit des Raumes innerhalb eines endlichen Bereichs schliessen, so muss man erst eine Integration vornehmen. Da nun Axiome, die zu einem rein geometri-

schen Aufbau der Geometrie dienen sollen, elementar sein müssen und da weder Bogenelement noch Integration elementare Begriffe sind, so ist klar, dass die Riemannschen Axiome für einen solchen Zweck unbrauchbar sind.

Den eben besprochenen Mangel der Riemannschen Axiome hat Herr v. Helmholtz in seiner bekannten Arbeit*) aus dem Jahre 1868, wenn auch unbewusst, vermieden, indem er gewisse Axiome aufstellte, die sich auf endlich von einander entfernte Punkte bezogen, und versuchte, aus ihnen das Riemannsche Axiom über das Bogenelement abzuleiten.

Herr v. Helmholtz stellt es von vornherein ausdrücklich als Axiom auf, dass der Raum eine Zahlenmannigfaltigkeit sei; hierin liegt Riemann gegenüber ein Fortschritt, obwohl allerdings auch Herr v. Helmholtz die Tragweite dieses Axioms entschieden unterschätzt, wenn er am Schlusse seiner Arbeit (auf S. 221) behauptet, dass die von ihm aufgestellten Axiome „weniger annehmen, als die gewöhnlich geführten geometrischen Beweise voraussetzen." Diese Behauptung ist ganz sicher unrichtig, zumal da die übrigen Helmholtzschen Axiome gewisse überflüssige Voraussetzungen enthalten.

Ein weiterer Fortschritt im Vergleich mit Riemann besteht darin, dass Herr v. Helmholtz direct mit der Schaar der Bewegungen des Raumes operirt, indem er sie als eine Schaar von Transformationen der betreffenden Zahlenmannigfaltigkeit auffasst; er führt sogar *einmal* zwei solche Bewegungen nach einander aus und benutzt den Umstand, dass diese beiden Bewegungen zusammengenommen durch eine dritte Bewegung ersetzt werden können, er macht also gewissermassen von der Gruppeneigenschaft der Bewegungen Gebrauch, allerdings ohne den allgemeinen Gruppenbegriff zu kennen.

Wenn aber auch die Helmholtzsche Arbeit in ihren Voraussetzungen den älteren Untersuchungen Riemanns gegenüber einen gewissen Fortschritt bezeichnet, so darf man doch nicht übersehen, dass sie an mathematischem Werthe der Riemannschen nachsteht. Während es sich nämlich herausgestellt hat, dass die von Riemann skizzirte Methode wirklich zum Beweise der von ihm aufgestellten Sätze führt, werden wir später sehen, dass die analytischen Hülfsmittel, deren sich Herr v. Helmholtz bedient, nicht ausreichen, um zum Ziele zu gelangen, und dass Herr v. Helmholtz im Verlaufe seiner Untersuchung *eine Reihe von unrichtigen Voraussetzungen* einführt.

---

*) „Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen", Gött. Nachr. 1868, S. 193—221, s. auch seine ges. wiss. Abh. Bd. II, S. 618—639.

Fassen wir die bei Riemann und bei Herrn v. Helmholtz zu Grunde liegenden Gedanken zusammen, so können wir sagen, dass beide Forscher, wenn auch nur implicite, ein neues Problem aufgestellt haben, das wir als das Riemann-Helmholtzsche Problem*) bezeichnen wollen, und das kurz so ausgesprochen werden kann: *Es sollen solche Eigenschaften gefunden werden, die sowohl der Schaar der Euklidischen als den beiden Schaaren von Nichteuklidischen Bewegungen zukommen, und durch die diese drei Schaaren vor allen andern möglichen Schaaren von Bewegungen einer Zahlenmannigfaltigkeit ausgezeichnet sind.*

Als Lie im Jahre 1869 seine ersten Untersuchungen über continuirliche Gruppen seinem Freunde F. Klein mitgetheilt hatte, da lenkte Klein sehr bald Lies Aufmerksamkeit auf die Riemannschen und die Helmholtzschen Untersuchungen und hob hervor, dass darin implicite der Begriff der continuirlichen Gruppe eine Rolle spiele (vgl. Lies Abhandlung in den Math. Ann. Bd. 16, S. 527). Aber erst im Jahre 1884 unternahm es Lie auf wiederholte Aufforderungen von Klein hin, die Helmholtzschen Entwicklungen genau zu prüfen und eine eingehende gruppentheoretische Behandlung des Riemann-Helmholtzschen Problems im gewöhnlichen dreifach ausgedehnten Raume zu geben. Für Lie hatte das keine Schwierigkeit, da er damals schon längst alle endlichen continuirlichen Gruppen dieses Raumes bestimmt hatte. Die Ergebnisse dieser Untersuchung machte Lie zuerst 1886 in den Leipziger Berichten bekannt, ohne die zu ihrer Ableitung erforderlichen Rechnungen mitzutheilen. In zwei grösseren Abhandlungen aus dem Jahre 1890, ebenfalls in den Leipziger Berichten, gab er sodann nicht blos eine ausführliche Kritik der Helmholtzschen Entwicklungen, sondern auch, und das war der Hauptzweck dieser Arbeiten, mehrere neue Lösungen des Riemann-Helmholtzschen Problems.

Die folgenden Kapitel sind eine Umarbeitung und theilweise eine Ergänzung der erwähnten Abhandlungen, die Lie über den Gegenstand veröffentlicht hat.

Das Kapitel 20 enthält gewisse Theorien, die am besten für sich dargestellt werden, ehe man auf die Besprechung der Helmholtz-

*) Im Grunde rührt das Problem wohl eigentlich schon von Riemann her. Wir glauben jedoch, dass auch unsre Benennung des Problems ganz berechtigt ist, denn Herr v. Helmholtz hat zuerst erkannt, dass durch Riemanns Theorie das Problem noch nicht erledigt ist. Eine wirkliche Formulirung des Problems hat keiner von beiden gegeben.

schen Entwicklungen eingeht. Ein Theil der von Herrn v. Helmholtz aufgestellten Axiome lässt sich nämlich, wie wir sehen werden, so formuliren: Die Schaar der Bewegungen bildet eine Gruppe und bei dieser Gruppe haben zwei Punkte eine und nur eine Invariante und alle Invarianten von mehr als zwei Punkten lassen sich durch die Invarianten von Punktepaaren ausdrücken. Will man nun die Tragweite der Helmholtzschen Axiome prüfen, so ist es nöthig, von vornherein alle Gruppen zu kennen, die den eben aufgestellten Forderungen genügen, und da die schon an und für sich wichtige Aufgabe, diese Gruppen zu bestimmen, nicht ohne einigen Aufwand von Rechnung geleistet werden kann, so scheint es empfehlenswerth, diese Bestimmung besonders durchzuführen.

In Kapitel 21 wird eine ausführliche Kritik der Helmholtzschen Entwicklungen und Axiome gegeben und es werden dann in den Kapiteln 22 und 23 verschiedene Lösungen des Riemann-Helmholtzschen Problems im gewöhnlichen und im n-fach ausgedehnten Raume auseinandergesetzt. In Kapitel 24 endlich werden einige neuere Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie besprochen und kritisirt.

Wir können diese Vorbemerkungen nicht schliessen, ohne ausdrücklich zu betonen, dass die folgenden Untersuchungen nicht den Anspruch erheben, philosophische Speculationen über die Grundlagen der Geometrie zu sein, sie wollen nicht mehr sein, als eine sorgfältige gruppentheoretische Behandlung des gruppentheoretischen Problems, das wir als das Riemann-Helmholtzsche Problem bezeichnet haben. Am Schlusse der Abtheilung werden wir dann noch mit ein paar Worten auf den Nutzen zu sprechen kommen, den die Erledigung dieses Problems für den Aufbau eines Systems der Geometrie gewähren kann. Wenn wir auch hier keinen Versuch dazu machen, so wollen wir doch als unsere Ueberzeugung die Auffassung aussprechen, dass es keineswegs unmöglich ist, ein System von geometrischen Axiomen aufzustellen, das hinreichend ist und dabei nichts Ueberflüssiges enthält. Leider ist unzweifelhaft, dass es nur sehr wenige Untersuchungen giebt, welche das Problem der Grundlagen der Geometrie wirklich gefördert haben.

Kapitel 20.

Bestimmung aller Gruppen des R_3, bei denen zwei Punkte eine und nur eine, mehr als zwei Punkte dagegen keine wesentliche Invariante haben.

Die Entwicklungen des gegenwärtigen Kapitels knüpfen an den § 59 des Abschnitts I (S. 218 ff.) an. Wir haben damals den Begriff: „Invariante von mehreren Punkten" eingeführt, jetzt wollen wir alle endlichen continuirlichen Gruppen des R_3 bestimmen, die gewisse Forderungen in Bezug auf die Invarianten beliebig vieler Punkte erfüllen. Es sollen nämlich jeder solchen Gruppe gegenüber zwei Punkte eine und nur eine Invariante haben, dagegen sollen sich alle Invarianten von $s > 2$ Punkten stets durch die Invarianten der Punktepaare ausdrücken lassen, die unter diesen s Punkten enthalten sind. Bezeichnen wir daher in Uebereinstimmung mit Abschn. I, S. 219 eine Invariante von s Punkten dann als *wesentlich*, wenn sie sich nicht durch die Invarianten von Systemen von je $s - 1$ oder noch weniger Punkten ausdrücken lässt, so können wir, wie es schon in der Ueberschrift des Kapitels geschehen ist, unsre Aufgabe auch so fassen:

Es sollen alle endlichen continuirlichen Gruppen des R_3 bestimmt werden, bei denen zwei Punkte eine und nur eine Invariante haben, während mehr als zwei Punkte niemals eine wesentliche Invariante haben.

Wir werden diese Aufgabe zunächst ohne Rücksicht auf Realitätsverhältnisse lösen und also zunächst alle Gruppen von complexen Transformationen suchen, denen die angegebenen Eigenschaften zukommen, erst nachher lösen wir die Aufgabe auch für Gruppen von reellen Transformationen*).

Ueber die Gründe, die uns veranlasst haben, das gegenwärtige Kapitel vorauszuschicken, bevor wir zu den eigentlichen Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie übergehen, haben wir uns bereits auf S. 397 f. ausgesprochen.

§ 85.

Charakteristische Eigenschaften der gesuchten Gruppen.

Es sei:

$$X_k f = \xi_k(x, y, z)\, p + \eta_k(x, y, z)\, q + \zeta_k(x, y, z)\, r \qquad (k = 1 \ldots m).$$

*) Die Resultate, zu denen das gegenwärtige Kapitel führt, hat Lie bereits 1886 in den Leipziger Berichten, S. 337 ff. angedeutet; ausführliche Beweise hat er zuerst 1890 gegeben (ebd. S. 355–418). Das Folgende ist eine Umarbeitung der zuletztgenannten Abhandlung.

eine m-gliedrige Gruppe von der verlangten Beschaffenheit. Sind dann:

(1) $$x_1, y_1, z_1; \quad x_2, y_2, z_2; \ldots; x_s, y_s, z_s$$

irgend s beliebige Punkte des R_3 und setzen wir:

$$\xi_k(x_\nu, y_\nu, z_\nu)\, p_\nu + \eta_k(x_\nu, y_\nu, z_\nu)\, q_\nu + \zeta_k(x_\nu, y_\nu, z_\nu)\, r_\nu = X_k^{(\nu)} f,$$

so müssen erstens die r linearen partiellen Differentialgleichungen:

(2) $$X_k^{(1)} f + X_k^{(2)} f = 0 \quad (k = 1 \ldots m)$$

in den 6 Veränderlichen: $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ eine und nur eine Lösung:

(3) $$J(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2)$$

gemein haben und zweitens müssen sich, wenn $s > 2$ ist, alle gemeinsamen Lösungen der m Gleichungen:

(4) $$X_k^{(1)} f + X_k^{(2)} f + \cdots + X_k^{(s)} f = 0 \quad (k = 1 \ldots m)$$

in den $3s$ Veränderlichen x_k, y_k, z_k durch die $\frac{s(s-1)}{1 \cdot 2}$ Functionen:

(5) $$J(x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda; x_\mu, y_\mu, z_\mu) \quad (\lambda = 1 \ldots s-1;\ \mu = \lambda + 1, \ldots s)$$

ausdrücken lassen.

Vor allen Dingen ist zu bemerken, dass jede Gruppe von der verlangten Beschaffenheit transitiv sein muss. Wäre nämlich die Gruppe: $X_1 f \ldots X_m f$ intransitiv, so hätten schon die Gleichungen:

$$X_k f = 0 \quad (k = 1 \ldots m)$$

jedenfalls eine Lösung gemein und die Gleichungen (2) besässen daher im Widerspruch mit unsern Forderungen mindestens zwei unabhängige gemeinsame Lösungen.

Um noch andre Eigenschaften der gesuchten Gruppen zu finden, erinnern wir daran, dass die m infinitesimalen Transformationen:

(6) $$X_k^{(1)} f + X_k^{(2)} f + \cdots + X_k^{(s)} f \quad (k = 1 \ldots m)$$

eine r-gliedrige Gruppe in den $3s$ Veränderlichen (1) erzeugen, die angiebt, wie das System der s Punkte (1) des R_3 bei der Gruppe: $X_1 f \ldots X_m f$ transformirt wird. Ferner wollen wir annehmen, dass die s Punkte (1) der Gruppe: $X_1 f \ldots X_m f$ gegenüber nicht nur Punkte von allgemeiner, sondern auch Punkte von allgemeiner *gegenseitiger* Lage seien, so dass also das Werthsystem (1) der Gruppe (6) gegenüber ein Werthsystem von allgemeiner Lage ist.

Unter diesen Voraussetzungen kann man leicht übersehen, welche neuen Lagen das System der s Punkte (1) bei den Transformationen der Gruppe (6) annehmen kann; nach Abschn. I, S. 216 ist nämlich die Beweglichkeit dieses Punktsystems im Allgemeinen durch keine andre Bedingung beschränkt als durch die, dass jede Invariante der

Gruppe (6) für alle Lagen des Punktsystems denselben Zahlenwerth haben muss. Bezeichnen wir daher die Lage des Punktes x_k, y_k, z_k nach einer beliebigen Transformation der Gruppe: $X_1 f \ldots X_m f$ mit: x_k', y_k', z_k' und erinnern wir uns, dass alle Invarianten der Gruppe (6) durch die Invarianten (5) ausdrückbar sein sollen, so erkennen wir, dass die s Punkte (1) in alle Punkte: x_k', y_k', z_k' $(k = 1 \ldots s)$ übergehen können, die den Gleichungen:

$$(7) \qquad \left\{ J(x_\lambda', y_\lambda', z_\lambda'; x_\mu', y_\mu', z_\mu') = J(x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda; x_\mu, y_\mu, z_\mu) \right. \quad (\lambda = 1 \ldots, s-1; \mu = \lambda+1, \ldots s)$$

genügen und die so beschaffen sind, dass das Werthsystem:

$$(1') \qquad x_1', y_1', z_1'; x_2', y_2', z_2'; \ldots; x_s', y_s', z_s'$$

in einer gewissen Umgebung des Werthsystems (1) liegt.

Halten wir jetzt die $s-1$ ersten der Punkte (1) fest, so wird:

$$x_k' = x_k, \quad y_k' = y_k, \quad z_k' = z_k \quad (k = 1 \ldots s-1),$$

unter den Bedingungen (7) sind daher alle die, in denen λ und μ beide $< s$ sind, von selbst erfüllt und es bleiben nur die $s-1$ Bedingungen:

$$(8) \qquad \left\{ J(x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda; x_s', y_s', z_s') = J(x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda; x_s, y_s, z_s) \right. \quad (\lambda = 1, 2 \ldots, s-1)$$

übrig, das heisst: nach Festhaltung jener $s-1$ Punkte kann der Punkt x_s, y_s, z_s noch in alle Punkte x_s', y_s', z_s' übergehen, die den Gleichungen (8) genügen und die in einer gewissen Umgebung von x_s, y_s, z_s liegen. Da aber die Gruppe: $X_1 f \ldots X_m f$ endlich ist, so muss, wenn man eine genügende Anzahl von Punkten von gegenseitiger allgemeiner Lage festgehalten hat, schliesslich einmal der Fall eintreten, dass überhaupt alle Punkte in Ruhe bleiben, die Gleichungen (8) müssen demnach so beschaffen sein, dass sie, wenn s gross genug ist, nicht mehr durch eine continuirliche Schaar von Werthsystemen x_s', y_s', z_s' befriedigt werden, sondern die Gleichungen:

$$(9) \qquad x_s' = x_s, \quad y_s' = y_s, \quad z_s' = z_s$$

nach sich ziehen. Dieser Fall tritt nach Abschn. I, S. 490 f. spätestens für: $s = m + 1$ ein, wir werden jedoch sehen, dass er unter den hier gemachten Voraussetzungen schon für einen kleineren Werth von s eintritt.

Halten wir blos einen Punkt von allgemeiner Lage, etwa x_1, y_1, z_1 fest, so kann jeder andre Punkt x_2, y_2, z_2 von allgemeiner Lage noch in die ∞^2 Punkte x_2', y_2', z_2' übergehen, die der Gleichung:

$$J(x_1, y_1, z_1; x_2', y_2', z_2') = J(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2)$$

genügen. Da nun unsre Gruppe: $X_1 f \ldots X_m f$ transitiv ist und in Folge dessen durch Festhaltung eines Punktes von allgemeiner Lage die Parameter der Gruppe gerade drei Bedingungen unterworfen werden, so kann der Punkt x_2, y_2, z_2 offenbar nur dann noch ∞^2 Lagen annehmen, wenn noch mindestens zwei willkürliche Parameter übrig sind, unsre Gruppe ist daher mindestens fünfgliedrig.

Es ist klar, dass nach Festhaltung des Punktes: x_1, y_1, z_1 sich die ∞^3 Punkte des Raumes in ∞^1 invariante Flächen:

$$J(x_1, y_1, z_1; x, y, z) = \text{const.} \tag{10}$$

anordnen. Bei der sechsgliedrigen Gruppe der Euklidischen Bewegungen, die offenbar alle auf S. 399 gestellten Forderungen erfüllt, sind diese ∞^1 Flächen (10) nichts andres als die ∞^1 Kugeln mit dem Mittelpunkte: x_1, y_1, z_1. Um uns kurz ausdrücken zu können, wollen wir daher die ∞^1 Flächen (10) einfach als „die zur Gruppe: $X_1 f \ldots X_m f$ gehörigen *Pseudokugeln* mit dem Mittelpunkte: x_1, y_1, z_1" bezeichnen. Wir können dann auch sagen: wird bei der Gruppe: $X_1 f \ldots X_m f$ ein Punkt: x_1, y_1, z_1 von allgemeiner Lage festgehalten, so kann sich jeder andre Punkt im Allgemeinen frei auf der durch ihn gehenden Pseudokugel mit dem Mittelpunkte: x_1, y_1, z_1 bewegen. Der Inbegriff aller vorhandenen Pseudokugeln bildet selbstverständlich eine bei der Gruppe: $X_1 f \ldots X_m f$ invariante Flächenschaar. Erwähnt möge auch noch werden, dass die ∞^1 Pseudokugeln (10) sich durch eine integrable Pfaffsche Gleichung von der Form:

$$\alpha(x_1, y_1, z_1; x, y, z)\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz = 0 \tag{11}$$

definiren lassen, die aus (10) durch Differentiation erhalten wird und in der x_1, y_1, z_1 die Rolle von Constanten spielen.

Nunmehr denken wir uns zwei Punkte: x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 festgehalten; dann kann, wie wir wissen, jeder dritte Punkt: x_3, y_3, z_3 von allgemeiner Lage noch alle Lagen: x_3', y_3', z_3' annehmen, die den beiden Gleichungen:

$$\begin{cases} J(x_1, y_1, z_1; x_3', y_3', z_3') = J(x_1, y_1, z_1; x_3, y_3, z_3) \\ J(x_2, y_2, z_2; x_3', y_3', z_3') = J(x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3) \end{cases} \tag{12}$$

genügen und in einer gewissen Umgebung von x_3, y_3, z_3 liegen, er kann also mindestens noch ∞^1 Lagen annehmen. Da nun durch das Festhalten der beiden Punkte die Parameter der Gruppe fünf Bedingungen unterworfen werden, so kann die Gliederzahl der Gruppe jedenfalls nicht kleiner als sechs sein.

Wären die beiden Gleichungen (12) in Bezug auf x_3', y_3', z_3' nicht von einander unabhängig, wäre also die zweite Gleichung eine

Folge der ersten, so würden offenbar auch alle $s - 1$ Gleichungen (8) eine Folge der ersten unter ihnen sein, wie gross man auch s wählen würde; man könnte also im Widerspruch mit dem oben Gesagten s nicht so gross wählen, dass die Gleichungen (8) die Gleichungen (9) nach sich zögen, oder, was auf dasselbe hinauskommt, es würden sich, wenn s gross genug wäre, nicht alle Invarianten von s Punkten durch die Invarianten von Punktepaaren ausdrücken lassen. Demnach können wir schliessen, dass die Gleichungen (12) in Bezug auf x_3', y_3', z_3' von einander unabhängig sind und dass der Punkt x_3, y_3, z_3 nach Festhaltung von x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 nur noch ∞^1 Lagen annehmen kann. Mit andern Worten: die ∞^1 Pseudokugeln mit dem Mittelpunkte: x_2, y_2, z_2 müssen die ∞^1 Pseudokugeln mit dem Mittelpunkte: x_1, y_1, z_1 in ∞^2 Curven schneiden, die durch die beiden Gleichungen:

$$(13) \qquad \begin{cases} J(x_1, y_1, z_1;\ x, y, z) = \text{const.} \\ J(x_2, y_2, z_2;\ x, y, z) = \text{const.} \end{cases}$$

oder durch das simultane System:

$$(14) \qquad \begin{cases} \alpha(x_1, y_1, z_1;\ x, y, z)\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz = 0 \\ \alpha(x_2, y_2, z_2;\ x, y, z)\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz = 0 \end{cases}$$

bestimmt werden. Insbesondere ergiebt sich, dass die ∞^1 Pseudokugeln mit dem Mittelpunkte: x_1, y_1, z_1 nicht von ihrem Mittelpunkte unabhängig sein können, dass es also mindestens ∞^2 verschiedene Pseudokugeln giebt.

Endlich denken wir uns drei verschiedene Punkte: x_k, y_k, z_k $(k = 1, 2, 3)$ festgehalten, dann kann jeder vierte Punkt x_4, y_4, z_4 noch alle Lagen x_4', y_4', z_4' in einer gewissen Umgebung von x_4, y_4, z_4 annehmen, die den drei Gleichungen:

$$(15) \qquad \begin{cases} J(x_1, y_1, z_1;\ x_4', y_4', z_4') = J(x_1, y_1, z_1;\ x_4, y_4, z_4) \\ J(x_2, y_2, z_2;\ x_4', y_4', z_4') = J(x_2, y_2, z_2;\ x_4, y_4, z_4) \\ J(x_3, y_3, z_3;\ x_4', y_4', z_4') = J(x_3, y_3, z_3;\ x_4, y_4, z_4) \end{cases}$$

genügen. Wären nun unter diesen drei Gleichungen blos zwei in Bezug auf x_4', y_4', z_4' von einander unabhängige vorhanden, wäre also etwa die dritte eine Folge der beiden ersten, so würden auch unter den $s - 1$ Gleichungen (8) die $s - 3$ letzten stets eine Folge der beiden ersten sein, aus (8) würden daher niemals, wie gross man auch s wählte, die Gleichungen (9) folgen. Demnach müssen schon die Gleichungen (15) die folgenden:

$$x_4' = x_4,\ y_4' = y_4,\ z_4' = z_4$$

nach sich ziehen, das heisst nach Festhaltung dreier Punkte von gegen-

seitiger allgemeiner Lage müssen überhaupt alle Punkte des Raumes in Ruhe bleiben*).

Hieraus ergiebt sich in erster Linie, dass m gerade gleich *sechs* sein muss; zweitens aber folgt, dass die ∞^2 Curven (13) nicht alle auf den ∞^1 Pseudokugeln mit dem Mittelpunkte x_3, y_3, z_3 liegen können, sondern dass jede solche Curve mit jeder solchen Pseudokugel im Allgemeinen nur einen Punkt gemein hat, dass also das simultane System (14) nicht von x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 unabhängig sein kann. Hiermit ist bewiesen, dass es im R_3 keine Schaar von ∞^2 Curven giebt, die so beschaffen ist, dass auf jeder Pseudokugel ∞^1 Curven der Schaar liegen. Da nun jede Schaar von ∞^2 Curven, die den R_3 ganz erfüllt, darstellbar ist als die Schaar der Mongeschen Charakteristiken einer linearen partiellen Differentialgleichung:

$$\lambda(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial x} + \mu(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial y} + \nu(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

so können wir auch sagen: die Pseudokugeln sind nicht sämmtlich Integralflächen ein und derselben linearen partiellen Differentialgleichung.

Aus der eben bewiesenen Eigenschaft der Pseudokugeln lässt sich noch eine wichtige Eigenschaft der gesuchten Gruppen ableiten, es lässt sich nämlich beweisen, dass in keiner der gesuchten Gruppen zwei infinitesimale Transformationen vorkommen, die dieselben Bahncurven haben.

In der That, es seien etwa: $X_1 f$ und $X_2 f$ zwei unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe: $X_1 f \ldots X_6 f$, die genau dieselben Bahncurven haben, es bestehe also eine Identität von der Form:

$$X_2 f \equiv \varphi(x, y, z) X_1 f,$$

*) Hieraus folgt unter anderm, dass die Gleichungen:

(A) $$J(x_k', y_k', z_k';\ x', y', z') = J(x_k, y_k, z_k;\ x, y, z) \quad (k = 1, 2, 3)$$

nach x', y', z' auflösbar sind. Unterwirft man die Grössen: x_k', y_k', z_k', x_k, y_k, z_k den Gleichungen:

$$J(x_k', y_k', z_k';\ x_j', y_j', z_j') = J(x_k, y_k, z_k;\ x_j, y_j, z_j)$$
$$(k, j = 1, 2, 3;\ k < j)$$

und fasst sie als Parameter auf, so stellen, wie man sich leicht überzeugt, die Auflösungen der Gleichungen (A) nach x', y', z' die allgemeinste Gruppe des Raumes x, y, z dar, bei der die beiden Punkte: x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 die Invariante: $J(x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2)$ haben. Diese Gruppe umfasst offenbar die Gruppe: $X_1 f \ldots X_\mu f$, sie braucht aber nicht continuirlich zu sein, sondern sie kann in mehrere getrennte continuirliche Schaaren von Transformationen zerfallen (vgl. Abschn. I, Kap. 18). Wir wollen noch erwähnen, dass man aus den Gleichungen (A) die endlichen Gleichungen der Gruppe: $X_1 f \ldots X_m f$ erhält, wenn man die Auflösung nach x', y', z' wählt, die für: $x_k' = x_k$, $y_k' = y_k$, $z_k' = z_k$ $(k = 1, 2, 3)$ in die Gleichungen: $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$ übergeht..

wo φ keine blose Constante ist. Bilden wir nun die sechs linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$X_k f + X_k^{(1)} f = 0 \quad (k = 1 \ldots 6), \tag{16}$$

deren eine gemeinsame Lösung:

$$J(x, y, z; x_1, y_1, z_1)$$

gleich einer willkürlichen Constanten gesetzt die ∞^1 Pseudokugeln mit dem Mittelpunkte: x_1, y_1, z_1 bestimmt, so bemerken wir, dass unter diesen sechs Gleichungen die beiden:

$$X_1 f + X_1^{(1)} f = 0$$
$$\varphi(x, y, z) X_1 f + \varphi(x_1, y_1, z_1) X_1^{(1)} f = 0$$

enthalten sind, aus denen sofort die Gleichungen:

$$X_1 f = 0, \quad X_1^{(1)} f = 0$$

folgen. Da nun die erste dieser beiden Gleichungen von x_1, y_1, z_1 unabhängig ist, so ergiebt sich, dass unter den gemachten Voraussetzungen alle Pseudokugeln des Raumes ein und dieselbe lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung befriedigen, was, wie wir vorhin nachgewiesen haben, nicht der Fall sein darf.

Wir können demnach jetzt den Satz aussprechen:

Satz 1. *Ist eine endliche continuirliche Gruppe von Punkttransformationen des R_3 so beschaffen, dass bei ihr zwei Punkte eine und nur eine und $s > 2$ Punkte keine wesentliche Invariante haben, so ist die Gruppe transitiv und sechsgliedrig, sie enthält ferner niemals zwei unabhängige infinitesimale Transformationen, deren Bahncurven übereinstimmen; ausserdem besteht die zur Gruppe gehörige Schaar von Pseudokugeln aus mindestens ∞^2 Flächen und es giebt im R_3 keine zweifach unendliche Curvenschaar, von deren Curven alle vorhandenen Pseudokugeln erzeugt sind.*

Bevor wir weiter gehen, wollen wir noch die Bedingung dafür, dass zwei Punkte bei einer sechsgliedrigen transitiven Gruppe: $X_1 f \ldots X_6 f$ eine und nur eine Invariante haben, auf eine bequeme Form bringen.

Zunächst kommt die genannte Bedingung darauf hinaus, dass die sechs linearen partiellen Differentialgleichungen (16) eine und nur eine gemeinsame Lösung haben dürfen, dass sich also unter diesen Gleichungen gerade fünf von einander unabhängige befinden müssen. Nun ist die Gruppe: $X_1 f \ldots X_6 f$ transitiv, es werden also etwa: $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ durch keine lineare homogene Relation verknüpft sein, während: $X_4 f$, $X_5 f$, $X_6 f$ sich linear und homogen durch: $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ ausdrücken lassen:

$$(17) \qquad X_{3+k}f \equiv \sum_1^3{}_j \varphi_{kj}(x, y, z)\, X_j f \qquad (k = 1, 2, 3).$$

Mit Berücksichtigung dieser Identitäten können wir die sechs Gleichungen (16) offenbar durch die folgenden:

$$(18) \qquad \begin{cases} X_k f + X_k^{(1)} f = 0 \\ \sum_1^3{}_j \{\varphi_{kj}(x, y, z)\, X_j f + \varphi_{kj}(x_1, y_1, z_1)\, X_j^{(1)} f\} = 0 \\ (k = 1, 2, 3) \end{cases}$$

oder auch durch die folgenden:

$$(19) \qquad \begin{cases} X_k f + X_k^{(1)} f = 0 \\ \sum_1^3{}_j \{\varphi_{kj}(x, y, z) - \varphi_{kj}(x_1, y_1, z_1)\}\, X_j f = 0 \\ (k = 1, 2, 3) \end{cases}$$

ersetzen.

Von den sechs Gleichungen (19) sind die drei ersten unter den gemachten Voraussetzungen nach p_1, q_1, r_1 auflösbar, die drei letzten dagegen sind von p_1, q_1, r_1 ganz frei; soll es daher unter den Gleichungen (19) gerade fünf von einander unabhängige geben, so ist nothwendig und hinreichend, dass sich die drei letzten unter ihnen, die wir auch in der Form:

$$(20) \qquad X_{3+k}f - \sum_1^3{}_j \varphi_{kj}(x_1, y_1, z_1)\, X_j f = 0 \qquad (k = 1, 2. 3)$$

schreiben können, auf gerade zwei unabhängige reduciren. Bedenken wir daher, dass die drei infinitesimalen Transformationen:

$$X_{3+k}f - \sum_1^3{}_j \varphi_{kj}(x_1, y_1, z_1)\, X_j f \qquad (k = 1, 2, 3)$$

sämmtlich den Punkt x_1, y, z_1 invariant lassen und dass sich, wenn dieser Punkt ein Punkt von allgemeiner Lage ist, aus ihnen alle infinitesimalen Transformationen der Gruppe: $X_1 f \ldots X_6 f$ linear ableiten lassen, die den betreffenden Punkt festhalten (s. Abschn. I, S. 203, Satz 7), so erhalten wir den

Satz 2. *Ist $X_1 f \ldots X_6 f$ eine sechsgliedrige transitive Gruppe des R_3 und sind:*

$$Y_k f = \alpha_k(x, y, z)\, p + \beta_k(x, y, z)\, q + \gamma_k(x, y, z)\, r \qquad (k = 1, 2, 3)$$

irgend drei unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe, die einen Punkt von allgemeiner Lage invariant lassen, so haben der Gruppe:

$X_1 f \ldots X_6 f$ gegenüber zwei Punkte stets dann aber auch nur dann eine und nur eine Invariante, wenn die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \tag{21}$$

identisch verschwindet, ohne dass alle ihre zweireihigen Unterdeterminanten verschwinden.

Durch Benutzung des in diesem Satze enthaltenen Kriteriums können wir jetzt noch eine andre wichtige Eigenschaft der gesuchten Gruppen ableiten; diese Eigenschaft bezieht sich allerdings nur auf die imprimitiven unter ihnen.

Ist eine sechsgliedrige Gruppe von der verlangten Beschaffenheit imprimitiv, so kann es vorkommen, dass sie eine Schaar von ∞^1 Flächen: $\omega(x, y, z) = \text{const.}$ invariant lässt. Tritt dieser Fall ein, so können wir uns immer die Veränderlichen x, y, z so gewählt denken, dass die invariante Flächenschaar durch die Gleichung: $x = \text{const.}$ dargestellt wird; die betreffende Gruppe wird dann die Form haben:

$$X_k f = \xi_k(x)\, p + \eta_k(x, y, z)\, q + \zeta_k(x, y, z)\, r \quad (k = 1 \ldots 6),$$

wo $\xi_1 \ldots \xi_6$ jedenfalls nicht sämmtlich verschwinden, weil sonst die Gruppe intransitiv wäre.

An und für sich sind nun drei Fälle denkbar, die Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ kann nämlich nach Theorem 1, S. 6 die Flächen: $x = \text{const.}$ entweder ein-, zwei- oder dreigliedrig transformiren; wir werden jedoch zeigen, dass hier nur der dritte Fall eintreten kann.

Würden die Flächen: $x = \text{const.}$ blos eingliedrig transformirt, so könnte man nach dem eben angeführten Theorem die Veränderliche x so wählen, dass jedes $\xi_k(x)p$ die Form: $a_k p$ erhielte. Wäre nun zum Beispiel $a_1 \neq 0$, so könnte man die beiden unabhängigen Lösungen der Gleichung: $X_1 f = 0$ als neues y und neues z einführen und damit die Gruppe auf die Form:

$$X_1 f = p, \quad X_k f = \eta_k(x, y, z)\, q + \zeta_k(x, y, z)\, r \quad (k = 2 \ldots 6)$$

bringen. Dann aber hätte die Invariante der beiden Punkte: x, y, z und x_1, y_1, z_1 nothwendig die Form: $x - x_1$, es wären also: $x - x_1 = \text{const.}$ oder einfacher: $x = \text{const.}$ die ∞^1 Pseudokugeln mit dem Mittelpunkt: x_1, y_1, z_1, das heisst, es gäbe überhaupt blos ∞^1 verschiedene Pseudokugeln, was nach dem Früheren ausgeschlossen ist.

Würden andrerseits die Flächen: $x = \text{const.}$ zweigliedrig trans-

formirt, so könnten wir nach Theorem 1, S. 6 die Gruppe: $X_1 f \ldots X_6 f$ durch geeignete Wahl von x auf die Form:

$$\begin{aligned} X_1 f &= p + \eta_1(x, y, z)\, q + \xi_1(x, y, z)\, r \\ X_2 f &= xp + \eta_2(x, y, z)\, q + \xi_2(x, y, z)\, r \\ X_k f &= \quad \eta_k(x, y, z)\, q + \xi_k(x, y, z)\, r \\ &\qquad (k = 3 \ldots 6) \end{aligned}$$

bringen, ein Punkt x_1, y_1, z_1 von allgemeiner Lage gestattete demnach drei unabhängige infinitesimale Transformationen von der Form:

$$\begin{aligned} Y_1 f &= (x - x_1) p + \bar{\eta}_1 q + \bar{\xi}_1 r \\ Y_2 f &= \quad \bar{\eta}_2 q + \bar{\xi}_2 r \\ Y_3 f &= \quad \bar{\eta}_3 q + \bar{\xi}_3 r \end{aligned}$$

und die zugehörige Determinante:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & \bar{\eta}_1 & \bar{\xi}_1 \\ 0 & \bar{\eta}_2 & \bar{\xi}_2 \\ 0 & \bar{\eta}_3 & \bar{\xi}_3 \end{vmatrix} = (x - x_1) \begin{vmatrix} \bar{\eta}_2 & \bar{\xi}_2 \\ \bar{\eta}_3 & \bar{\xi}_3 \end{vmatrix}$$

müsste nach Satz 2 identisch verschwinden. Dann aber wären die beiden unabhängigen infinitesimalen Transformationen $Y_2 f$ und $Y_3 f$ durch eine Identität von der Form:

$$Y_3 f \equiv \omega(x, y, z)\, Y_2 f$$

verknüpft und hätten in Folge dessen die Bahncurven gemein, was nach Satz 1 ausgeschlossen ist.

Hiermit ist bewiesen, dass die invariante Flächenschaar: $x =$ const. dreigliedrig transformirt werden muss:

Satz 3. *Haben bei einer sechsgliedrigen transitiven Gruppe des R_3 zwei Punkte eine und nur eine Invariante und $s > 2$ Punkte keine wesentliche Invariante, so transformirt die Gruppe jede Schaar von ∞^1 Flächen, die sie etwa invariant lässt, dreigliedrig.*

Wir werden jetzt alle sechsgliedrigen transitiven Gruppen des R_3 bestimmen, die gewisse unter den in Satz 1 und 3 ausgesprochenen Eigenschaften besitzen, also um uns genauer auszudrücken:

Wir suchen jetzt alle sechsgliedrigen transitiven Gruppen $X_1 f \ldots X_6 f$ des R_3, bei denen:

erstens *zwei Punkte eine und nur eine Invariante haben, bei denen* zweitens *niemals zwei unabhängige infinitesimale Transformationen die Bahncurven gemein haben und bei denen* drittens *jede etwa invariant bleibende Schaar von ∞^1 Flächen dreigliedrig transformirt wird.*

Um die früher, auf S. 399 gestellte Aufgabe vollständig zu lösen, müssen wir schliesslich noch bei jeder Gruppe, die sich ergiebt, feststellen, ob $s > 2$ Punkte eine wesentliche Invariante haben oder nicht, denn nur die Gruppen, bei denen sie keine wesentliche Invariante haben, sind für uns brauchbar. Die Entscheidung hierüber wird aber durch den folgenden Satz wesentlich erleichtert:

Satz 4. *Wenn bei einer sechsgliedrigen transitiven Gruppe:* $X_1 f \ldots X_6 f$ *des* R_3 *zwei Punkte* x, y, z *und* x_1, y_1, z_1 *eine und nur eine Invariante:* $J(x, y, z; x_1, y_1, z_1)$ *haben, so haben* $s > 2$ *Punkte stets dann aber auch nur dann keine wesentliche Invariante, wenn erstens zu der Gruppe mindestens* ∞^2 *verschiedene Pseudokugeln gehören und wenn es zweitens keine bei der Gruppe invariante Schaar von* ∞^2 *Curven giebt, von deren Curven alle Pseudokugeln erzeugt sind.*

Von der Richtigkeit dieses Satzes überzeugt man sich ohne Schwierigkeit. Satz 1, S. 405 zeigt nämlich sofort, dass die in dem Satze 4 angegebenen Bedingungen nothwendig sind; dass sie auch hinreichend sind, sieht man so ein:

Da zwei Punkte eine und nur eine Invariante haben sollen und da es mindestens ∞^2 verschiedene Pseudokugeln geben soll, so ist klar, dass zwei Pseudokugeln, deren Mittelpunkte: x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 von allgemeiner gegenseitiger Lage sind, im Allgemeinen nur eine Curve gemein haben, dass also die beiden Functionen:

$$J(x_1, y_1, z_1; x_3, y_3, z_3), \quad J(x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3),$$

für die wir kurz: $J_{1,3}$ und $J_{2,3}$ schreiben wollen, in Bezug auf x_3, y_3, z_3 von einander unabhängig sind. Hieraus folgt augenscheinlich, dass die drei Functionen: $J_{1,2}$, $J_{1,3}$, $J_{2,3}$ von einander unabhängige Lösungen der Gleichungen:

$$X_k^{(1)} f + X_k^{(2)} f + X_k^{(3)} f = 0 \quad (k = 1 \ldots 6)$$

sind, da aber diese Gleichungen unter den gemachten Voraussetzungen sicher nach sechs von den neun Differentialquotienten p_ν, q_ν, r_ν $(\nu = 1, 2, 3)$ auflösbar sind und infolge dessen nur drei unabhängige Lösungen gemein haben, so ist hiermit bewiesen, dass sich unter den gemachten Voraussetzungen alle Invarianten von drei Punkten durch die von Punktepaaren ausdrücken lassen, dass also drei Punkte keine wesentliche Invariante haben.

Würden andrerseits drei Pseudokugeln, deren Mittelpunkte: x_ν, y_ν, z_ν $(\nu = 1, 2, 3)$ von allgemeiner gegenseitiger Lage sind, stets nicht blos einen Punkt, sondern eine ganze Curve gemein haben, so würden die Pseudokugeln um irgend zwei dieser Punkte eine Schaar von ∞^2 Curven bestimmen, die so beschaffen wäre, dass auf jeder

Pseudokugel ∞^1 Curven der Schaar lägen; da nun diese Curvenschaar offenbar von der Lage jener drei Punkte unabhängig wäre, so bliebe sie ebenso wie die Schaar aller Pseudokugeln (vgl. S. 402) bei der Gruppe $X_1 f \ldots X_6 f$ invariant, während doch in unserm Satze das Auftreten einer derartigen invarianten Curvenschaar ausdrücklich ausgeschlossen ist. Hiermit ist bewiesen, dass drei Pseudokugeln mit drei verschiedenen Mittelpunkten im Allgemeinen nur einen Punkt gemein haben; verstehen wir daher unter x_4, y_4, z_4 irgend einen vierten Punkt von allgemeiner Lage, so sind die drei Functionen: $J_{1,4}$, $J_{2,4}$, $J_{3,4}$ sicher in Bezug auf x_4, y_4, z_4 von einander unabhängig. Bedenken wir überdies, dass vier Punkte bei der Gruppe: $X_1 f \ldots X_6 f$ gerade sechs unabhängige Invarianten haben und dass: $J_{1,2}$, $J_{1,3}$, $J_{2,3}$, $J_{1,4}$, $J_{2,4}$, $J_{3,4}$ sechs solche Invarianten sind, so ergiebt sich, dass unter den gemachten Voraussetzungen auch vier Punkte keine wesentliche Invariante haben. Endlich ist nunmehr zugleich unmittelbar klar, dass $s > 4$ Punkte keine wesentliche Invariante haben; demnach ist unser Satz vollständig bewiesen.

Wir bestimmen jetzt zuerst alle primitiven Gruppen, welche die auf S. 408 angegebenen Eigenschaften besitzen und nachher die imprimitiven.

§ 86.

Die primitiven unter den gesuchten Gruppen.

Von sechsgliedrigen primitiven Gruppen giebt es im R_3 überhaupt nur zwei Typen (s. Theorem 9, S. 139) und diese zwei werden repräsentirt erstens durch die Gruppe:

$$(22) \qquad \boxed{p,\ q,\ r,\ xq - yp,\ yr - zq,\ zp - xr}$$

der Euklidischen Bewegungen und zweitens durch die sechsgliedrige projective Gruppe:

$$(23) \qquad \boxed{\begin{array}{l} p + xU,\ q + yU,\ r + zU \\ xq - yp,\ yr - zq,\ zp - xr \end{array}}$$

der Fläche zweiten Grades: $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$, wo wie gewöhnlich U für $xp + yq + zr$ geschrieben ist.

Bei der Gruppe (22) haben zwei Punkte bekanntlich eine und nur eine Invariante, nämlich ihre Entfernung im gewöhnlichen Sinne:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

Von der Gruppe (23) gilt dasselbe und zwar lautet die betreffende Invariante:

$$\frac{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2+\{(x_1y_2-x_2y_1)^2+(y_1z_2-y_2z_1)^2+(z_1x_2-z_2x_1)^2\}}{(1+x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2},$$

sie ist bekanntlich das Doppelverhältniss zwischen x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 und den beiden Punkten, die ihre Verbindungsgerade auf der invarianten Fläche zweiten Grades ausschneidet. Man weiss ferner schon längst, dass bei beiden Gruppen die Invarianten beliebig vieler Punkte sich durch die Invarianten von Punktepaaren ausdrücken lassen, dass also $s > 2$ Punkte keine wesentliche Invariante haben; wüsste man das noch nicht, so könnte man es sofort aus Satz 4, S. 409 schliessen, denn erstens haben in jeder von beiden Gruppen zwei Punkte eine und nur eine Invariante und zweitens lassen beide Gruppen, da sie primitiv sind, überhaupt keine Schaar von ∞^2 Curven invariant.

Der Fall der primitiven Gruppen ist hiermit erledigt; wir erwähnen nur noch, dass bei jeder der beiden gefundenen Gruppen eine Gleichung zweiten Grades:

$$\alpha_{11}dx^2+\alpha_{22}dy^2+\alpha_{33}dz^2+2\alpha_{12}dx\,dy+2\alpha_{23}dy\,dz+2\alpha_{31}dz\,dx=0$$

mit nicht verschwindender Determinante invariant bleibt und dass die ∞^2 Richtungen durch jeden festgehaltenen Punkt von allgemeiner Lage dreigliedrig transformirt werden.

§ 87.

Die imprimitiven unter den gesuchten Gruppen.

Alle die betreffenden Gruppen sind sechsgliedrig und transitiv. Wird nun bei einer sechsgliedrigen transitiven Gruppe des R_3 ein Punkt von allgemeiner Lage festgehalten, so wird die zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit der ∞^2 hindurchgehenden Linienelemente durch eine projective Gruppe transformirt, die höchstens dreigliedrig ist. Andrerseits wissen wir aus der Aufzählung der projectiven Gruppen der Ebene (s. S. 106 f.), dass jede projective Gruppe der Ebene mit nicht mehr als drei Parametern entweder einen Punkt invariant lässt oder aus den ∞^3 projectiven Transformationen besteht, die einen nicht ausgearteten Kegelschnitt invariant lassen. Wir können daher schliessen, dass bei den sechsgliedrigen transitiven Gruppen des R_3 nur zwei Fälle möglich sind: entweder bleibt mit jedem festgehaltenen Punkte von allgemeiner Lage zugleich ein hindurchgehendes Linienelement invariant, oder es bleibt ein nicht ausgearteter Kegel zweiten Grades invariant und die ∞^2 Linienelemente durch den festgehaltenen Punkt werden dreigliedrig transformirt.

Der zuletzt genannte Fall kann hier nicht eintreten, weil die betreffende sechsgliedrige Gruppe sonst primitiv wäre (vgl. S. 123 f.), demnach muss jede Gruppe von der hier verlangten Beschaffenheit ein simultanes System:

$$\frac{dx}{\alpha(x, y, z)} = \frac{dy}{\beta(x, y, z)} = \frac{dz}{\gamma(x, y, z)}$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, eine Schaar von ∞^2 Curven:

$$\varphi(x, y, z) = \text{const.}, \quad \psi(x, y, z) = \text{const.}$$

invariant lassen. Wählen wir daher die Veränderlichen x, y, z derart, dass die invariante Curvenschaar die Form: $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ bekommt, so erhalten alle die gesuchten Gruppen die Form:

$$X_k f = \xi_k(x, y)\, p + \eta_k(x, y)\, q + \zeta_k(x, y, z)\, r \qquad (k = 1 \ldots 6).$$

Nach Abschnitt I, S. 307, Satz 4 erzeugen die sechs verkürzten infinitesimalen Transformationen:

$$\overline{X}_k f = \xi_k(x, y)\, p + \eta_k(x, y)\, q \qquad (k = 1 \ldots 6)$$

in den zwei Veränderlichen x, y eine Gruppe, die mit der Gruppe: $X_1 f \ldots X_6 f$ isomorph ist. Diese verkürzte Gruppe wollen wir zunächst ins Auge fassen.

Hätte die verkürzte Gruppe weniger als fünf Parameter, so enthielte die Gruppe: $X_1 f \ldots X_6 f$ zwei unabhängige infinitesimale Transformationen von der Form:

$$\omega_1(x, y, z)\, r, \quad \omega_2(x, y, z)\, r,$$

also zwei infinitesimale Transformationen mit gemeinsamen Bahncurven, was nach Satz 1, S. 405 nicht sein darf, folglich muss die verkürzte Gruppe: $\overline{X}_1 f \ldots \overline{X}_6 f$ entweder sechsgliedrig oder fünfgliedrig sein. Es fragt sich daher nur noch, welche verschiedenen Formen die verkürzte Gruppe haben kann.

Ist die Gruppe: $\overline{X}_1 f \ldots \overline{X}_6 f$ in den zwei Veränderlichen x, y primitiv, so kann sie nach S. 71 stets durch geeignete Wahl von x und y eine der beiden Formen erhalten:

$$(24) \qquad \begin{cases} p,\ q,\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq \\ p,\ q,\ xq,\ xp - yq,\ yp. \end{cases}$$

Ist andrerseits die Gruppe: $\overline{X}_1 f \ldots \overline{X}_6 f$ imprimitiv, so lässt sie, als Gruppe der Ebene x, y aufgefasst, mindestens eine Schaar: $\varphi(x, y) = \text{const.}$ von ∞^1 Curven invariant, dann aber stellt die Gleichung: $\varphi(x, y) = \text{const.}$ im Raume x, y, z offenbar eine Schaar von ∞^1 Flächen dar, die bei der Gruppe: $X_1 f \ldots X_6 f$ invariant bleibt. Da nun nach Satz 3, S. 408 die Gruppe: $X_1 f \ldots X_6 f$ jede bei ihr in-

variante Schaar von ∞^1 Flächen dreigliedrig transformiren muss, so ergiebt sich, dass die verkürzte Gruppe: $\overline{X}_1 f \ldots \overline{X}_6 f$ aufgefasst als Gruppe der Ebene, jede bei ihr invariante Schaar von ∞^1 Curven dreigliedrig transformiren muss. Unter den fünf- und sechsgliedrigen imprimitiven Gruppen der Ebene giebt es aber, wie die Tabelle auf S. 71 ff. zeigt, verhältnissmässig nur wenige, die diese Forderung erfüllen, und zwar können die sechsgliedrigen durch geeignete Wahl von x und y auf eine der drei Formen:

$$(25) \qquad \begin{cases} q,\ xq,\ yq,\ p,\ xp,\ x^2p + xyq \\ q,\ xq,\ x^2q,\ p,\ xp + yq,\ x^2p + 2xyq \\ q,\ yq,\ y^2q,\ p,\ xp,\ x^2p \end{cases}$$

gebracht werden und die fünfgliedrigen auf die Form:

$$(26) \qquad q,\ xq,\ p,\ 2xp + yq,\ x^2p + xyq.$$

Damit sind alle möglichen Formen der verkürzten Gruppe: $\overline{X}_1 f \ldots \overline{X}_6 f$ gefunden und wir haben nur noch für jede dieser verkürzten Gruppen die sechsgliedrigen Gruppen: $X_1 f \ldots X_6 f$ in x, y, z zu bestimmen, zu denen sie als verkürzte Gruppe gehören kann. Dabei müssen wir natürlich darauf achten, dass die Gruppe: $X_1 f \ldots X_6 f$ keine zwei infinitesimalen Transformationen mit denselben Bahncurven enthalten darf. Haben wir die verschiedenen Formen der Gruppe: $X_1 f \ldots X_6 f$ bestimmt, die dieser Bedingung genügen, so müssen wir schliesslich noch bei jeder der gefundenen Gruppen untersuchen, ob zwei Punkte eine und nur eine Invariante haben und ob $s > 2$ Punkte nicht etwa eine wesentliche Invariante haben.

Zuerst setzen wir voraus, dass die verkürzte Gruppe: $\overline{X}_1 f \ldots \overline{X}_6 f$ sechsgliedrig ist, sodann dass sie fünfgliedrig ist.

A) Bestimmung aller Gruppen, deren verkürzte Gruppen sechsgliedrig sind.

Ist die verkürzte Gruppe: $\overline{X}_1 f \ldots \overline{X}_6 f$ sechsgliedrig, so kann sie, wie wir gesehen haben, auf eine der folgenden vier Formen gebracht werden:

(I) $p,\ q,\ xq,\ xp + yq,\ xp - yq,\ yp$
(II) $p,\ q,\ xq,\ xp + yq,\ xp - yq,\ x^2p + xyq$
(III) $p,\ q,\ xq,\ xp + yq,\ x^2q,\ x^2p + 2xyq$
(IV) $p,\ q,\ xp,\ yq,\ x^2p,\ y^2q.$

Diese vier Fälle müssen wir also der Reihe nach durchgehen.

Erster Fall.

Wir suchen zunächst alle sechsgliedrigen Gruppen in x, y, z, die unsre Forderungen auf S. 408 erfüllen und deren verkürzte Gruppen die Form (I) haben. Jede solche Gruppe hat die Gestalt:

$$(27) \quad \begin{cases} p + \varphi_1 r, \quad q + \varphi_2 r, \quad xq + \varphi_3 r, \quad xp + yq + \varphi_4 r \\ \qquad\qquad xp - yq + \varphi_5 r, \quad yp + \varphi_6 r, \end{cases}$$

unter $\varphi_1 \ldots \varphi_6$ Functionen von x, y, z verstanden. Wir müssen daher jetzt $\varphi_1 \ldots \varphi_6$ in allgemeinster Weise so bestimmen, dass die infinitesimalen Transformationen (27) eine sechsgliedrige Gruppe erzeugen, die unsre Forderungen auf S. 408 erfüllt, jedoch dürfen wir dabei die Veränderliche z in geeigneter Weise wählen, um die Form der Functionen $\varphi_1 \ldots \varphi_6$ möglichst zu vereinfachen.

Gleich von vornhein denken wir uns an Stelle von z eine von z nicht freie Lösung der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \varphi_1(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

als neues z eingeführt; auf diese Weise erhält die infinitesimale Transformation: $p + \varphi_1 r$ die einfache Form: p, während die andern Transformationen ihre Gestalt nicht wesentlich ändern. Wir können demnach φ_1 ohne Weiteres gleich Null setzen.

Nunmehr ergiebt sich durch Combination:

$$(p, q + \varphi_2 r) = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} r,$$

da aber unsre Gruppe keine infinitesimale Transformation von der Form: $\psi(x, y, z) r$ enthält, so muss hier der Factor von r identisch verschwinden, das heisst φ_2 muss von x frei sein. Führen wir überdies: $z_1 = \omega(y, z)$ als neue Veränderliche ein, so behält p seine Form, während:

$$q + \varphi_2(y, z) r = q + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + \varphi_2 \frac{\partial \omega}{\partial z}\right) \cdot r_1$$

wird; wählen wir daher ω so, dass es die Gleichung: $\omega_y + \varphi_2 \omega_z = 0$ befriedigt, so erhalten die beiden ersten infinitesimalen Transformationen unsrer Gruppe die Form:

$$p, \quad q.$$

Um φ_3 zu bestimmen, bilden wir die Gleichungen:

$$(p, xq + \varphi_3 r) = q + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} r$$

$$(q, xq + \varphi_3 r) = \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} r,$$

die zeigen, dass φ_3 nur von z abhängt; andrerseits aber darf φ_3 auch nicht verschwinden, weil sonst unsre Gruppe zwei infinitesimale Transformationen: q und xq mit denselben Bahncurven enthielte und dieser Fall ist auf S. 408 ausgeschlossen. Wir können demnach eine solche Function von z als neues z einführen, dass $\varphi_3 = 1$ wird, und da dies auf p und q keinen Einfluss hat, so erscheinen die drei ersten infinitesimalen Transformationen unsrer Gruppe jetzt in der Form:

$$p,\ q,\ xq + r.$$

Indem wir: $xp + yq + \varphi_4 r$ mit p und q combiniren, erkennen wir geradeso wie bei φ_3, dass φ_4 nur von z abhängt; andrerseits ergiebt sich aber:

$$(xq + r,\ xp + yq + \varphi_4(z)\, r) = \varphi_4'(z)\, r,$$

also ist auch $\varphi_4'(z) = 0$ und $\varphi_4(z) = c$, so dass wir die infinitesimale Transformation:

$$xp + yq + cr$$

bekommen.

Genau so wie bei φ_3 und φ_4 ergiebt sich, dass auch φ_5 nur von z abhängt; überdies erhalten wir:

$$(xq + r,\ xp - yq + \varphi_5(z)\, r) = -2xq + \varphi_5'(z)\, r$$

und somit: $\varphi_5'(z) = -2$, das heisst: $\varphi_5(z) = -2z +$ const., wo aber die Integrationsconstante durch Einführung eines neuen z gleich Null gemacht werden kann, ohne dass sich die Form der früheren infinitesimalen Transformationen ändert. Nunmehr ergiebt sich auch noch:

$$(xp + yq + cr,\ xp - yq - 2zr) = -2cr,$$

die Constante c muss also verschwinden.

Um endlich noch φ_6 zu bestimmen, das natürlich auch nur von z abhängt, bilden wir die Gleichungen:

$$(xq + r,\ yp + \varphi_6(z)\, r) = xp - yq + \varphi_6'(z)\, r$$

$$(xp - yq - 2zr,\ yp + \varphi_6(z)\, r) = -2yp - 2\{z\varphi_6'(z) - \varphi_6(z)\}r,$$

aus denen sich:

$$\varphi_6'(z) = -2z,\ z\varphi_6'(z) = 2\varphi_6(z) = -2z^2$$

ergiebt. Demnach finden wir, dass die infinitesimalen Transformationen unsrer Gruppe die einfache Form:

$$\left\{\begin{matrix} p,\ q,\ xq + r,\ yq + zr,\ xp - zr \\ yp - z^2 r \end{matrix}\right. \tag{28}$$

erhalten können; es ist das, wie nebenbei bemerkt sein mag, die Gruppe, die entsteht, wenn man die allgemeine lineare Gruppe:

$$p,\ q,\ xq,\ yq,\ xp,\ yp$$

der Ebene durch Hinzunahme des Differentialquotienten:

$$\frac{dy}{dx} = z$$

erweitert (vgl. S. 165).

Noch bleibt zu untersuchen, ob unsre Gruppe (28) die Forderungen auf S. 399 erfüllt, vor allen Dingen also, ob zwei Punkte des Raumes x, y, z der Gruppe gegenüber eine und nur eine Invariante haben.

Unsre Gruppe enthält drei infinitesimale Transformationen, die in x, y, z von der nullten Ordnung sind und aus denen sich keine Transformation von erster oder höherer Ordnung linear ableiten lässt; es sind das:

$$p,\ q,\ xq + r.$$

Hieraus geht hervor, dass der Coordinatenanfang: $x = y = z = 0$ ein Punkt von allgemeiner Lage ist. Dieser Punkt bleibt bei den drei infinitesimalen Transformationen:

$$yp - z^2 r,\ xp - yq - 2zr,\ xp + yq$$

unsrer Gruppe in Ruhe, nach Satz 2, S. 406 kommt es daher zunächst darauf an, ob die Determinante:

$$\begin{vmatrix} y & 0 & -z^2 \\ x & -y & -2z \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = 2y^2 z - 2xyz^2$$

identisch verschwindet oder nicht. Da nun diese Determinante nicht identisch verschwindet, so haben zwei Punkte des R_3 der Gruppe (28) gegenüber sicher keine Invariante, die Gruppe (28) ist also für uns unbrauchbar.

Zweiter Fall.

Die verkürzte Gruppe: $\overline{X}_1 f \ldots \overline{X}_6 f$ habe jetzt die Form (II) auf S. 413 und die Gruppe: $X_1 f \ldots X_6 f$ infolgedessen die Form:

$$(29) \qquad \begin{cases} p + \varphi_1 r,\ q + \varphi_2 r,\ xq + \varphi_3 r,\ xp + yq + \varphi_4 r \\ xp - yq + \varphi_5 r,\ x^2 p + xyq + \varphi_6 r, \end{cases}$$

wo $\varphi_1 \ldots \varphi_6$ Functionen von x, y, z sind.

Die beim ersten Falle ausgeführten Rechnungen zeigen unmittelbar, dass die fünf ersten der infinitesimalen Transformationen (29) die Form:

$$p,\ q,\ xq + r,\ xp + yq,\ xp - yq - 2zr$$

erhalten können. Da andrerseits die Gleichungen:

$$(p,\ x^2p + xyq + \varphi_6 r) = 2xp + yq + \frac{\partial \varphi_6}{\partial x} r$$
$$(q,\ x^2p + xyq + \varphi_6 r) = xq + \frac{\partial \varphi_6}{\partial y} r$$
$$(xp + yq,\ x^2p + xyq + \varphi_6 r) = x^2p + xyq + \left\{ x \frac{\partial \varphi_6}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi_6}{\partial y} \right\} r$$

sofort ergeben:

$$\frac{\partial \varphi_6}{\partial x} = -z, \quad \frac{\partial \varphi_6}{\partial y} = 1,$$
$$x \frac{\partial \varphi_6}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi_6}{\partial y} = \varphi_6 = y - xz,$$

so erhalten wir die sechs infinitesimalen Transformationen:

$$(30) \qquad \begin{cases} p,\ q,\ xq + r,\ xp + yq,\ xp - yq - 2zr \\ x^2p + xyq + (y - xz)r. \end{cases}$$

Diese erzeugen augenscheinlich eine sechsgliedrige Gruppe, die aus der sechsgliedrigen projectiven Gruppe:

$$p,\ q,\ xq,\ xp + yq,\ xp - yq,\ x^2p + xyq$$

der Ebene x, y in derselben Weise durch Erweiterung entsteht, wie die Gruppe (28) aus der allgemeinen linearen Gruppe der Ebene.

Aber auch die Gruppe (30) ist für uns unbrauchbar. Der Punkt: $x = y = z = 0$, der wieder ein Punkt von allgemeiner Lage ist, bleibt nämlich bei den drei infinitesimalen Transformationen:

$$xp + yq,\ xp - yq - 2zr,\ x^2p + xyq + (y - xz)\, r$$

der Gruppe (30) invariant, aber die zugehörige Determinante:

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 \\ x & -y & -2z \\ x^2 & xy & y - xz \end{vmatrix} = -2xy(y - xz)$$

verschwindet nicht identisch, also haben auch zwei Punkte des R_3 der Gruppe (30) gegenüber keine Invariante.

Dritter Fall.

Die verkürzte Gruppe: $\overline{X}_1 f \ldots \overline{X}_6 f$ hat hier die Form (III), S. 413 und die Gruppe: $X_1 f \ldots X_6 f$ daher die Form:

$$(31) \qquad \begin{cases} p + \varphi_1 r,\ q + \varphi_2 r,\ xq + \varphi_3 r,\ xp + yq + \varphi_4 r \\ x^2q + \varphi_5 r,\ x^2p + 2xyq + \varphi_6 r, \end{cases}$$

unter $\varphi_1 \ldots \varphi_6$ Functionen von x, y, z verstanden.

Genau wie im ersten Falle erkennen wir, dass die vier ersten unter den infinitesimalen Transformationen (31) auf die Form:

$$p,\ q,\ xq + r,\ xp + yq + cr$$

gebracht werden können.

Um φ_5 zu bestimmen, bilden wir die Gleichungen:

$$(p,\ x^2q + \varphi_5 r) = 2xq + \frac{\partial \varphi_5}{\partial x} r$$

$$(q,\ x^2q + \varphi_5 r) = \frac{\partial \varphi_5}{\partial y} r$$

$$(xq + r,\ x^2q + \varphi_5 r) = \left(x \frac{\partial \varphi_5}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_5}{\partial z}\right) r$$

$$(xp + yq + cr,\ x^2q + \varphi_5 r) = x^2q + \left\{x \frac{\partial \varphi_5}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi_5}{\partial y} + c \frac{\partial \varphi_5}{\partial z}\right\} r,$$

aus denen sich ergiebt:

$$\frac{\partial \varphi_5}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial \varphi_5}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_5}{\partial z} = 0$$

$$x \frac{\partial \varphi_5}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi_5}{\partial y} + c \frac{\partial \varphi_5}{\partial z} = \varphi_5 = 2x.$$

In derselben Weise erhalten wir aus den Gleichungen:

$$(p,\ x^2p + 2xyq + \varphi_6 r) = 2xp + 2yq + \frac{\partial \varphi_6}{\partial x} r$$

$$(q,\ x^2p + 2xyq + \varphi_6 r) = 2xq + \frac{\partial \varphi_6}{\partial y} r$$

$$(xq + r,\ x^2p + 2xyq + \varphi_6 r) = x^2q + \left(x \frac{\partial \varphi_6}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_6}{\partial z}\right) r$$

$$(xp + yq + cr,\ x^2p + 2xyq + \varphi_6 r) = x^2p + 2xyq + \\ + \left\{x \frac{\partial \varphi_6}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi_6}{\partial y} + c \frac{\partial \varphi_6}{\partial z}\right\} r$$

die einzige noch unbekannte Function φ_6, es wird nämlich:

$$\frac{\partial \varphi_6}{\partial x} = 2c, \quad \frac{\partial \varphi_6}{\partial y} = 2, \quad \frac{\partial \varphi_6}{\partial z} = 0$$

$$x \frac{\partial \varphi_6}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi_6}{\partial y} + c \frac{\partial \varphi_6}{\partial z} = \varphi_6 = 2(y + cx).$$

Demnach kann unsre Gruppe (31) die Form erhalten:

$$(32) \qquad \begin{array}{|c|} \hline p,\ q,\ xq + r,\ xp + yq + cr \\ x^2q + 2xr,\ x^2p + 2xyq + 2(y + cx)r \\ \hline \end{array}.$$

Auch hier ist: $x = y = z = 0$ ein Punkt von allgemeiner Lage. Dieser Punkt bleibt bei den drei infinitesimalen Transformationen:

$$(33) \qquad \begin{cases} xp + (y - cx)q,\ x^2q + 2xr \\ x^2p + 2xyq + 2(y + cx)r \end{cases}$$

invariant und die zugehörige Determinante:

$$(34) \qquad \begin{vmatrix} x & y - cx & 0 \\ 0 & x^2 & 2x \\ x^2 & 2xy & 2(y + cx) \end{vmatrix} = 2x^3(y + cx) - 4x^3y + 2x^3(y - cx)$$

verschwindet identisch, ohne dass alle ihre zweireihigen Unterdeterminanten verschwinden. Demnach (s. Satz 2, S. 406) haben zwei Punkte: x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 des R_3 der Gruppe (32) gegenüber eine und nur eine Invariante und zwar findet man bei der Ausrechnung für diese Invariante den folgenden Ausdruck:

$$z_1 + z_2 - c\,l(x_2 - x_1)^2 - 2\,\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{35}$$

Alles das gilt, welchen Werth auch die Constante c haben mag; da nun diese Constante offenbar nicht durch Einführung neuer Veränderlicher x, y, z weggeschafft werden kann, so ist sie ein wesentlicher Parameter, das heisst die Gruppe (32) repräsentirt ∞^1 verschiedene Gruppentypen.

Es ist jetzt noch zu untersuchen, ob die Gruppe (32) auch wirklich zu den Gruppen gehört, die wir suchen, ob also die Invarianten beliebig vieler Punkte sich durch die Invarianten von Punktepaaren ausdrücken lassen. Da wir aber schon wissen, dass zwei Punkte eine und nur eine Invariante haben, da andrerseits die Schaar der Pseudokugeln (vgl. S. 402):

$$z + z_0 - c\,l(x - x_0)^2 - 2\,\frac{y - y_0}{x - x_0} = \text{const.} \tag{36}$$

nicht blos aus ∞^1, sondern sogar aus ∞^3 verschiedenen Flächen besteht, so brauchen wir nach Satz 4, S. 409 nur noch festzustellen, ob es eine bei der Gruppe (32) invariante Schaar von ∞^2 Curven giebt, von deren Curven sämmtliche Pseudokugeln erzeugt sind.

Da der Punkt: $x = y = z = 0$ ein Punkt von allgemeiner Lage ist, so muss, wenn er festgehalten wird, von jeder invarianten Schaar von ∞^2 Curven die durch ihn gehende Curve in Ruhe bleiben. Nun gestattet der Punkt: $x = y = z = 0$ die drei unabhängigen infinitesimalen Transformationen (33), die natürlich eine dreigliedrige Untergruppe von (32) erzeugen; setzt man aber in der Determinante (34), die zu dieser Untergruppe gehört, alle zweireihigen Determinanten gleich Null, so findet man, dass $x = y = 0$ die einzige durch den Punkt: $x = y = z = 0$ gehende Curve ist, die gleichzeitig mit diesem Punkte invariant bleibt. Da die Curve: $x = y = 0$ bei der Gruppe (32) die ∞^2 Lagen: $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ annimmt, so ist hiermit bewiesen, dass: $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ die einzige bei der Gruppe (32) invariante Schaar von ∞^2 Curven ist; da endlich die Pseudokugeln (36) offenbar nicht von Curven der Schaar: $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ erzeugt sind, so leuchtet ein, dass mehr als zwei Punkte der Gruppe (32) gegenüber keine wesentliche Invariante haben.

Wir erwähnen noch, dass: $x = 0$ die einzige durch den Punkt:

$x = y = z = 0$ gehende Fläche ist, die bei der Gruppe (33) invariant bleibt, und dass infolgedessen ausser der Schaar: $x = \text{const.}$ keine andre Schaar von ∞^1 Flächen die Gruppe (32) gestattet.

Vierter Fall.

Jetzt suchen wir alle sechsgliedrigen Gruppen des Raumes x, y, z, die unsre Forderungen auf S. 408 erfüllen und deren verkürzte Gruppen die Form:

$$\text{(IV)} \qquad p,\ xp,\ x^2p,\ q,\ yq,\ y^2q$$

besitzen. Die infinitesimalen Transformationen dieser Gruppen haben die Gestalt:

$$\text{(37)} \qquad \begin{cases} p + \varphi_1 r,\ q + \varphi_2 r,\ xp + \varphi_3 r,\ yq + \varphi_4 r \\ \qquad x^2p + \varphi_5 r,\ y^2q + \varphi_6 r, \end{cases}$$

wo $\varphi_1 \ldots \varphi_6$ Functionen von x, y, z sind.

Wie im ersten Falle erkennen wir, dass φ_1 und φ_2 ohne Beschränkung der Allgemeinheit gleich Null gesetzt werden können. Durch Combination mit p und q ergiebt sich ferner, dass φ_3 von x und y frei ist, da überdies φ_3 augenscheinlich nicht verschwinden darf, so können wir es durch Einführung eines neuen z gleich 1 machen und haben nunmehr die drei infinitesimalen Transformationen:

$$p,\ q,\ xp + r.$$

Combiniren wir jetzt: $yq + \varphi_4 r$ mit den ebengenannten Transformationen, so finden wir, dass φ_4 von x, y, z frei und also eine blose Constante ist; wir können daher $\varphi_4 = c$ setzen, wo aber die Constante c nicht verschwinden darf.

Um auch φ_5 zu bestimmen, bilden wir die Gleichungen:

$$(p,\ x^2p + \varphi_5 r) = 2xp + \frac{\partial \varphi_5}{\partial x} r$$

$$(q,\ x^2p + \varphi_5 r) = \frac{\partial \varphi_5}{\partial y} r$$

$$(yq + cr,\ x^2p + \varphi_5 r) = \left(y \frac{\partial \varphi_5}{\partial y} + c \frac{\partial \varphi_5}{\partial z}\right) r$$

$$(xp + r,\ x^2p + \varphi_5 r) = x^2p + \left(x \frac{\partial \varphi_5}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_5}{\partial z}\right) r.$$

Von diesen zeigen die drei ersten, dass:

$$\frac{\partial \varphi_5}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial \varphi_5}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_5}{\partial z} = 0$$

ist, die letzte ergiebt daher: $\varphi_5 = 2x$.

Durch eine ganz ähnliche Rechnung findet man: $\varphi_6 = 2cy$, man gelangt also zu der Gruppe:

$$(38) \qquad \boxed{p,\ q,\ xp+r,\ yq+cr,\ x^2p+2xr,\ y^2q+2cyr \quad (c \neq 0)}.$$

Der Parameter c ist hier offenbar wesentlich und kann nicht fortgeschafft werden.

Das Vorhandensein der drei infinitesimalen Transformationen: p, q, $xp+r$ zeigt, dass der Coordinatenanfang ein Punkt von allgemeiner Lage ist. Dieser Punkt bleibt bei den drei infinitesimalen Transformationen:

$$(39) \qquad yq - cxp,\ x^2p + 2xr,\ y^2q + 2cyr \quad (c \neq 0)$$

der Gruppe (38) in Ruhe. Da nun die zugehörige Determinante:

$$(40) \qquad \begin{vmatrix} -cx & y & 0 \\ x^2 & 0 & 2x \\ 0 & y^2 & 2cy \end{vmatrix} = 2cx^2y^2 - 2cx^2y^2$$

identisch verschwindet, während ihre zweireihigen Unterdeterminanten nicht alle null sind, so können wir schliessen, dass zwei beliebige Punkte des Raumes x, y, z der Gruppe (38) gegenüber eine und nur eine Invariante haben. In der That, durch eine leichte Rechnung überzeugt man sich, dass der Ausdruck:

$$(41) \qquad z_1 + z_2 - l(x_2 - x_1)^2 - c.l(y_2 - y_1)^2$$

eine und zwar die einzige Invariante der beiden Punkte: x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 ist.

Die Schaar der Pseudokugeln hat für unsre Gruppe (38) die Form:

$$(42) \qquad z + z_0 - l(x - x_0)^2 - c.l(y - y_0)^2 = \text{const.}$$

und besteht daher sicher aus mehr als ∞^1 Flächen. Andrerseits erkennt man wie im vorigen Falle durch Nullsetzen der zweireihigen Determinanten von (40), dass $x = y = 0$ die einzige durch den Punkt: $x = y = z = 0$ gehende Curve ist, die zugleich mit diesem Punkte in Ruhe bleibt, dass also: $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ die einzige bei der Gruppe (38) invariante Schaar von ∞^2 Curven ist. Da nun die Pseudokugeln (42) augenscheinlich nicht von Curven dieser Schaar erzeugt sind, so ist nach Satz 4, S. 409 sicher, dass mehr als zwei Punkte der Gruppe (38) gegenüber keine wesentliche Invariante haben.

Erwähnt sei noch, dass es ausser den beiden Schaaren: $x = \text{const.}$ und $y = \text{const.}$ keine bei der Gruppe (38) invariante Schaar von ∞^1 Flächen giebt.

B) Bestimmung aller Gruppen, deren verkürzte Gruppen fünfgliedrig sind.

Nach S. 412 f. kann hier die verkürzte Gruppe: $\overline{X}_1 f \ldots \overline{X}_6 f$ auf eine der beiden Formen:

$$\text{(V)} \quad p,\ q,\ xq,\ xp - yq,\ yp$$
$$\text{(VI)} \quad p,\ q,\ xq,\ 2xp + yq,\ x^2 p + xyq$$

gebracht werden. Wir haben also jetzt noch diese beiden Fälle zu behandeln.

Fünfter Fall.

Hat die verkürzte Gruppe die Form (V), so hat die Gruppe: $X_1 f \ldots X_6 f$ die Form:

$$\text{(43)} \quad \begin{cases} \varphi r,\ p + \varphi_1 r,\ q + \varphi_2 r,\ xp - yq + \varphi_3 r \\ xq + \varphi_4 r,\ yp + \varphi_5 r, \end{cases}$$

unter $\varphi,\ \varphi_1 \ldots \varphi_5$ Functionen von $x,\ y,\ z$ verstanden.

Dieser Fall ist bereits auf S. 157 f. erledigt, es ist nämlich dort gezeigt, dass die Gruppe (43) durch geeignete Wahl von z entweder auf die Form:

$$r,\ p,\ q,\ xq,\ xp - yq,\ yp$$

oder auf die Form:

$$\text{(44)} \quad \begin{cases} r,\ p,\ q + xr,\ xp - yq \\ yp + \frac{1}{2} y^2 r,\ xq + \frac{1}{2} x^2 r \end{cases}$$

gebracht werden kann. Die erste dieser Gruppen kommt hier nicht in Betracht, da q und xq dieselben Bahncurven haben. Die Gruppe (44) ist uns aus dem Abschnitt II bekannt (s. das. Theor. 66, S. 421); wir wissen ferner, dass diese Gruppe, wenn man die Ausdrücke: $x,\ \frac{1}{2} y,\ z - \frac{1}{2} xy$ an Stelle von $x,\ y,\ z$ als neue Veränderliche einführt, in die projective Gruppe:

$$\text{(45)} \quad \boxed{p - yr,\ q + xr,\ r,\ xq,\ xp - yq,\ yp}$$

übergeht (a. a. O. S. 445 f.), wir wollen daher diese projective Form der Gruppe unsrer Untersuchung zu Grunde legen.

Das Auftreten der drei infinitesimalen Transformationen: $p - yr$, $q + xr$, r zeigt, dass $x = y = z = 0$ ein Punkt von allgemeiner Lage ist. Da nun dieser Punkt bei den drei infinitesimalen Transformationen:

$$\text{(46)} \quad xq,\ xp - yq,\ yp$$

der Gruppe (45) invariant bleibt und da die zugehörige Determinante:

$$(47) \qquad \begin{vmatrix} 0 & x & 0 \\ x & -y & 0 \\ y & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

identisch verschwindet, ohne dass alle ihre zweireihigen Unterdeterminanten dasselbe thun, so ist nach Satz 2, S. 406 sicher, dass zwei Punkte: x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 der Gruppe (45) gegenüber eine und nur eine Invariante haben. Man findet für diese Invariante sehr leicht den Ausdruck:

$$(48) \qquad z_2 - z_1 + x_1 y_2 - x_2 y_1 .$$

Die zur Gruppe (45) gehörige Schaar von Pseudokugeln:

$$(49) \qquad z - z_0 + x_0 y - y_0 x = \text{const.}$$

enthält ∞^3 verschiedene Flächen und zwar besteht sie aus allen Ebenen des Raumes x, y, z. Da überdies die Gruppe (44) nach Abschn. II, Theor. 73, S. 445 keine andre Schaar von ∞^2 Curven invariant lässt als die Schaar: $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$, so gilt von der Gruppe (45) augenscheinlich dasselbe, und da die ∞^3 Pseudokugeln (49) nicht von Curven der Schaar: $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ erzeugt sind, so ergiebt sich aus Satz 4, S. 409 sofort, dass mehr als zwei Punkte der Gruppe (44) gegenüber keine wesentliche Invariante haben.

Noch ist zu erwähnen, dass die Gruppe (45) überhaupt keine Schaar von ∞^1 Flächen invariant lässt (s. Abschn. II, a. a. O.)

Sechster Fall.

Hat die verkürzte Gruppe: $\overline{X}_1 f \ldots \overline{X}_6 f$ die Form (VI), S. 422, so hat die Gruppe: $X_1 f \ldots X_6 f$ nothwendig die Form:

$$(50) \qquad \begin{cases} \varphi r,\ p + \varphi_1 r,\ q + \varphi_2 r,\ 2xp + yq + \varphi_3 r \\ \qquad xq + \varphi_4 r,\ x^2 p + xyq + \varphi_5 r, \end{cases}$$

wo $\varphi, \varphi_1 \ldots \varphi_5$ Functionen von x, y, z sind.

Genau wie auf S. 157 f. können wir erreichen, dass $\varphi = 1$, $\varphi_1 = 0$ $\varphi_2 = Cx$ wird; dann sind zugleich φ_3, φ_4 und φ_5 sicher von z frei.

Zur Bestimmung von $\varphi_3(x, y)$ bilden wir die Gleichungen:

$$(p,\ 2xp + yq + \varphi_3 r) = 2p + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} r$$

$$(q + Cxr,\ 2xp + yq + \varphi_3 r) = q + \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial y} - 2Cx\right) r,$$

die ergeben:

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} = D, \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} = 3Cx + E,$$

also: $C = 0$ und $\varphi_3 = Dx + Ey + H$, wo aber H ohne Weiteres weggelassen werden kann, während D und E gleich Null werden,

wenn man: $z - \frac{1}{2}Dx - Ey$ als neues z einführt. Wir haben also jetzt die vier ersten der Transformationen (50) in der einfachen Form:

$$p,\ q,\ r,\ 2xp + yq.$$

Combiniren wir $xq + \varphi_4(x, y)r$ mit p und q, so erkennen wir, dass φ_4 die Form hat: $\varphi_4 = Lx + My$, wo die überflüssige Integrationsconstante bereits weggelassen ist. Ferner erhalten wir:

$$(2xp + yq,\ xq + (Lx + My)r) = xq + (2Lx + My)r,$$

so dass L verschwinden muss, während M natürlich nicht verschwinden darf, weil sonst q und xq dieselben Bahncurven hätten. Indem wir daher $\frac{1}{M}z$ als neues z einführen, können wir erreichen, dass M gleich 1 wird.

Endlich bilden wir die Gleichungen:

$$(p,\ x^2p + xyq + \varphi_5 r) = 2xp + yq + \frac{\partial \varphi_5}{\partial x} r$$

$$(q,\ x^2p + xyq + \varphi_5 r) = \qquad xq + \frac{\partial \varphi_5}{\partial y} r$$

$$(xq + yr,\ x^2p + xyq + \varphi_5 r) = \left(x \frac{\partial \varphi_5}{\partial y} - xy\right) r$$

$$(2xp + yq,\ x^2p + xyq + \varphi_5 r) = 2(x^2p + xyq) + \left(2x \frac{\partial \varphi_5}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi_5}{\partial y}\right) r$$

und finden aus ihnen:

$$\frac{\partial \varphi_5}{\partial x} = c, \quad \frac{\partial \varphi_5}{\partial y} = y$$

$$2x \frac{\partial \varphi_5}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi_5}{\partial y} = 2cx + y^2 = 2\varphi_5 + K,$$

wo wir jedoch K gleich Null setzen dürfen. Damit sind wir denn zu der Gruppe gelangt:

$$(51) \qquad \begin{cases} p,\ q,\ r,\ 2xp + yq,\ xq + yr \\ x^2p + xyq + (\frac{1}{2}y^2 + cx)r. \end{cases}$$

Da p, q, r auftreten, ist der Punkt: $x = y = z = 0$ wieder ein Punkt von allgemeiner Lage. Die infinitesimalen Transformationen der Gruppe (51), die diesen Punkt invariant lassen, lauten:

$$2xp + yq,\ xq + yr,\ x^2p + xyq + (\tfrac{1}{2}y^2 + cx)r$$

und die zugehörige Determinante:

$$\begin{vmatrix} 2x & y & 0 \\ 0 & x & y \\ x^2 & xy & \frac{1}{2}y^2 + cx \end{vmatrix}$$

hat den Werth:

$$x^2y^2 + 2cx^3 - 2x^2y^2 + x^2y^2 = 2cx^3,$$

sie verschwindet also nur dann identisch, wenn die Constante c den Werth Null hat, während ihre zweireihigen Unterdeterminanten auch für $c = 0$ nicht alle verschwinden. Demnach ist die Gruppe:

(52)
$$\begin{array}{|c|}\hline p,\ q,\ r,\ 2xp + yq,\ xq + yr \\ x^2p + xyq + \tfrac{1}{2}y^2r \\ \hline\end{array}$$

unter allen Gruppen von der Form (51) die einzige, bei der zwei Punkte eine und nur eine Invariante haben. Bei der Ausrechnung findet man, dass diese Invariante die Form:

(53)
$$z_2 - z_1 - \frac{(y_2 - y_1)^2}{2(x_2 - x_1)}$$

besitzt.

Die Schaar der Pseudokugeln:

(54)
$$z - z_0 - \frac{(y - y_0)^2}{2(x - x_0)} = \text{const.},$$

die zu unsrer Gruppe (52) gehört, besteht offenbar aus ∞^3 verschiedenen Flächen. Ferner überzeugt man sich leicht, dass die infinitesimalen Transformationen der Gruppe (52), die den Punkt von allgemeiner Lage: $x = y = z = 0$ festhalten, keine andere durch diesen Punkt gehende Curve in Ruhe lassen, als die Gerade: $x = y = 0$; demnach ist: $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ die einzige Schaar von ∞^2 Curven, die bei der Gruppe (52) invariant bleibt, und der Satz 4, S. 409 zeigt wiederum, dass mehr als zwei Punkte der Gruppe (52) gegenüber keine wesentliche Invariante haben.

Schliesslich bemerken wir noch, dass die Gruppe (52) nur eine einzige Schaar von ∞^1 Flächen invariant lässt, nämlich die Schaar: $x = \text{const.}$

Damit sind auch alle imprimitiven Gruppen des R_3 gefunden, die unsre auf S. 399 gestellten Forderungen erfüllen.

§ 88.

Die in der Einleitung des Kapitels ausgesprochene Aufgabe hat nach den Ergebnissen der beiden letzten Paragraphen folgende Lösung:

Theorem 36. *Ist eine endliche continuirliche Gruppe des Raumes x, y, z so beschaffen, dass zwei Punkte des Raumes bei ihr eine und nur eine Invariante haben und dass alle Invarianten von mehr als zwei Punkten sich durch die Invarianten von Punktepaaren ausdrücken lassen, so ist die Gruppe*

transitiv und sechsgliedrig und zwar ist sie durch eine Punkttransformation des Raumes x, y, z ähnlich entweder mit der Gruppe der Euklidischen Bewegungen oder mit der sechsgliedrigen projectiven Gruppe einer nicht ausgearteten Fläche zweiten Grades oder mit einer der nachstehenden vier Gruppen:

[1] $$p,\ q,\ xp + r,\ yq + cr,\ x^2p + 2xr,\ y^2q + 2cyr \qquad (c \neq 0)$$

[2] $$p,\ q,\ xq + r,\ x^2q + 2xr,\ xp + yq + cr,\ x^2p + 2xyq + 2(y + cx)r$$

[3] $$p - yr,\ q + xr,\ r,\ xq,\ xp - yq,\ yp$$

[4] $$p,\ q,\ r,\ xq + yr,\ 2xp + yq,\ x^2p + xyq + \tfrac{1}{2}y^2r$$

Der Parameter c ist hier beide Male wesentlich und kann nicht fortgeschafft werden.

Wie wir im vorigen Paragraphen gezeigt haben, lässt jede der vier Gruppen [1] ... [4] nur eine Schaar von ∞^2 Curven invariant, nämlich die Schaar: $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ Wir wollen jetzt noch hinzufügen, dass diese vier Gruppen sämmtlich *systatisch* sind.

In der That, die infinitesimalen Transformationen der genannten vier Gruppen sind alle mit der infinitesimalen Transformation r vertauschbar, damit ist nach Abschn. I, S. 510, Satz 2 bewiesen, dass die Gruppen systatisch sind; man kann sich aber auch direkt davon überzeugen, denn bei jeder der Gruppen [1] ... [4] lassen alle infinitesimalen Transformationen, die einen Punkt x_0, y_0, z_0 von allgemeiner Lage festhalten, zugleich jeden Punkt der Geraden: $x = x_0$, $y = y_0$ in Ruhe.

Schliesslich sei noch erwähnt, dass bei den Gruppen [1], [2], [3] die ∞^2 Linienelemente durch jeden festgehaltenen Punkt von allgemeiner Lage dreigliedrig transformirt werden, bei der Gruppe [4] dagegen blos zweigliedrig; die Gruppe [4] enthält eben in der Umgebung jedes Punktes: x_0, y_0, z_0 von allgemeiner Lage eine infinitesimale Transformation von zweiter Ordnung in: $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$.

Man könnte fragen, ob die Gruppen [1], [2], [4], die keine projective Form haben, durch geeignete Wahl von x, y, z in projective Gruppen überführbar sind. Für die Gruppe [4] ist diese Frage sicher

mit Nein zu beantworten, denn sollte sie in eine projective Gruppe übergehen können, so müsste die infinitesimale Transformation zweiter Ordnung, die sie in der Umgebung des Punktes von allgemeiner Lage: $x = y = z = 0$ enthält, die Form:

$$(\lambda x + \mu y + \nu z)(xp + yq + zr) + \cdots$$

haben, wo die weggelassenen Glieder in x, y, z von dritter und höherer Ordnung wären; da diese nothwendige Bedingung nicht erfüllt ist, kann die Gruppe [4] sicher nicht mit einer projectiven Gruppe ähnlich sein.

§ 89.

Erledigung des Problems für reelle Gruppen.

Bisher betrachteten wir die Veränderlichen x, y, z als complexe Grössen, nunmehr wollen wir sie auf das Gebiet der reellen Zahlen beschränken und wollen die in der Einleitung des Kapitels gestellte Aufgabe unter der Voraussetzung lösen, dass die Gruppen reell und dass nur reelle Punkttransformationen zulässig sind.

Wir fragen also jetzt nach allen reellen endlichen continuirlichen *Gruppen des R_3, bei denen zwei reelle Punkte eine und nur eine Invariante haben, während drei oder mehr reelle Punkte keine wesentliche Invariante besitzen.* Dabei beschränken wir uns natürlich auf solche reelle Gruppen, deren endliche Gleichungen eine gewisse Anzahl von Differentiationen nach den Veränderlichen und nach den Parametern zulassen (vgl. S. 365).

Von vornherein ist klar, dass die gesuchten Gruppen sämmtlich transitiv sind (vgl. S. 400). Nach S. 366 können wir uns daher in jedem einzelnen Falle durch eine reelle Punkttransformation solche neue Veränderliche x, y, z eingeführt denken, dass die betreffende Gruppe durch reelle Gleichungen dargestellt wird, in denen die auftretenden Functionen der Veränderlichen und der Parameter *analytische* Functionen sind im Weierstrassschen Sinne. Wir brauchen daher nur solche m-gliedrige Gruppen zu betrachten, in deren infinitesimalen Transformationen:

$$X_k f = \xi_k(x, y, z)\, p + \eta_k(x, y, z)\, q + \zeta_k(x, y, z)\, r \qquad (k = 1, 2 \ldots m)$$

die ξ_k, η_k, ζ_k in der Umgebung eines beliebigen reellen Punktes: x_0, y_0, z_0 von allgemeiner Lage gewöhnliche Potenzreihen von $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ sind, aber selbstverständlich Potenzreihen mit lauter reellen Coefficienten.

Es sei: $X_1 f \ldots X_m f$ oder kurz G_m eine solche m-gliedrige reelle Gruppe, die unsre Forderungen in Bezug auf die Invarianten zweier und mehrerer Punkte erfüllt. Dann stellt der Ausdruck:

$$e_1 X_1 f + \cdots + e_m X_m f,$$

wenn wir in ihm x, y, z als complexe Veränderliche und $e_1 \ldots e_m$ als complexe Parameter betrachten, die allgemeine infinitesimale Transformation einer gewissen m-gliedrigen Gruppe G_m' von complexen Transformationen dar (vgl. S. 362). Es ist nun leicht zu sehen, dass diese Gruppe G_m' in Bezug auf die Invarianten zweier und mehrerer Punkte ebenfalls unsre Forderungen erfüllt, das heisst: bei G_m' haben zwei Punkte eine und nur eine Invariante, mehr als zwei Punkte dagegen haben keine wesentliche Invariante. In der That, die Invarianten von s Punkten sind bei G_m sowohl wie bei G_m' einfach die Lösungen des vollständigen Systems:

$$X_k^{(1)} f + X_k^{(2)} f + \cdots + X_k^{(s)} f = 0 \quad (k = 1 \ldots m),$$

auf die Zahl der von einander unabhängigen Lösungen dieses vollständigen Systems hat es aber gar keinen Einfluss, ob man x, y, z als reelle oder als complexe Veränderliche ansieht. Wenn also bei reellen x, y, z zwei Punkte eine und nur eine Invariante haben und alle Invarianten von mehr als zwei Punkten sich durch die von Punktepaaren ausdrücken lassen, so gilt das auch bei complexen x, y, z und umgekehrt; man kann ja sogar immer erreichen, dass alle Invarianten von s Punkten reelle Functionen der $3s$ Veränderlichen: $x_1, y_1, z_1, \ldots, x_s, y_s, z_s$ werden.

Hiermit ist Folgendes bewiesen: *Wenn eine m-gliedrige reelle Gruppe: $X_1 f \ldots X_m f$ unsre Forderungen in Bezug auf die Invarianten mehrerer Punkte erfüllt, so liefert sie, sobald man x, y, z als complexe Veränderliche auffasst, eine Gruppe, die alle in* § 85 *entwickelten Eigenschaften besitzt; die Gruppe: $X_1 f \ldots X_m f$ ist daher nothwendig sechsgliedrig und durch eine reelle oder complexe Punkttransformation des Raumes x, y, z mit einer der Gruppen des Theorems* 36, *S.* 425 *ähnlich.*

Die in Theorem 36 aufgezählten Gruppen zerfallen in zwei Klassen. Jede Gruppe der ersten Klasse lässt eine Gleichung zweiten Grades:

$$(55)\quad \alpha_{11} dx^2 + \alpha_{22} dy^2 + \alpha_{33} dz^2 + 2\alpha_{12} dx\, dy + 2\alpha_{23} dy\, dz + 2\alpha_{31} dz\, dx = 0$$

invariant, wo die α Functionen von x, y, z sind und wo die zugehörige Determinante nicht identisch verschwindet; ausserdem sind diese Gruppen so beschaffen, dass die ∞^2 Linienelemente durch jeden festgehaltenen Punkt von allgemeiner Lage dreigliedrig transformirt werden. Die Gruppen der zweiten Klasse, die Gruppen [1] ... [4] zeichnen

sich nach S. 426 dadurch aus, dass jede von ihnen die Schaar der ∞^2 Geraden: $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ invariant lässt, sonst aber keine andre Schaar von ∞^2 Curven.

Soll eine sechsgliedrige reelle Gruppe des R_3 mit einer Gruppe ähnlich sein, die der ersten unsrer beiden Klassen angehört, so muss sie offenbar eine Gleichung von der Form (55) invariant lassen, deren Determinante nicht identisch verschwindet und in der die α reelle Functionen von x, y, z sind, ausserdem müssen aber noch die ∞^2 reellen Linienelemente durch jeden festgehaltenen reellen Punkt von allgemeiner Lage dreigliedrig transformirt werden. Jede sechsgliedrige reelle Gruppe von dieser Art ist aber nach Theorem 35, S. 391 durch eine reelle Punkttransformation ähnlich entweder mit der Gruppe der Euklidischen Bewegungen, oder mit der sechsgliedrigen reellen projectiven Gruppe, die einen reellen nicht ausgearteten unendlich fernen Kegelschnitt sowie die Volumina invariant lässt, oder mit der sechsgliedrigen projectiven Gruppe einer nicht ausgearteten Fläche zweiten Grades, die durch eine reelle Gleichung zwischen x, y, z dargestellt wird; dabei sind jedoch noch drei Fälle zu unterscheiden, denn diese Fläche zweiten Grades kann entweder imaginär, oder reell und nichtgeradlinig, oder reell und geradlinig sein.

Nunmehr suchen wir alle reellen sechsgliedrigen Gruppen, die mit einer der Gruppen: [1] ... [4] auf S. 426 ähnlich sind.

Da jede der Gruppen: [1] ... [4] nur die Schaar: $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$, sonst aber keine Schaar von ∞^2 Curven invariant lässt, so muss jede reelle sechsgliedrige Gruppe: $X_1 f \ldots X_6 f$, die mit einer von ihnen ähnlich ist, eine aber auch nur eine Schaar von ∞^2 Curven invariant lassen. Ueberdies muss diese Schaar nothwendig reell sein, denn wäre sie imaginär, so bliebe bei der Gruppe: $X_1 f \ldots X_6 f$, die ja reell ist, auch die conjugirt imaginäre Curvenschaar invariant, es gäbe also zwei verschiedene invariante Schaaren, was nicht der Fall sein kann. Durch eine reelle Punkttransformation können wir nun diese eine vorhandene invariante Schaar von ∞^2 Curven in die Schaar: $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ überführen, wir dürfen daher die reelle Gruppe: $X_1 f \ldots X_6 f$ von vornherein in der Form:

$$X_k f = \xi_k(x, y)\, p + \eta_k(x, y)\, q + \zeta_k(x, y, z)\, r \qquad (k = 1, 2 \ldots 6)$$

annehmen, wo natürlich ξ_k, η_k, ζ_k reelle Functionen ihrer Argumente sind.

Wie früher (s. S. 412), so erzeugen auch jetzt die sechs verkürzten infinitesimalen Transformationen:

$$\overline{X}_k f = \xi_k(x, y)\, p + \eta_k(x, y)\, q \quad (k = 1 \ldots 6)$$

eine, offenbar reelle Gruppe in den zwei Veränderlichen x, y und es versteht sich nach S. 412 von selbst, dass diese verkürzte Gruppe mindestens fünfgliedrig sein muss und dass sie als Gruppe einer Ebene aufgefasst jede reelle oder imaginäre Schaar von ∞^1 Curven, die sie invariant lässt, dreigliedrig transformiren muss.

Lässt nun die verkürzte Gruppe: $\overline{X}_1 f \ldots \overline{X}_6 f$ gar keine Schaar von ∞^1 Curven der Ebene invariant, so ist sie nach S. 370 f. durch eine reelle Punkttransformation der Ebene mit einer der beiden Gruppen: (I), S. 413 und (V), S. 422 ähnlich. Lässt sie andrerseits blos eine Schaar von ∞^1 Curven invariant, so ist diese Schaar nothwendig reell und die Gruppe kann daher auf Grund der Entwicklungen der SS. 378 f. durch eine reelle Punkttransformation auf eine der drei Formen: (II) (III), S. 413 und (VI), S. 422 gebracht werden. Lässt die Gruppe: $\overline{X}_1 f \ldots \overline{X}_6 f$ endlich zwei verschiedene Schaaren von ∞^1 Curven invariant, so kann sie, wenn diese beiden Schaaren reell sind, die Form (IV), S. 413 erhalten, wenn sie dagegen conjugirt imaginär sind, die Form:

$$\text{(VII)} \qquad \begin{cases} p,\ q,\ xp + yq,\ yp - xq \\ (x^2 - y^2)p + 2xyq,\ 2xyp + (y^2 - x^2)q \end{cases}$$

(vgl. S. 380) und zwar beide Male durch reelle Punkttransformationen.

Hat die verkürzte Gruppe: $\overline{X}_1 f \ldots X_6 f$ eine der Formen (I) ... (VI), so führen genau dieselben Rechnungen wie früher (s. S. 414—425) zur Bestimmung aller möglichen Formen der Gruppe: $X_1 f \ldots X_6 f$, denn bei diesen Rechnungen sind, wie man sich leicht überzeugt, nur solche Transformationen angewendet, bei denen die Gruppe: $X_1 f \ldots X_6 f$, wenn sie einmal reell ist, auch reell bleibt. Wir sehen daraus, dass die Formen (I) und (II) der verkürzten Gruppe auch zu keinen reellen Gruppen von der hier verlangten Beschaffenheit führen und dass jede reelle Gruppe: $X_1 f \ldots X_6 f$, die unsre Forderungen erfüllt und deren verkürzte Gruppe eine der Formen (III) ... (VI) besitzt, durch eine reelle Punkttransformation mit einer der Gruppen: [2], [1], [3], [4] ähnlich ist. Natürlich muss aber der Parameter c, der in den beiden Gruppen [1] und [2] auftritt, einen reellen Werth haben.

Hat endlich die verkürzte Gruppe: $\overline{X}_1 f \ldots \overline{X}_6 f$ die Form (VII), so muss die Gruppe: $X_1 f \ldots X_6 f$ durch eine imaginäre Transformation mit einer Gruppe von der Form [1] ähnlich sein, denn die Gruppe (IV), S. 413 entsteht ja aus der Gruppe (VII), wenn man $x + iy$ und $x - iy$ an Stelle von x und y als neue Veränderliche einführt

(s. S. 336). Wir wollen jedoch von diesem Umstande keinen Gebrauch machen und ziehen es vor direct alle sechsgliedrigen reellen Gruppen zu bestimmen, die unsre Forderungen erfüllen und deren verkürzte Gruppen die Form (VII) haben.

Wir suchen also jetzt alle sechsgliedrigen reellen Gruppen von der Form:

$$(56)\qquad \begin{cases} p + \varphi_1 r,\ q + \varphi_2 r,\ xp + yq + \varphi_3 r,\ yp - xq + \varphi_4 r \\ (x^2 - y^2)\,p + 2xyq + \varphi_5 r,\ 2xyp + (y^2 - x^2)\,q + \varphi_6 r, \end{cases}$$

bei denen zwei Punkte eine und nur eine und mehr als zwei Punkte keine wesentliche Invariante haben; $\varphi_1 \ldots \varphi_6$ sind dabei natürlich reelle Functionen von x, y, z.

Genau wie auf S. 414 f. sehen wir ein, dass die drei ersten der infinitesimalen Transformationen (56) durch eine Punkttransformation und zwar durch eine reelle Punkttransformation auf die Form:

$$p,\ q,\ xp + yq + ar$$

gebracht werden können, wo a eine reelle Constante bezeichnet.

Combiniren wir: $yp - xq + \varphi_4 r$ mit p und q, so ergiebt sich, dass φ_4 von x und y frei ist. Ferner bekommen wir:

$$(xp + yq + ar,\ yp - xq + \varphi_4(z)\,r) = a\varphi_4'(z)\,r,$$

wenn also a nicht verschwindet, so ist φ_4 auch von z frei; ist andrerseits $a = 0$ und $\varphi_4 \neq 0$, so führen wir die reelle Function

$$\int \frac{dz}{\varphi_4(z)}$$

als neues z ein und erreichen dadurch, dass $\varphi_4 = 1$ wird. Wir können demnach beide Fälle zusammenfassen, indem wir die vier ersten unter den Transformationen (56) in der Form:

$$p,\ q,\ xp + yq + ar,\ yp - xq + br$$

annehmen, wo b ebenfalls eine reelle Constante bedeutet.

Nunmehr bilden wir die Gleichungen:

$$(p,\ (x^2 - y^2)p + 2xyq + \varphi_5 r) = 2(xp + yq) + \frac{\partial \varphi_5}{\partial x}\, r$$

$$(q,\ (x^2 - y^2)p + 2xyq + \varphi_5 r) = -2(yp - xq) + \frac{\partial \varphi_5}{\partial y}\, r$$

$$(xp + yq + ar,\ (x^2 - y^2)p + 2xyq + \varphi_5 r) = (x^2 - y^2)p + 2xyq + \left\{ x\frac{\partial \varphi_5}{\partial x} + y\frac{\partial \varphi_5}{\partial y} + a\frac{\partial \varphi_5}{\partial z} \right\} r$$

$$(yp - xq + br,\ (x^2 - y^2)p + 2xyq + \varphi_5 r) = 2xyp + (y^2 - x^2)q + \left\{ y\frac{\partial \varphi_5}{\partial x} - x\frac{\partial \varphi_5}{\partial y} + b\frac{\partial \varphi_5}{\partial z} \right\} r$$

$$(yp - xq + br,\ 2xyp + (y^2 - x^2)q + \varphi_6 r) = -(x^2 - y^2)p - 2xyq + \\ + \left\{ y\frac{\partial \varphi_6}{\partial x} - x\frac{\partial \varphi_6}{\partial y} + b\frac{\partial \varphi_6}{\partial z} \right\} r$$

und erhalten:

$$(57)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi_5}{\partial x} = 2a, \quad \dfrac{\partial \varphi_5}{\partial y} = -2b, \\ x\dfrac{\partial \varphi_5}{\partial x} + y\dfrac{\partial \varphi_5}{\partial y} + a\dfrac{\partial \varphi_5}{\partial z} = \varphi_5 \\ y\dfrac{\partial \varphi_5}{\partial x} - x\dfrac{\partial \varphi_5}{\partial y} + b\dfrac{\partial \varphi_5}{\partial z} = \varphi_6 \\ y\dfrac{\partial \varphi_6}{\partial x} - x\dfrac{\partial \varphi_6}{\partial y} + b\dfrac{\partial \varphi_6}{\partial z} = -\varphi_5. \end{cases}$$

Hieraus ergiebt sich zunächst:

$$\varphi_5 = 2(ax - by) + \omega(z),\quad a\omega'(z) = \omega(z) = a^2\omega''(z)$$

und demnach:

$$\varphi_6 = 2(bx + ay) + b\omega'(z);$$

setzen wir aber diesen Werth von φ_6 in die letzte der Gleichungen (57) ein, so kommt:

$$b^2\omega''(z) = -\omega(z) = -a^2\omega''(z),$$

Gleichungen, die für reelle Werthe von a und b nur dann bestehen können, wenn $\omega(z)$ verschwindet.

Damit sind wir zu der Gruppe gelangt:

$$(58)\quad \begin{array}{c} p,\ q,\ xp + yq + ar,\ yp - xq + br \\ (x^2 - y^2)p + 2xyq + 2(ax - by)r \\ 2xyp + (y^2 - x^2)q + 2(bx + ay)r \end{array}.$$

Hier dürfen natürlich a und b nicht beide verschwinden, weil sonst die Gruppe intransitiv wäre; ist daher $b = 0$, so können wir durch Einführung eines neuen z stets erreichen, dass $a = 1$ wird, andrerseits können wir das b, wenn es nicht verschwindet, stets gleich 1 machen.

Bei der Gruppe (58) haben, wie man leicht findet, zwei Punkte: x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 eine und nur eine Invariante, nämlich diese:

$$z_1 + z_2 - a\,.\,l\,\{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\} + 2b\ \mathrm{arctg}\,\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Man könnte sich auch in der früheren Weise (vgl. z. B. S. 419) leicht überzeugen, dass, sobald a und b nicht beide verschwinden, drei und mehr Punkte keine wesentliche Invariante haben; doch ziehen wir es vor, dies dadurch zu beweisen, dass wir die imaginäre Punkttransformation

angeben, bei der die Gruppe (58) in die Gruppe [1], S. 426 übergeht, denn von der Gruppe [1] wissen wir schon, dass sie alle unsre Forderungen erfüllt.

Führen wir in die Gruppe (58) die neuen Veränderlichen:

$$x_1 = x + iy, \quad y_1 = x - iy, \quad z_1 = z$$

ein, so ergiebt sich die Gruppe:

$$p_1 + q_1, \quad i(p_1 - q_1), \quad x_1 p_1 + y_1 q_1 + a r_1, \quad i(y_1 q_1 - x_1 p_1) + b r_1$$
$$x_1^2 p_1 + y_1^2 q_1 + \{(a + ib) x_1 + (a - ib) y_1\} r_1$$
$$i(y_1^2 q_1 - x_1^2 p_1) + i\{(a - ib) y_1 - (a + ib) x_1\} r_1.$$

Da nun $a + ib \neq 0$ ist, so können wir noch $\frac{2 z_1}{a + ib}$ als neues z_1 einführen und bekommen so eine Gruppe, die genau die Form [1] hat. Die Gruppe (58) ist demnach mit der Gruppe [1] durch die imaginäre Transformation:

$$x_1 = x + iy, \quad y_1 = x - iy, \quad z_1 = \frac{2z}{a + ib}$$

ähnlich und zwar entspricht den Parametern a und b der Gruppe (58) der Werth:

(59) $$c = \frac{a - ib}{a + ib}$$

des Parameters c der Gruppe [1].

Damit ist bewiesen, dass die reelle Gruppe (58) alle unsre Forderungen erfüllt, und es sind nunmehr überhaupt alle reellen Gruppen des R_3 gefunden, die das thun:

Theorem 37. *Ist eine reelle endliche continuirliche Gruppe des Raumes x, y, z so beschaffen, dass ihr gegenüber zwei Punkte eine und nur eine Invariante haben und dass die Invarianten von mehr als zwei Punkten sich sämmtlich durch die von Punktepaaren ausdrücken lassen, so ist sie sechsgliedrig und durch eine reelle Punkttransformation des Raumes mit einer der nachstehenden Gruppen ähnlich:*

1 $\boxed{p, q, r, xq - yp, yr - zq, zp - xr}$

2 $\boxed{p, q, r, xq - yp, yr + zq, zp + xr}$

3 $\boxed{p + xU, q + yU, r + zU, xq - yp, yr - zq, zp - xr}$

4 $\boxed{p - xU, q - yU, r - zU, xq - yp, yr - zq, zp - xr}$

5 $\boxed{p - xU, q - yU, r + zU, xq - yp, yr + zq, zp + xr}$

6 $\begin{array}{c} p,\ q,\ xp+yq+cr,\ yp-xq+r \\ (x^2-y^2)p+2xyq+2(cx-y)r,\ 2xyp+(y^2-x^2)q+2(x+cy)r \end{array}$

7 $\begin{array}{c} p,\ q,\ xp+yq+r,\ yp-xq \\ (x^2-y^2)p+2xyq+2xr,\ 2xyp+(y^2-x^2)q+2yr \end{array}$

8 $\begin{array}{c} p,\ q,\ xp+r,\ yq+cr,\ x^2p+2xr,\ y^2q+2cyr \\ (c\neq 0) \end{array}$

9 $\begin{array}{c} p,\ q,\ xq+r,\ x^2q+2xr,\ xp+yq+cr \\ x^2p+2xyq+2(y+cx)r \end{array}$

10 $p-yr,\ q+xr,\ r,\ xq,\ xp-yq,\ yp$

11 $\begin{array}{c} p,\ q,\ r,\ xq+yr,\ 2xp+yq \\ x^2p+xyq+\frac{1}{2}y^2r \end{array}$.

Der reelle Parameter c ist hier jedesmal wesentlich und kann nicht fortgeschafft werden.

Um das Verständniss dieser Tabelle zu erleichtern, bemerken wir noch Folgendes:

Für $xp+yq+zr$ ist zur Abkürzung jedesmal U geschrieben.

Die Gruppe 2 lässt den Kegelschnitt invariant, den der reelle Kegel: $x^2+y^2-z^2=0$ auf der unendlich fernen Ebene ausschneidet, sie entsteht aus der Gruppe 1 der Euklidischen Bewegungen, wenn man iz als neues z einführt.

Die Gruppe 4 lässt die reelle nichtgeradlinige Fläche zweiten Grades: $x^2+y^2+z^2=1$ invariant und die Gruppe 5 die reelle geradlinige Fläche: $x^2+y^2-z^2=1$. Diese Gruppen werden aus der Gruppe 3 der Fläche: $x^2+y^2+z^2+1=0$ erhalten, wenn man entweder ix, iy, iz oder ix, iy, z als neue Veränderliche einführt, die zugehörigen Invarianten zweier Punkte sind daher nach S. 410 f. ohne Weiteres angebbar.

Statt der Gruppe (58) stehen in unsrer Tabelle die beiden Gruppen 6 und 7, weil nach S. 432 stets einer von den Parametern a und b gleich 1 gemacht werden kann; doch ist zu beachten, dass man in der Gruppe 6 den Parameter c auf solche Werthe beschränken darf, die $\gtrless 0$ sind, denn zu den Parametern $+c$ und $-c$ gehören zwei gleichberechtigte Gruppen, wie man sich sofort überzeugt, wenn man x und y vertauscht und z durch $-z$ ersetzt.

Die Gruppen 8 ... 11 sind die Gruppen [1] ... [4] auf S. 426; insbesondere sei noch erwähnt, dass man in der Gruppe 8 dem Parameter c nur solche Werthe zu ertheilen braucht, dass $c^2 \leqq 1$ ist, denn bei der Transformation:

$$x_1 = y, \quad y_1 = x, \quad z_1 = \frac{z}{c}$$

geht die Gruppe 8 in eine von derselben Form über, deren Parameter den Werth $\frac{1}{c}$ besitzt.

§ 90.

Mit ein paar Worten wollen wir noch auseinandersetzen, wie man das soeben für den dreifach ausgedehnten Raum erledigte Problem in der Ebene lösen kann.

Soll eine endliche continuirliche Gruppe der Ebene so beschaffen sein, dass zwei Punkte eine und nur eine Invariante haben und mehr als zwei Punkte keine wesentliche Invariante, so erkennt man zunächst wie in § 85, dass die Gruppe transitiv und dreigliedrig sein muss und dass sie keine zwei infinitesimalen Transformationen enthalten darf, die die Bahncurven gemein haben.

Umgekehrt ist klar, dass bei jeder dreigliedrigen transitiven Gruppe G der Ebene zwei Punkte stets eine und nur eine Invariante haben. Wenn nun G ausserdem noch keine zwei infinitesimalen Transformationen mit gemeinsamen Bahncurven enthält, so lässt sich zeigen, dass mehr als zwei Punkte keine wesentliche Invariante haben.

In der That, halten wir einen Punkt P_1 von allgemeiner Lage fest, so bleibt noch eine eingliedrige Untergruppe von G übrig, bei der sich die andern Punkte der Ebene auf ∞^1 Curven bewegen, nämlich auf den zu G gehörigen Pseudokreisen mit dem Mittelpunkte P_1. Gäbe es nun blos ∞^1 Pseudokreise, hingen also die Pseudokreise nicht von ihren Mittelpunkten ab, so würde die infinitesimale Transformation von G, die den Punkt P_1 invariant lässt, dieselben Bahncurven haben, wie die von ihr unabhängige infinitesimale Transformation, die irgend einen andern Punkt von allgemeiner Lage invariant lässt. Da das nicht sein darf, so können wir schliessen, dass es mindestens ∞^2 Pseudokreise giebt. Halten wir jetzt ausser dem Punkte P_1 noch einen zweiten Punkt P_2 von allgemeiner Lage fest, so schneiden sich die beiden Pseudokreise mit den Mittelpunkten P_1 und P_2, die durch einen dritten Punkt P_3 von allgemeiner Lage gehen, ausser in P_3 höchstens noch in isolirten Punkten; demnach bleibt, sobald P_1 und P_2 festgehalten sind, überhaupt jeder Punkt P der Ebene in Ruhe und zwar wegen der beiden Invarianten, die zu den beiden Punkte-

paaren P_1, P und P_2, P gehören. Hieraus folgt, dass unter den gemachten Voraussetzungen alle Invarianten von mehr als drei Punkten durch die von Punktepaaren ausgedrückt werden können (vgl. auch S. 409 f.).

Wenn wir daher alle Gruppen der Ebene suchen, die in Bezug auf die Invarianten mehrerer Punkte die bekannten Eigenschaften besitzen, und wenn wir zunächst auf die Realitätsverhältnisse keine Rücksicht nehmen, so brauchen wir blos unter den dreigliedrigen Gruppen, die auf S. 57 zusammengestellt sind, die aufzusuchen, die transitiv sind und bei denen zwei infinitesimale Transformationen niemals dieselben Bahncurven haben. Wir finden auf diese Weise nur die folgenden vier Gruppen:

$$(60)\quad \left\{\begin{array}{c} \boxed{p,\ q,\ xp + cyq \quad (c \neq 0)} \\ \boxed{p + x^2p + xyq,\ q + xyp + y^2q,\ yp - xq} \\ \boxed{xq,\ xp - yq,\ yp} \\ \boxed{p,\ q,\ xp + (x+y)q} \end{array}\right. .$$

Hier ist die Gruppe:

$$p,\ xp + yq,\ x^2p + (2xy + y^2)q$$

durch die projective Gruppe des Kegelschnitts: $x^2 + y^2 + 1 = 0$ ersetzt (vgl. S. 70, 76 und 88). Ebenso ist die Gruppe: p, $2xp + yq$, $x^2p + xyq$ durch eine mit ihr ähnliche projective Gruppe ersetzt (vgl. S. 95).

Die Invarianten der beiden Punkte x_1, y_1 und x_2, y_2 den Gruppen (60) gegenüber lauten der Reihe nach:

$$(61)\quad \left\{\begin{array}{l} cl(x_2 - x_1)^2 - l(y_2 - y_1)^2, \quad \dfrac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2}{(1 + x_1 x_2 + y_1 y_2)^2} \\ x_1 y_2 - x_2 y_1, \quad (x_2 - x_1)\, e^{-\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}. \end{array}\right.$$

Wünscht man alle reellen Gruppen der Ebene, die die verlangten Eigenschaften besitzen, so muss man zu den Gruppen (60) noch die beiden hinzufügen (vgl. S. 370 ff. und 428):

$$(62)\quad \left\{\begin{array}{c} \boxed{p,\ q,\ yp - xq + c(xp + yq)} \\ \boxed{p - x^2p - xyq,\ q - xyp - y^2q,\ yp - xq} \end{array}\right. .$$

Von diesen liefert die erste die Invariante*):

$$\{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\}\, e^{2c \operatorname{arctg} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}; \tag{63}$$

die zweite entsteht aus der zweiten der Gruppen (60), wenn man ix, iy an die Stelle von x, y als neue Veränderliche einführt, die zu ihr gehörige Invariante kann daher sofort angegeben werden**).

Kapitel 21.

Kritik der Helmholtzschen Untersuchungen.

Herr v. Helmholtz hat in seiner schon auf S. 396 angeführten Arbeit eine Behandlung des Riemann-Helmholtzschen Problems gegeben, mit der wir uns hier näher beschäftigen wollen.

Wir beginnen damit, dass wir (in § 91) den Wortlaut der von ihm aufgestellten Axiome wiedergeben. Sodann (in § 92 und 93) stellen wir fest, welche Fassung diese Axiome erhalten können, wenn man die Begriffe und die Ausdrucksweisen der Gruppentheorie heranzieht. In § 94 liefern wir eine Kritik der Schlüsse, die Herr v. Helmholtz für den Fall des dreifach ausgedehnten Raumes aus seinen Axiomen zieht, und zeigen, dass er *zu seinem Endergebniss gelangt, indem er stillschweigend eine Reihe Voraussetzungen macht, die sämmtlich unrichtig sind.*

Will man diesen sehr wesentlichen Mangel der Helmholtzschen

---

*) Herr v. Helmholtz hat sich jedenfalls schon 1868 mit Untersuchungen beschäftigt, deren Ziel nach unsrer jetzigen Ausdrucksweise so bezeichnet werden kann: es sollen solche Gruppen der Ebene bestimmt werden, bei denen zwei Punkte eine und nur eine und mehr als zwei Punkte keine wesentliche Invariante haben. Er hat schon damals bemerkt, dass in der Ebene eine Schaar von Bewegungen denkbar ist, bei der zwei Punkte die Invariante (63) besitzen.

**) Die dreigliedrigen Gruppen der Ebene hatte Lie schon in der Zeit von 1874—76 bestimmt, wenn auch ohne alle Rechnungen bis ins Einzelne hinzuschreiben (Gött. Nachr. v. 1874; norwegisches Archiv 1878). Im Jahre 1884 gab er sodann eine detaillirte Aufzählung der verschiedenen Normalformen, auf die sich alle derartigen Gruppen bringen lassen. Später (1887) beschäftigte sich Herr Poincaré mit den Grundlagen der Geometrie der Ebene und berücksichtigte auch in seiner darauf bezüglichen Arbeit (Bull. de la Soc. Math. Bd. 15) die älteren gruppentheoretischen Untersuchungen von Lie, während er Lies Arbeit von 1884 und auch Lies erste Mittheilung über die Grundlagen der Geometrie (1886) nicht kannte, ja nicht einmal die Helmholtzsche Abhandlung aus dem Jahre 1868. Die interessanten Ergebnisse, zu denen Herr Poincaré gelangt, gehen eigentlich unmittelbar aus Lies älteren Untersuchungen hervor.

Entwicklungen beseitigen, so bieten sich zwei verschiedene Wege dar: man kann entweder die Axiome des Herrn v. Helmholtz ganz bei Seite lassen und blos seine Rechnungen ins Auge fassen oder man kann, ohne seine Rechnungen zu berücksichtigen, von seinen Axiomen ausgehen.

Den ersten Weg schlagen wir in § 95 ein, indem wir zeigen, *welche Axiome aufgestellt werden müssen, damit man durch Rechnungen, die den Helmholtzschen ihren Grundgedanken nach verwandt sind, zum Ziele gelangt.*

In § 96 verfolgen wir den zweiten Weg und setzen auseinander, welche Schlüsse die Gruppentheorie aus den Helmholtzschen Axiomen zu ziehen gestattet. Es ergiebt sich dabei, dass *zwar diese Axiome, wenn man sie in einer nahe liegenden Weise deutet, ausreichen,* um die Euklidischen und die Nichteuklidischen Bewegungen des Raumes von drei Dimensionen zu charakterisiren, dass aber *jedenfalls eins seiner Axiome, das Monodromieaxiom, überflüssig ist.*

Das hiermit gewonnene Ergebniss legt die Frage nahe, ob nicht auch andre Theile der Helmholtzschen Axiome entbehrt werden können. Die Antwort auf diese Frage wird in Kapitel 23 gegeben; es zeigt sich, dass *auch seine übrigen Axiome überflüssige Bestandtheile enthalten.*

§ 91.

Die Helmholtzschen Axiome.

Herr v. Helmholtz legt seiner Untersuchung die folgenden Axiome, oder, wie er sie nennt, Hypothesen zu Grunde*):

„I. Der Raum von n Dimensionen ist eine n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, das heisst, das bestimmte Einzelne in ihm, der Punct, ist bestimmbar durch Abmessung irgend welcher, continuirlich und unabhängig von einander veränderlicher Grössen (Coordinaten), deren Anzahl n ist. Jede Bewegung eines Punctes ist daher begleitet von einer continuirlichen Aenderung mindestens einer der Coordinaten. Sollten Ausnahmen vorkommen, wo entweder die Aenderung discontinuirlich wird, oder trotz der Bewegung gar keine Aenderung sämmtlicher Coordinaten stattfindet, so sind diese Ausnahmen doch beschränkt auf gewisse durch eine oder mehrere Gleichungen begrenzte Orte (also Puncte, Linien, Flächen u. s. w.), die zunächst von der Untersuchung ausgeschlossen bleiben mögen.

„Zu bemerken ist, dass unter der Continuität der Aenderung bei der Bewegung nicht nur gemeint ist, dass alle zwischen den Endwerthen der sich ändernden Grössen liegenden Zwischenwerthe durchlaufen werden, sondern auch, dass Differentialquotienten existiren, das heisst, dass die Verhältnisse der zusammengehörigen Aenderungen der Coordinaten sich bei

*) Gött. Nachr. 1868, S. 197 ff.

zunehmender Verringerung der Grösse dieser Aenderungen einem festen Verhältnisse nähern.

„II. Es wird die Existenz von beweglichen aber in sich festen Körpern, beziehlich Punctsystemen, vorausgesetzt, wie sie nöthig ist, um Vergleichung der Raumgrössen durch Congruenz vornehmen zu können. Da wir hier noch keine speciellen Messungsmethoden der Raumgrössen voraussetzen dürfen, so kann die Definition eines festen Körpers an dieser Stelle nur folgende sein: Zwischen den $2n$ Coordinaten eines jeden Punctpaares, welches einem in sich festen Körper angehört, besteht eine von der Bewegung des letzteren unabhängige Gleichung, welche für alle congruenten Punctpaare die gleiche ist.

„Congruent sind solche Punctpaare, welche gleichzeitig oder nach einander mit demselben Punctpaare des Raumes zusammenfallen können.

„III. Es wird vollkommen freie Beweglichkeit der festen Körper vorausgesetzt; das heisst, es wird vorausgesetzt, dass jeder Punct derselben an den Ort jedes andern continuirlich übergehen könne, so weit er nicht durch die Gleichungen, die zwischen ihm und den übrigen Puncten des festen Systems bestehen, zu dem er gehört, gebunden ist.

„Der erste Punct eines in sich festen Systems ist also absolut beweglich. Wenn er festgestellt ist, besteht für den zweiten Punct eine Gleichung, und eine seiner Coordinaten wird Function der $(n-1)$ übrigen. Nachdem auch der zweite festgestellt ist, bestehen zwei Gleichungen für den Dritten u. s. w. Im Ganzen sind also $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$ Grössen zur Bestimmung der Lage eines in sich festen Systems erforderlich.

„Aus dieser Annahme und der unter II aufgestellten folgt, dass zwei in sich feste Punctsysteme A und B, die in einer ersten Lage von A zur Congruenz entsprechender Puncte gebracht werden konnten, auch in jeder andern Lage von A zur Congruenz aller derselben Puncte, die vorher congruirten, müssen gebracht werden können. Das heisst mit andern Worten, die Congruenz zweier Raumgebilde ist nicht von ihrer Lage abhängig, oder alle Theile des Raumes sind, wenn von ihrer Begrenzung abgesehen wird, unter einander congruent.

„IV. Endlich müssen wir dem Raume noch eine Eigenschaft beilegen, die der Monodromie der Functionen einer complexen Grösse analog ist, und die sich darin ausspricht, dass zwei congruente Körper auch noch congruent sind, nachdem der eine eine Umdrehung um irgend eine Rotationsaxe erlitten hat. Drehung ist analytisch dadurch charakterisirt, dass eine gewisse Anzahl von Puncten des bewegten Körpers während der Bewegung unveränderte Coordinaten behalten, Umkehr der Bewegung dadurch, dass früher durchlaufene continuirlich in einander übergehende Werthcomplexe der Coordinaten rückwärts durchlaufen werden. Wir können die betreffende Thatsache so aussprechen: Wenn ein fester Körper sich um $n-1$ seiner Puncte dreht, und diese so gewählt sind, dass seine Stellung nur noch von einer unabhängig Veränderlichen abhängt, so führt die Drehung ohne Umkehr schliesslich in die Anfangslage zurück, von der sie ausgegangen ist.“

Die mitgetheilten Axiome des Herrn v. Helmholtz schreiben den Bewegungen des n-fach ausgedehnten Raumes gewisse Eigenschaften zu, und es handelt sich nun darum, alle möglichen Systeme von Bewegungen zu bestimmen, bei denen die angegebenen Eigenschaften vorkommen. Um auf dieses Problem unsre Gruppentheorie anwenden zu können, müssen wir vor allen Dingen zeigen, dass wir es überhaupt mit einem gruppentheoretischen Probleme zu thun haben. Das soll im nächsten Paragraphen geschehen.

§ 92.

Folgerungen aus den Helmholtzschen Axiomen.

Das *erste* Helmholtzsche Axiom sagt blos aus, dass continuirliche Bewegungen möglich seien, und bestimmt, was überhaupt unter einer continuirlichen Bewegung verstanden werden soll.

Wenn wir eine Bewegung im n-fach ausgedehnten Raume betrachten, so denken wir uns am bequemsten zwei n-fach ausgedehnte Räume in einander liegend, von denen der eine fest, der andre beweglich ist; die besondre Beschaffenheit der betrachteten Bewegung bestimmt dann, in welcher Weise die einzelnen Punkte des beweglichen Raumes innerhalb des festen Raumes ihre Lage ändern. Nun verlangt das Axiom I, dass jede Bewegung von einer continuirlichen Aenderung der Coordinaten der bewegten Punkte begleitet sei. Denken wir uns daher irgend eine Bewegung, die zur Zeit $t = 0$ beginnt und während einer gewissen Zeit t fortgesetzt wird, und nehmen wir an, dass ein beliebiger Punkt des beweglichen Raumes auf den festen Raum bezogen zur Zeit $t = 0$ die Coordinaten $x_1 \ldots x_n$ und zur Zeit t die Coordinaten $\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_n$ habe, so wird unsre Bewegung durch Gleichungen von der Form:

$$\mathfrak{x}_\nu = F_\nu(x_1 \ldots x_n, t) \quad (\nu = 1 \ldots n) \tag{1}$$

dargestellt, die für $t = 0$ in die Gleichungen: $\mathfrak{x}_\nu = x_\nu$ übergehen; die F_ν sind dabei reelle Functionen ihrer Argumente.

Wir sehen hieraus, dass jede continuirliche Bewegung des n-fach ausgedehnten Raumes eine continuirliche Schaar von ∞^1 reellen Punkttransformationen dieses Raumes liefert und zwar eine Schaar, in der die identische Transformation enthalten ist.

Was die Beschaffenheit der Functionen F_ν anlangt, so ist zu bemerken, dass Herr v. Helmholtz jedenfalls die Existenz erster Differentialquotienten nach den x und nach t voraussetzt; das folgt schon aus dem Axiome I, obwohl es da nicht mit der wünschens-

werthen Bestimmtheit ausgesprochen ist, ganz zweifellos wird es aber, wenn man die Rechnungen auf S. 202—206 seiner Arbeit ins Auge fasst. Dort benutzt Herr v. Helmholtz übrigens auch die Existenz gewisser *Differentialquotienten zweiter Ordnung*, er differentiirt nämlich zuerst nach den x und dann nach den auftretenden Parametern, dem würde entsprechen, dass die Differentialquotienten der F_r nach den x ihrerseits nach t differentiirbar wären.

Zu beachten ist ferner, dass Herr v. Helmholtz solche Stellen, an denen die Stetigkeit unterbrochen ist, von der Betrachtung ausschliesst. Wir können das schärfer ausdrücken, indem wir, wie es auch sonst gebräuchlich ist, festsetzen, dass man sich bei der ganzen Untersuchung auf einen begränzten Theil des Raumes beschränken soll, innerhalb dessen alle auftretenden Functionen und ihre ersten Differentialquotienten stetig sind; es ist das genau dieselbe Festsetzung, die auch wir von jeher bei allen allgemeinen Untersuchungen über continuirliche Gruppen getroffen haben.

In seinem *zweiten* Axiome kennzeichnet Herr v. Helmholtz die Bewegungen des n-fach ausgedehnten Raumes näher, indem er angiebt, wie sich zwei beliebige Punkte des oben erwähnten beweglichen Raumes bei den verschiedenen Bewegungen zu einander verhalten. Natürlich beziehen sich die Forderungen des Axioms II und ebenso die der folgenden Axiome nur auf solche Punkte, die sich innerhalb jenes begränzten Theiles des n-fach ausgedehnten Raumes befinden und auch während der Bewegung darin bleiben.

Wir betrachten unsern beweglichen Raum in irgend einer Lage innerhalb des festen Raumes und fassen zwei beliebige Punkte des beweglichen Raumes ins Auge, die, auf den festen Raum bezogen, die Coordinaten: $x_1^0 \ldots x_n^0$, $y_1^0 \ldots y_n^0$ haben; die Grössen: $x_1^0 \ldots x_n^0$, $y_1^0 \ldots y_n^0$ besitzen dann bestimmte Zahlenwerthe, die wir uns aber ganz beliebig gewählt denken können. Ferner seien $x_1 \ldots x_n$, $y_1 \ldots y_n$ die Coordinaten der beiden besprochenen Punkte in irgend einer andern Lage des beweglichen Raumes. Das zweite Helmholtzsche Axiom verlangt dann, dass zwischen den Coordinaten $x_1 \ldots x_n$, $y_1 \ldots y_n$ eine von allen Bewegungen unabhängige Gleichung bestehe, also eine Gleichung, die auch in jeder neuen Lage unsers Punktepaares von den Coordinaten seiner beiden Punkte befriedigt wird. In dem Axiome wird überdies ausdrücklich hervorgehoben, dass zwischen den $2n$ Coordinaten eines *jeden* Punktepaares, das einem in sich festen Körper angehört, eine solche Gleichung bestehen solle. Hierin liegt, dass die Gleichung zwischen $x_1 \ldots x_n$, $y_1 \ldots y_n$ stets eine wirkliche Gleichung

sein soll, wie auch die Anfangslagen: $x_1^0 \ldots x_n^0$, $y_1^0 \ldots y_n^0$ der beiden Punkte gewählt sein mögen.

In Axiom II wird nun weiter verlangt, dass die besprochene Gleichung für alle congruenten Punktepaare, also für alle Punktepaare, die durch Bewegungen in einander übergeführt werden können, dieselbe sei, sie hängt daher ausser von $x_1 \ldots x_n$, $y_1 \ldots y_n$ nur noch von den Coordinaten irgend eines beliebig wählbaren congruenten Punktepaares ab, also etwa von $x_1^0 \ldots x_n^0$, $y_1^0 \ldots y_n^0$, sie kann mithin auf die Form:

$$(2) \qquad \Phi(x_1^0 \ldots x_n^0,\ y_1^0 \ldots y_n^0,\ x_1 \ldots x_n,\ y_1 \ldots y_n) = 0$$

gebracht werden. Insbesondere muss diese Gleichung noch erfüllt sein, wenn das Punktepaar x_ν, y_ν mit dem Punktepaare x_ν^0, y_ν^0 zusammenfällt, da aber den Grössen x_ν^0, y_ν^0 alle beliebigen Zahlenwerthe ertheilt werden können und da infolgedessen zwischen: $x_1^0 \ldots x_n^0$, $y_1^0 \ldots y_n^0$ allein keine Relation bestehen kann, so ergiebt sich, dass die Gleichung (2) bei der Substitution:

$$x_\nu = x_\nu^0,\ y_\nu = y_\nu^0 \quad (\nu = 1 \ldots n)$$

in eine Identität übergehen muss. Hieraus folgt zugleich, dass (2) nicht von allen $2n$ Grössen x_ν^0, y_ν^0 frei sein kann.

Nunmehr denken wir uns das Punktepaar x_ν, y_ν der continuirlichen Bewegung unterworfen, die durch die Gleichungen (1) dargestellt wird; es geht dabei in ein neues Punktepaar über, dessen Punkte in dem festen Raume die Coordinaten:

$$(3) \qquad \begin{cases} \mathfrak{x}_\nu = F_\nu(x_1 \ldots x_n,\ t) \\ \mathfrak{y}_\nu = F_\nu(y_1 \ldots y_n,\ t) \end{cases} \quad (\nu = 1 \ldots n)$$

besitzen. Da dieses neue Punktepaar dieselbe Gleichung erfüllen muss wie das Punktepaar x_ν, y_ν, so ergiebt sich, dass die Gleichung:

$$(2') \qquad \Phi(x_1^0 \ldots x_n^0,\ y_1^0 \ldots y_n^0,\ \mathfrak{x} \ldots \mathfrak{x}_n,\ \mathfrak{y}_1 \ldots \mathfrak{y}_n) = 0$$

besteht, welchen Werth auch t haben mag. Machen wir in dieser Gleichung die Substitution (3), so bekommen wir eine Gleichung zwischen $x_1 \ldots x_n$, $y_1 \ldots y_n$ und t, die für alle Werthe von t erfüllt sein muss. Erinnern wir uns daher, dass $x_1 \ldots x_n$, $y_1 \ldots y_n$ durch die Relation (2) verknüpft sind und dass diese Relation von allen Bewegungen unabhängig sein soll, so erkennen wir, dass die Gleichung (2′) bei der Substitution (3) in eine Gleichung übergehen muss, die mit (2) äquivalent ist. Wäre das nämlich nicht der Fall, ginge also (2′) bei der Substitution (3) nicht in eine Gleichung über, die eine Folge von (2) ist, so wäre die Gleichung (2) zwischen den Coor-

dinaten des bewegten Punktepaares offenbar nicht von der Bewegung unabhängig, sondern würde sich im Verlaufe der Bewegung ändern.

Da die Gleichung (2) nicht von allen $2n$ Grössen x_ν^0, y_ν^0 frei sein kann, dürfen wir sie uns nach einer dieser Grössen, etwa nach y_n^0 aufgelöst denken:

$$(4) \qquad y_n^0 = \varphi(x_1^0 \ldots x_n^0,\ y_1^0 \ldots y_{n-1}^0,\ x_1 \ldots x_n,\ y_1 \ldots y_n).$$

Aus dem vorhin Gesagten ergiebt sich nunmehr, dass die Gleichung:

$$(4') \qquad y_n^0 = \varphi(x_1^0 \ldots x_n^0,\ y_1^0 \ldots y_{n-1}^0,\ \mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_n,\ \mathfrak{y}_1 \ldots \mathfrak{y}_n)$$

bei der Substitution (3) in (4) übergeht, und da wir den Grössen x_ν^0, y_ν^0 alle beliebigen Zahlenwerthe ertheilen können, muss das gelten, welche Werthe auch die x_ν^0, y_ν^0 haben mögen, das heisst die Gleichung:

$$(5) \qquad \begin{cases} \varphi(x_1^0 \ldots x_n^0,\ y_1^0 \ldots y_{n-1}^0,\ \mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_n,\ \mathfrak{y}_1 \ldots \mathfrak{y}_n) = \\ = \varphi(x_1^0 \ldots x_n^0,\ y_1^0 \ldots y_{n-1}^0,\ x_1 \ldots x_n,\ y_1 \ldots y_n) \end{cases}$$

muss sich bei der Substitution (3) in eine Identität verwandeln.

Alles das bleibt auch dann noch richtig, wenn wir den Grössen: $x_1^0 \ldots x_n^0$, $y_1^0 \ldots y_{n-1}^0$ bestimmte Zahlenwerthe: $\alpha_1 \ldots \alpha_n$, $\beta_1 \ldots \beta_{n-1}$ ertheilen; setzen wir daher:

$$\varphi(\alpha_1 \ldots \alpha_n,\ \beta_1 \ldots \beta_{n-1},\ x_1 \ldots x_n,\ y_1 \ldots y_n) = \Omega(x_1 \ldots x_n,\ y_1 \ldots y_n),$$

so erhalten wir aus (5) die Gleichung:

$$(6) \qquad \Omega(\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_n,\ \mathfrak{y}_1 \ldots \mathfrak{y}_n) = \Omega(x_1 \ldots x_n,\ y_1 \ldots y_n),$$

die ebenfalls bei der Substitution (3) in eine Identität übergeht. Wir finden also, dass die beiden Punkte $x_1 \ldots x_n$, $y_1 \ldots y_n$ den ∞^1 Transformationen (1) gegenüber die Invariante: $\Omega(x_1 \ldots x_n,\ y_1 \ldots y_n)$ besitzen. Zugleich ergiebt sich, dass die Gleichung (2) oder die mit ihr äquivalente Gleichung (4) auf die Form:

$$(7) \qquad \Omega(x_1 \ldots x_n,\ y_1 \ldots y_n) = \Omega(x_1^0 \ldots x_n^0,\ y_1^0 \ldots y_n^0)$$

gebracht werden kann.

Die Gleichungen (1) stellten eine beliebige unter den continuirlichen Bewegungen dar, die in dem n-fach ausgedehnten Raume als möglich angenommen wurden; die eben durchgeführten Betrachtungen zeigen daher, dass die Function $\Omega(x_1 \ldots x_n,\ y_1 \ldots y_n)$ der Coordinaten des Punktepaares $x_1 \ldots x_n$, $y_1 \ldots y_n$ bei allen Bewegungen, deren dieses Punktepaar fähig ist, ihren Zahlenwerth beibehält, dass also bei Zugrundelegung des zweiten Helmholtzschen Axioms jedes Punktepaar des früher erwähnten beweglichen Raumes allen Bewegungen gegenüber eine *Invariante* besitzt. Mit andern Worten:

Ist:

(1) $$\xi_r = F_r(x_1 \ldots x_n, t) \quad (r = 1 \ldots n)$$

die Schaar von ∞^1 Transformationen, die durch eine beliebige continuirliche Bewegung des n-fach ausgedehnten Raumes bestimmt wird, so besitzen zwei Punkte: $x_1 \ldots x_n$, $y_1 \ldots y_n$ der Schaar (1) *gegenüber stets eine Invariante:*

$$\Omega(x_1 \ldots x\ ,\ y_1 \ldots y_n)$$

und zwar haben die beiden Punkte diese Invariante gegenüber jeder Schaar von ∞^1 Transformationen, die durch eine der als möglich angenommenen continuirlichen Bewegungen des Raumes bestimmt wird.

Doch muss hervorgehoben werden, dass die Existenz einer solchen Invariante blos eine Folge des zweiten Helmholtzschen Axioms ist, *dass dagegen die Forderung, es solle eine solche Invariante existiren, dieses Axiom nicht vollständig ersetzt.*

In der That, das zweite Axiom verlangt, wie wir oben sahen, dass zwischen den Coordinaten je zweier von einander verschiedener Punkte unsers beweglichen Raumes eine von der Bewegung unabhängige Gleichung bestehe und zwar eine wirkliche Gleichung, also eine, die nicht für einzelne Punktepaare bedeutungslos wird. Haben nun zwei Punkte: $x_1 \ldots x_n$ und $y_1 \ldots y_n$ des beweglichen Raumes allen Bewegungen gegenüber die Invariante: $\Omega(x, y)$, so folgt daraus allerdings im Allgemeinen, dass zwischen ihren $2n$ Coordinaten eine von allen Bewegungen unabhängige Gleichung besteht, nämlich die Gleichung:

(7) $$\Omega(x_1 \ldots x_n;\ y_1 \ldots y_n) = \Omega(x_1^0 \ldots x_n^0;\ y_1^0 \ldots y_n^0),$$

in der die beiden von einander verschiedenen Werthsysteme: $x_1^0 \ldots x_n^0$ und: $y_1^0 \ldots y_n^0$ die Coordinaten des Punktepaares: $x_1 \ldots x_n$, $y_1 \ldots y_n$ bei irgend einer bestimmten Lage des beweglichen Raumes bezeichnen; in besondern Fällen kann es jedoch vorkommen, dass (7) keine wirkliche Gleichung zwischen $x_1 \ldots x_n$, $y_1 \ldots y_n$ darstellt, zum Beispiel dann, wenn die rechte Seite von (7) für gewisse Werthsysteme: $x_1^0 \ldots x_n^0$, $y_1^0 \ldots y_n^0$ die Form: Null durch Null annimmt.

Hieraus folgt, dass wir, um den Inhalt des zweiten Helmholtzschen Axioms vollständig zu erschöpfen, uns nicht begnügen dürfen, für jedes Punktepaar die Existenz einer Invariante zu verlangen, sondern dass wir noch eine zweite Forderung hinzufügen müssen, die etwa so ausgedrückt werden kann:

Die Invariante $\Omega(x_1 \ldots x_n, y_1 \ldots y_n)$ des Punktepaares: $x_1 \ldots x_n$, $y_1 \ldots y_n$ muss so beschaffen sein, dass die Gleichung (7) *stets eine wirkliche Gleichung zwischen $x_1 \ldots x_n$ und $y_1 \ldots y_n$ ist, welche zwei von ein-*

ander verschiedenen Werthsysteme man auch für $x_1^0 \ldots x_n^0$, $y_1^0 \ldots y_n^0$ *einsetzen mag.*

Selbstverständlich braucht diese Forderung nur für alle Werthsysteme: $x_1^0 \ldots x_n^0$, $y_1^0 \ldots y_n^0$ erfüllt zu sein, die dem früher erwähnten begränzten Bereiche des n-fach ausgedehnten Raumes angehören.

Bevor wir zur Betrachtung des dritten Helmholtzschen Axioms übergehen, wollen wir erst gewisse Folgerungen erwähnen, die sich aus der Existenz der Invariante $\Omega(x, y)$ ziehen lassen.

Die Gleichungen:

$$x_\nu' = F_\nu(x_1 \ldots x_n;\ t) \quad (\nu = 1 \ldots n) \tag{8}$$

und:

$$x_\nu'' = \Phi_\nu(x_1' \ldots x_n';\ \tau) \quad (\nu = 1 \ldots n) \tag{9}$$

mögen irgend zwei continuirliche Bewegungen des n-fach ausgedehnten Raumes darstellen. Denken wir uns zuerst die Bewegung (8) während der Zeit t ausgeführt und dann die Bewegung (9) während der Zeit τ, so wird der Punkt: $x_1 \ldots x_n$ schliesslich in die Lage: $x_1'' \ldots x_n''$ kommen, die durch die Gleichungen:

$$x_\nu'' = \Phi_\nu(F_1(x, t) \ldots F_n(x, t);\ \tau) \quad (\nu = 1 \ldots n) \tag{10}$$

bestimmt ist. Da nun die Gleichungen (10) offenbar eine Transformation darstellen, so ergiebt sich, dass wir durch Ausführung zweier continuirlicher Bewegungen nach einander stets eine gewisse Transformation des Raumes erhalten. Dasselbe gilt natürlich von der Ausführung beliebig vieler derartiger Bewegungen nach einander.

Erinnern wir uns jetzt, dass die beiden Punkte: $x_1 \ldots x_n$, $y_1 \ldots y_n$ sowohl der Transformation (8) als der Transformation (9) gegenüber die Invariante $\Omega(x, y)$ haben, so sehen wir sofort, dass sie diese Invariante auch jeder Transformation (10) gegenüber besitzen und überhaupt jeder Transformation gegenüber, die durch Ausführung mehrerer continuirlicher Bewegungen nach einander erhalten wird. Also:

Führt man eine continuirliche Bewegung aus oder mehrere solche Bewegungen nach einander, so erhält man stets eine Transformation, bei der zwei beliebige Punkte: x_ν *und* y_ν *die Invariante* $\Omega(x, y)$ *haben.*

Durch die als möglich angenommenen continuirlichen Bewegungen ist demnach eine gewisse Schaar von Transformationen des Raumes bestimmt, der gegenüber zwei Punkte x_ν und y_ν die Invariante $\Omega(x, y)$ haben. Von welcher besonderen Beschaffenheit diese Schaar ist, das können wir vorläufig noch nicht sagen, darüber giebt erst das dritte Helmholtzsche Axiom Auskunft. Lässt sich doch aus dem Wort-

laute des zweiten Axioms noch nicht einmal schliessen, ob zwei Punkte *nur* eine Invariante haben sollen.

Das *dritte* Axiom des Herrn v. Helmholtz (s. S. 439, Z. 14—24 v. o.) besteht aus zwei Theilen.

Der erste Theil (Z. 14—18) kann mit Berücksichtigung des früher Gesagten so gefasst werden: Jeder Punkt des beweglichen Raumes soll continuirlich an den Ort jedes andern Punktes dieses Raumes übergehen können, soweit er nicht dadurch gebunden ist, dass die Invarianten aller Punktepaare des beweglichen Raumes, denen er angehört, während der Bewegung ihre Zahlenwerthe behalten müssen.

Hierin liegt, dass jede Invariante, die ein beliebiges Punktsystem: $P_1, P_2, P_3 \ldots$ allen Bewegungen gegenüber besitzt, sich durch die Invarianten der in dem Systeme enthaltenen Punktepaare ausdrücken lassen muss. Ist nämlich J irgend eine Invariante, die das Punktsystem: $P_1, P_2, P_3, \ldots$ gegenüber allen Bewegungen hat, so behält die Function J bei allen Bewegungen ihren Zahlenwerth. Liesse sich nun J nicht durch die Invarianten der Punktepaare: P_1, P_2; P_1, P_3; P_2, P_3; ... ausdrücken, so wäre die Beweglichkeit des Punktsystems: $P_1, P_2, P_3 \ldots$ nicht blos dadurch beschränkt, dass die Invarianten jener Punktepaare während der Bewegung ihre Zahlenwerthe behalten müssen, sondern auch durch die davon unabhängige Bedingung, dass J stets seinen Zahlenwerth behalten muss; das aber widerspräche dem oben aufgestellten Axiome.

Aus dem ersten Theile des dritten Helmholtzschen Axioms folgt demnach, dass ein Punkt allen Bewegungen gegenüber gar keine Invariante hat und dass drei oder mehr Punkte gegenüber allen Bewegungen nur solche Invarianten haben, die sich durch die Invarianten der unter ihnen enthaltenen Punktepaare ausdrücken, mit andern Worten: *ein einzelner Punkt hat überhaupt keine Invariante, zwei Punkte haben allen möglichen Bewegungen gegenüber jedenfalls eine Invariante, drei oder mehr Punkte dagegen haben keine* wesentliche *Invariante.* Da wir jedoch noch nicht wissen, ob diese Eigenschaft der Bewegungen die in jenem ersten Theile aufgestellten Forderungen vollständig ersetzt, so müssen wir nach wie vor die Forderung hinzufügen, *dass jeder Punkt P des beweglichen Raumes in seiner Bewegung nur durch die Invarianten beschränkt sei, die er mit den andern Punkten des beweglichen Raumes hat.*

Es bleibt jetzt noch der zweite Theil des dritten Helmholtzschen Axioms zu besprechen (s. S. 439, Z. 19—24 v. o.).

Der zweite Theil des Axioms III scheint auf den ersten Blick blos

Folgerungen aus dem ersten Theile zu enthalten, und auch Herr v. Helmholtz hat ihn offenbar so gemeint. Es verhält sich jedoch anders. Zwar die Zeilen 19—22 sprechen nur Thatsachen aus, die eine unmittelbare Folge der früher gemachten Voraussetzungen sind, insbesondere sind die Worte: „Der erste Punct ... beweglich" nur ein andrer Ausdruck dafür, dass ein einzelner Punkt keine Invariante besitzt. Aber in den Zeilen 23 und 24 steckt eine neue Voraussetzung, die aus den früheren nicht folgt.

Herr v. Helmholtz denkt sich nämlich eine Anzahl, etwa m Punkte: P_1, $P_2 \ldots P_m$ des beweglichen Raumes festgehalten. Nach Axiom II bestehen dann für die Coordinaten jedes andern Punktes P des beweglichen Raumes gewisse Gleichungen, die aussagen, dass die Invarianten der m Punktepaare: P, P_1; P, P_2; ...; P, P_m während aller noch möglichen Bewegungen ihre Zahlenwerthe behalten. Ueber die Zahl und die Beschaffenheit dieser Gleichungen sagen aber die früheren Voraussetzungen nichts aus, darüber geben erst gewisse Annahmen Aufschluss, die in den Zeilen 23 und 24 stillschweigend gemacht werden.

Herr v. Helmholtz verlangt da, so können wir es ausdrücken, Folgendes: Wenn die m Punkte: P_1, $P_2, \ldots P_m$ festgehalten werden, so sollen zwischen den n Coordinaten jedes andern Punktes P gerade m und nicht mehr Gleichungen bestehen und *diese Gleichungen sollen im Allgemeinen von einander unabhängig* sein, das heisst, sie sollen so lange von einander unabhängig sein, als $P_1 \ldots P_m$ Punkte von allgemeiner gegenseitiger Lage sind*).

Hieraus folgt zunächst, dass nach Festhaltung eines Punktes P_1 für jeden andern Punkt P eine und nur eine Gleichung besteht; da nun ein einzelner Punkt keine Invariante haben sollte, so ergiebt sich, *dass zwei Punkte eine und nur eine Invariante haben.*

Ferner zeigen die Helmholtzschen Forderungen, dass nach Festhaltung von m Punkten: $P_1 \ldots P_m$ von allgemeiner gegenseitiger Lage immer noch continuirliche Bewegung möglich ist, sobald m einen der Werthe $1, 2, \ldots n-1$ hat, dass dagegen im Falle $m = n$ keine continuirliche Bewegung mehr möglich ist, dass vielmehr nach Festhaltung von n derartigen Punkten überhaupt alle Punkte des Raumes in

*) So müssen die Worte auf S. 439, Z. 20—24 v. o. verstanden werden. Herr v. Helmholtz sagt zwar auch hier nicht ausdrücklich, dass, wenn der erste Punkt eines in sich festen Systems festgehalten wird, für jeden andern Punkt eine und nur eine Gleichung bestehen soll; da er aber hinzufügt: „eine seiner Coordinaten wird eine Function der übrigen", so ist klar, dass er das Bestehen zweier Gleichungen für den zweiten ausschliesst. Ebenso geht aus allem deutlich hervor, dass nach Festhaltung von m Punkten für jeden andern Punkt gerade m im Allgemeinen von einander unabhängige Gleichungen bestehen sollen.

Ruhe bleiben. Werden nämlich die m Punkte: $P_1 \ldots P_m$ festgehalten, so bestehen zwischen den n Coordinaten jedes andern Punktes P von allgemeiner Lage m von einander unabhängige Gleichungen. Da das nach dem Früheren die einzigen Bedingungen sind, denen die Beweglichkeit von P unter den gemachten Voraussetzungen unterworfen ist, so kann P noch durch continuirliche Bewegung in jeden andern Punkt P' übergehen, dessen Coordinaten jene m Gleichungen erfüllen und der mit P durch eine continuirliche Reihe von solchen Punkten verbunden ist. Hat daher m insbesondere den Werth n, so kann P keine continuirliche Bewegung mehr ausführen, sondern muss in Ruhe bleiben.

Wir sahen oben, dass man durch Ausführung beliebig vieler continuirlicher Bewegungen nach einander stets eine ganz bestimmte Punkttransformation des R_n erhält. Wir können jetzt genaueren Aufschluss über die Schaar der so entstehenden Transformationen geben.

Wir betrachten unsern beweglichen Raum in irgend einer Lage innerhalb des festen Raumes. $P_1 \ldots P_n$ seien n Punkte von allgemeiner gegenseitiger Lage im beweglichen Raume und $\mathfrak{P}_1 \ldots \mathfrak{P}_n$ die Punkte des festen Raumes, mit denen sie gerade zusammenfallen. Ist dann P irgend ein andrer Punkt des beweglichen Raumes, so hat auch der innerhalb des festen Raumes eine ganz bestimmte Lage $\mathfrak{P}$, denn es giebt ja keine continuirliche Bewegung, bei der $P_1 \ldots P_n$ sämmtlich ihre Lagen: $\mathfrak{P}_1 \ldots \mathfrak{P}_n$ behalten.

Jetzt denken wir uns den beweglichen Raum beliebig vielen continuirlichen Bewegungen unterworfen. Wir werden sehen, dass die allgemeinste Punkttransformation des R_n, die wir auf diese Weise erhalten, nur von einer endlichen Anzahl von willkürlichen Parametern abhängt.

In der That, durch continuirliche Bewegung können wir zunächst den Punkt P_1 aus der Lage $\mathfrak{P}_1$ in jeden andern Punkt $\mathfrak{P}_1'$ überführen, die allgemeinste Lage von $\mathfrak{P}_1'$ hängt also von n willkürlichen Parametern ab. Ist $\mathfrak{P}_1'$ fest gewählt, so kann P_2 noch in jeden Punkt $\mathfrak{P}_2'$ übergehen, der einer gewissen Gleichung genügt, $\mathfrak{P}_2'$ hängt also, wenn $\mathfrak{P}_1'$ gewählt ist, noch von $n - 1$ Parametern ab u. s. w. Kurz, durch continuirliche Bewegungen können wir erreichen, dass $P_1 \ldots P_n$ die neuen Lagen $\mathfrak{P}_1' \ldots \mathfrak{P}_n'$ erhalten, wo das Punktsystem: $\mathfrak{P}_1' \ldots \mathfrak{P}_n'$ von:

$$n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$$

Parametern abhängt. Damit sind aber auch alle Möglichkeiten erschöpft, sobald nämlich $P_1 \ldots P_n$ die neuen Lagen: $\mathfrak{P}_1' \ldots \mathfrak{P}_n'$ erhalten, bekommt

zugleich jeder andre Punkt P des beweglichen Raumes die ganz bestimmte neue Lage $\mathfrak{P}'$, denn es giebt ja keine continuirliche Bewegung, bei der $\mathfrak{P}_1' \ldots \mathfrak{P}_n'$ sämmtlich in Ruhe bleiben.

Hierin liegt, dass durch den Uebergang des Punktsystems $P_1 \ldots P_n$ aus der Anfangslage: $\mathfrak{P}_1 \ldots \mathfrak{P}_n$ in die neue Lage: $\mathfrak{P}_1' \ldots \mathfrak{P}_n'$ eine ganz bestimmte Punkttransformation definirt ist; wie man auch durch eine Reihe von auf einander folgenden continuirlichen Bewegungen diesen Uebergang bewirken mag, man erhält durch die Ausführung dieser Bewegungen nach einander stets dieselbe Punkttransformation. Da man nun bei der Wahl des Punktsystems $\mathfrak{P}_1' \ldots \mathfrak{P}_n'$ gerade $\frac{1}{2}n(n+1)$ willkürliche Parameter zur Verfügung hat, wenn man sich das Punktsystem $P_1 \ldots P_n$ auf alle möglichen Weisen bewegt denkt, so ergiebt sich, dass der Inbegriff aller Punkttransformationen, die durch beliebig viele continuirliche Bewegungen des beweglichen Raumes von einer bestimmten Anfangslage aus erhalten werden, eine Schaar mit gerade $\frac{1}{2}n(n+1)$ wesentlichen Parametern bildet.

Wir bemerken nun weiter, dass diese Schaar von Punkttransformationen von der gewählten Anfangslage des beweglichen Raumes unabhängig ist; denn wie man auch die Anfangslage wählen mag, es giebt stets n Punkte $\bar{P}_1 \ldots \bar{P}_n$ des beweglichen Raumes, die mit den Punkten: $\mathfrak{P}_1 \ldots \mathfrak{P}_n$ des festen Raumes zusammenfallen. *Hierin liegt, dass die eben definirte Schaar von Punkttransformationen eine* Gruppe *bildet.* Bringen wir nämlich den beweglichen Raum durch irgend eine Transformation unsrer Schaar aus der Lage R in die Lage R' und dann durch eine andre Transformation unsrer Schaar aus der Lage R' in die Lage R'', so giebt es stets eine ganz bestimmte der Schaar angehörige Transformation, bei der R in R'' übergeht.

Die hiermit gefundene Gruppe ist sicher transitiv, denn sie kann jeden Punkt des Raumes in jeden andern überführen. Ferner ist leicht einzusehen, dass ihre Transformationen sich paarweise als invers zusammenordnen. Ist nämlich S die Transformation unsrer Gruppe, die $\mathfrak{P}_1 \ldots \mathfrak{P}_n$ in $\mathfrak{P}_1' \ldots \mathfrak{P}_n'$ überführt, so ist es stets möglich, durch eine Anzahl von continuirlichen Bewegungen zu erreichen, dass die Punkte des beweglichen Raumes, die in irgend einer Lage dieses Raumes mit $\mathfrak{P}_1' \ldots \mathfrak{P}_n'$ zusammenfallen, schliesslich in die Lagen: $\mathfrak{P}_1 \ldots \mathfrak{P}_n$ gelangen. Demnach gehört mit S stets zugleich auch S^{-1} unsrer Gruppe an.

Endlich lässt sich auch beweisen, dass unsre Gruppe, die wir kurz g nennen wollen, continuirlich ist. Wäre sie es nämlich nicht, so bestände sie nach Abschn. I, Kap. 18 aus einer Reihe von getrennten continuirlichen Schaaren, deren jede $\frac{1}{2}n(n+1)$ Parameter enthielte und unter diesen Schaaren gäbe es eine continuirliche, die eine

$\frac{1}{2}n(n+1)$-gliedrige Gruppe $\mathfrak{g}$ mit paarweise inversen Transformationen bildete. Diese Gruppe $\mathfrak{g}$ wäre die einzige unter den betreffenden continuirlichen Schaaren, der die identische Transformation angehörte. Nun aber enthält jede continuirliche Schaar von ∞^1 Transformationen, die durch eine continuirliche Bewegung bestimmt wird, die identische Transformation (s. S. 440) und gehört also der Gruppe $\mathfrak{g}$ an; demnach umfasst $\mathfrak{g}$ auch alle Transformationen, die durch Ausführung beliebig vieler continuirlicher Bewegungen nach einander entstehen. Hieraus folgt, dass g in $\mathfrak{g}$ enthalten ist und da $\mathfrak{g}$ eine Untergruppe von g war, so können wir schliessen, dass g mit $\mathfrak{g}$ zusammenfällt, das heisst, dass g wirklich continuirlich ist.

Unter den von Herrn v. Helmholtz gemachten Voraussetzungen gilt demnach Folgendes:

Wenn man die als möglich angenommenen continuirlichen Bewegungen des Raumes in beliebiger Anzahl nach einander ausführt, so erhält man eine endliche continuirliche transitive Gruppe g von reellen Transformationen, die gerade $\frac{1}{2}n(n+1)$ Parameter enthält und deren Transformationen paarweise zu einander invers sind.

Es versteht sich von selbst, dass bei dieser Gruppe zwei Punkte eine und nur eine Invariante haben und $s > 2$ Punkte keine wesentliche Invariante. Hätten nämlich zum Beispiel zwei Punkte der Gruppe gegenüber mehr als eine Invariante, so hätten sie diese Invarianten offenbar auch bei allen continuirlichen Bewegungen, während sie doch denen gegenüber nur eine Invariante haben sollten.

Durch das Vorstehende ist bewiesen, dass wir es mit einer endlichen continuirlichen Gruppe zu thun haben und dass bei dieser Gruppe zwei Punkte eine und nur eine Invariante haben, $s > 2$ Punkte aber keine wesentliche Invariante. Gruppen dieser Art haben wir aber in Kapitel 20 behandelt und obwohl wir uns damals auf den Raum von drei Dimensionen beschränkten, so lässt sich doch wenigstens ein Theil der dort gegebenen Entwicklungen unmittelbar auf den Fall des n-fach ausgedehnten Raumes übertragen, es sind das die Entwicklungen der SS. 399—404. Wir erkennen daraus, dass jede Gruppe von der soeben definirten Beschaffenheit die folgenden Eigenschaften besitzt: wird ein Punkt von allgemeiner Lage festgehalten, so kann jeder andre Punkt von allgemeiner Lage noch ∞^{n-1} verschiedene Lagen annehmen, hält man zwei Punkte von allgemeiner gegenseitiger Lage fest, so kann jeder dritte Punkt von allgemeiner Lage noch ∞^{n-2} verschiedene Lagen annehmen u. s. w., kurz, wir finden, dass die Endlichkeit der Gruppe und die über die Invarianten zweier und

mehrerer Punkte gemachten Annahmen die auf S. 447 angegebenen Forderungen des Herrn v. Helmholtz nach sich ziehen, die Forderungen nämlich, es solle nach Festhaltung eines Punktes für jeden andern eine und nur eine Gleichung bestehen u. s. w. Wir brauchen daher diese Forderungen nicht mehr besonders aufzuführen.

Schliesslich mag noch erwähnt werden, dass die endliche continuirliche Gruppe g, die durch die continuirlichen Bewegungen des Raumes bestimmt wird, noch zu einer andern Gruppe in einer einfachen Beziehung steht. Wir meinen die Gruppe g' aller Punkttransformationen, denen gegenüber zwei beliebige Punkte x_ν, y_ν die Invariante $\Omega(x, y)$ haben.

Dass es eine solche Gruppe g' giebt, ist von vornherein klar, denn wie wir auch die Function $\Omega(x, y)$ wählen mögen, es giebt immer Transformationen, denen gegenüber zwei Punkte die Invariante $\Omega(x, y)$ haben, und der Inbegriff dieser Transformationen bildet auch immer eine gewisse Gruppe g', die allerdings unter Umständen auf die identische Transformation zusammenschrumpfen kann.

In unserm Falle ist nun leicht zu sehen, dass die allgemeinste Transformation von g' gerade $\frac{1}{2}n(n+1)$ willkürliche Parameter enthält, es folgt das ohne Weiteres aus den besonderen Eigenschaften, die die Invariante $\Omega(x, y)$ unter den hier gemachten Voraussetzungen hat. Demnach ist klar, dass g die grösste continuirliche in g' enthaltene Gruppe ist; sollte g' selbst continuirlich sein, so würde es natürlich mit g zusammenfallen.

§ 93.

Gruppentheoretische Formulirung der Helmholtzschen Axiome.

Wir werden jetzt die Ergebnisse des vorigen Paragraphen zusammenfassen. Dabei wollen wir jedoch, um uns bequemer ausdrücken zu können, die auf S. 449 f. definirte Gruppe g kurz als *eine Gruppe von Bewegungen des* R_n bezeichnen. Wir nennen dementsprechend jede Transformation dieser Gruppe kurz eine Bewegung, so dass wir also unter einer Bewegung stets die Transformation verstehen, die den beweglichen Raum aus einer Lage in eine andre überführt. Was wir bisher continuirliche Bewegung nannten, ist dann einfach eine continuirliche Schaar von ∞^1 Bewegungen, in der die identische Transformation enthalten ist.

Diese Ausdrucksweise entspricht offenbar der jetzt allgemein üb-

lichen und auch von uns früher angewandten, wo man von der Gruppe der Euklidischen Bewegungen spricht und auch unter einer Bewegung jedesmal eine Transformation dieser Gruppe versteht.

Indem wir nunmehr die Ergebnisse des vorigen Paragraphen zusammenfassen, können wir sagen, dass die drei ersten Helmholtzschen Axiome mit den folgenden Forderungen gleichbedeutend sind:

A) *Jeder Punkt des n-fach ausgedehnten Raumes ist durch n Coordinaten:* $x_1 \ldots x_n$ *bestimmbar.*

B) *Durch die in dem Raume möglichen continuirlichen Bewegungen ist eine endliche continuirliche Gruppe:*

$$x_\nu' = f_\nu(x_1 \ldots x_n;\ a_1 \ldots a_r) \quad (\nu = 1 \ldots n) \tag{11}$$

bestimmt, die reell und transitiv ist und die wir als die Gruppe der Bewegungen bezeichnen. Die Gliederzahl r dieser Gruppe besitzt den Werth $\frac{1}{2}n(n+1)$ *und die Transformationen der Gruppe sind paarweise zu einander invers. Die Functionen* $f_1 \ldots f_n$ *sind sowohl nach den x als nach den a differentiirbar und die Differentialquotienten nach den x sind ihrerseits wieder nach den a differentiirbar.*

C) *Der Gruppe* (11) *gegenüber haben zwei Punkte eine und nur eine Invariante und* $s > 2$ *Punkte haben keine wesentliche Invariante. Ist:* $J(x_1 \ldots x_n;\ y_1 \ldots y_n)$ *die Invariante der beiden Punkte* x_ν *und* y_ν*, so muss sich innerhalb des n-fach ausgedehnten Raumes ein gewisser endlicher n-fach ausgedehnter Bereich so abgränzen lassen, dass die Relation:*

$$J(x_1 \ldots x_n;\ y_1 \ldots y_n) = J(x_1^0 \ldots x_n^0;\ y_1^0 \ldots y_n^0) \tag{12}$$

stets eine wirkliche Gleichung zwischen: $x_1 \ldots x_n$, $y_1 \ldots y_n$ *liefert, welche von einander verschiedenen Punkte des Bereiches man auch für* $x_1^0 \ldots x_n^0$, $y_1^0 \ldots y_n^0$ *wählen mag.*

D) *Innerhalb des vorhin definirten Bereiches sind alle Punkte bei der Gruppe* (11) *vollkommen frei beweglich, soweit sie nicht durch die Invarianten, die die einzelnen Punktepaare der Gruppe gegenüber haben, gebunden sind. Wenn also zum Beispiel:* $x_1^0 \ldots x_n^0$; $y_1^0 \ldots y_n^0$ *irgend zwei verschiedene Punkte jenes Bereichs sind, so soll, sobald der erste von ihnen festgehalten wird, der zweite noch alle Lagen:* $y_1 \ldots y_n$ *annehmen können, die der Gleichung:*

$$J(x_1^0 \ldots x_n^0;\ y_1 \ldots y_n) = J(x_1^0 \ldots x_n^0;\ y_1^0 \ldots y_n^0) \tag{13}$$

genügen, dabei vorausgesetzt, dass von $y_1^0 \ldots y_n^0$ *nach* $y_1 \ldots y_n$ *ein continuirlicher Uebergang durch lauter reelle Werthsysteme, die* (13) *erfüllen, möglich ist.*

Hierzu kommt nun noch das vierte Helmholtzsche Axiom, das wir bisher noch gar nicht berücksichtigt haben, das vielgenannte *Monodromieaxiom.* Wir können diesem jetzt folgende Fassung geben:

E) *Hält man innerhalb des früher besprochenen Bereichs $n-1$ Punkte von allgemeiner gegenseitiger Lage fest, also $n-1$ Punkte, die so gewählt sind, dass sie nur bei einer eingliedrigen Gruppe von Bewegungen gleichzeitig in Ruhe bleiben, und ist Xf die infinitesimale Transformation dieser eingliedrigen Gruppe, so sollen die zugehörigen endlichen Gleichungen:*

$$(14) \qquad x_v' = x_v + \frac{t}{1} X x_v + \frac{t^2}{1 \cdot 2} X X x_v + \cdots \qquad (v = 1 \ldots n)$$

so beschaffen sein, dass bei von Null an stets wachsendem t schliesslich alle andern Punkte: $x_1 \ldots x_n$ des Bereichs zu gleicher Zeit in ihre Anfangslagen zurückkommen. Kurz, es wird verlangt, dass die Gleichungen (14) *eine Bewegung mit reeller Periode darstellen.*

§ 94.

Kritik der Schlüsse, die Herr v. Helmholtz aus seinen Axiomen zieht.

Im vorigen Paragraphen haben wir den Helmholtzschen Axiomen eine solche Fassung gegeben, dass der gruppentheoretische Charakter des ganzen Problems deutlich hervortritt. Wir wollen jetzt die Folgerungen, die Herr v. Helmholtz aus seinen Axiomen gezogen hat, kritisch beleuchten. Um das möglichst bequem ausführen zu können, übersetzen wir zunächst diese Folgerungen, soweit das möglich ist, in die Sprache der Gruppentheorie. Da Herr v. Helmholtz sich bei seiner Untersuchung auf den Raum von drei Dimensionen beschränkt hat, so thun wir natürlich dasselbe.

Im Raume von drei Dimensionen ist jede Gruppe von Bewegungen, die den Helmholtzschen Forderungen genügt, sechsgliedrig. Herr v. Helmholtz betrachtet nun*), so können wir es ausdrücken, alle

*) Gött. Nachr. 1868, S. 202 ff. Bemerkenswerth ist die Weise, in der er diese Bewegungen construirt. Er wählt eine bestimmte Bewegung S aus, bei der ein bestimmter Punkt P_1 in die neue Lage P übergeht, andrerseits denkt er sich die allgemeinste in der Gruppe enthaltene Bewegung T aufgestellt, bei der ebenfalls P_1 in P übergeführt wird. Unter diesen Voraussetzungen ist augenscheinlich $S^{-1}T$ die allgemeinste der Gruppe angehörige Bewegung, bei der P in Ruhe bleibt. Damit ist nicht blos bewiesen, dass es derartige Bewegungen giebt, sondern es sind auch die Gleichungen der betreffenden Bewegungen auf eine solche Form gebracht, dass sie auf die dem Punkte P unendlich benachbarten Punkte anwendbar sind. Natürlich rechnet Herr v. Helmholtz nicht symbolisch mit Transformationen; bei ihm kommt nicht einmal der Begriff *Schaar von Transformationen explicite* vor. Wir geben überhaupt den Helmholtzschen Entwicklungen durch Benutzung der Begriffe und Ausdrucksweisen der Gruppentheorie eine schärfere Form.

in der Gruppe enthaltenen Bewegungen, die einen bestimmten Punkt invariant lassen. Da die Gruppe der Bewegungen transitiv ist, so bildet der Inbegriff aller Bewegungen, die einen bestimmten Punkt in Ruhe lassen, eine dreigliedrige Gruppe. Denken wir uns der Einfachheit wegen den invarianten Punkt zum Coordinatenanfang gewählt, so werden die Gleichungen dieser dreigliedrigen Gruppe die Form haben:

$$(15) \qquad \begin{cases} x' = \lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z + \cdots \\ y' = \mu_1 x + \mu_2 y + \mu_3 z + \cdots \\ z' = \nu_1 x + \nu_2 y + \nu_3 z + \cdots, \end{cases}$$

wo die λ, μ, ν und die weggelassenen Glieder höherer Ordnung noch von drei willkürlichen Parametern abhängen und wo die Determinante der λ, μ, ν sicher nicht identisch verschwindet.

Herr v. Helmholtz betrachtet aber nicht die Gruppe (15) selbst, sondern er untersucht blos, wie die dem Coordinatenanfang unendlich benachbarten Punkte bei der Gruppe (15) transformirt werden, mit andern Worten: er beschränkt sich auf die Betrachtung der Transformationen:

$$(16) \qquad \begin{cases} dx' = \lambda_1 dx + \lambda_2 dy + \lambda_3 dz \\ dy' = \mu_1 dx + \mu_2 dy + \mu_3 dz \\ dz' = \nu_1 dx + \nu_2 dy + \nu_3 dz, \end{cases}$$

die man erhält, wenn man die Gleichungen (15) differentiirt und nachher: $x = y = z = 0$ setzt. Es ist klar, dass diese Transformationen in den Veränderlichen: dx, dy, dz eine Gruppe bilden und zwar ist das keine andre Gruppe als die lineare homogene Gruppe, die dem Coordinatenanfang von der Gruppe aller Bewegungen zugeordnet wird und die namentlich angiebt, wie die Linienelemente: $dx : dy : dz$ durch den Coordinatenanfang transformirt werden, sobald man ihn festhält (s. Abschn. I, Theor. 109, S. 603).

Soweit sind die Entwicklungen des Herrn v. Helmholtz einwandfrei. Jetzt aber nimmt er stillschweigend und ohne ein Wort der Begründung an, dass alle seine Axiome, die er über die nach Festhaltung eines Punktes noch möglichen Bewegungen aufgestellt hat, auch auf die Punkte anwendbar bleiben, die dem festen Punkte unendlich benachbart sind, dass also aus ihrem Erfülltsein für endlich von einander entfernte zugleich folge, dass sie für unendlich benachbarte Punkte erfüllt seien. Schärfer ausgedrückt: er denkt sich die lineare homogene Gruppe:

$$(16') \qquad \begin{cases} x' = \lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z \\ y' = \mu_1 x + \mu_2 y + \mu_3 z \\ z' = \nu_1 x + \nu_2 y + \nu_3 z \end{cases}$$

als eine Gruppe von Bewegungen, die den Coordinatenanfang invariant lässt, und setzt voraus, dass die Gruppe (16′) jedes seiner Axiome stets dann erfülle, wenn die Gruppe (15) dies thue. Auf dieser Annahme beruhen alle seine nachfolgenden Entwicklungen.

Wir wollen zunächst zeigen, dass diese Voraussetzung mit einer andern gleichbedeutend ist, die sich bequemer aussprechen lässt, und dann *werden wir an einer Reihe von Beispielen die Unzulässigkeit der ganzen Voraussetzung deutlich machen.*

Die Gruppe (15) ist von drei unabhängigen infinitesimalen Transformationen von der Form:

$$(17)\qquad \left\{\begin{array}{l} (\alpha_{k1}x + \alpha_{k2}y + \alpha_{k3}z + \cdots)p + \\ + (\beta_{k1}x + \beta_{k2}y + \beta_{k3}z + \cdots)q + \\ + (\gamma_{k1}x + \gamma_{k2}y + \gamma_{k3}z + \cdots)r \end{array}\right. \qquad (k = 1, 2, 3)$$

erzeugt, wo die α, β, γ Constanten bedeuten und wo die weggelassenen Glieder von höherer Ordnung in den x, y, z sind. Die sechsgliedrige Gruppe aller Bewegungen enthält ausser den infinitesimalen Transformationen (17) noch drei von der Form:

$$(18)\qquad p + \cdots, \quad q + \cdots, \quad r + \cdots.$$

Die Gruppe (16′) andrerseits ist die zur Gruppe (17) gehörige verkürzte Gruppe und ihre infinitesimalen Transformationen*):

$$(19)\qquad \left\{\begin{array}{l} L_k f = (\alpha_{k1}x + \alpha_{k2}y + \alpha_{k3}z)\,p + (\beta_{k1}x + \beta_{k2}y + \beta_{k3}z)q + \\ \qquad + (\gamma_{k1}x + \gamma_{k2}y + \gamma_{k3}z)\,r \end{array}\right. \qquad (k = 1, 2, 3)$$

entstehen aus (17) durch Weglassung aller Glieder von höherer Ordnung, sie brauchen jedoch nicht von einander unabhängig zu sein. Wir bemerken ausserdem (vgl. Abschn. I, S. 606), dass unter den gemachten Voraussetzungen auch die infinitesimalen Transformationen:

$$(20)\qquad p,\ q,\ r,\ L_1 f,\ L_2 f,\ L_3 f$$

eine transitive Gruppe erzeugen, die allerdings nicht sechsgliedrig zu sein braucht. Diese Gruppe (20) ist nichts andres als die zur Gruppe (17), (18) aller Bewegungen gehörige verkürzte Gruppe.

*) Wir wollen nicht unerwähnt lassen, dass Herr v. Helmholtz mit den infinitesimalen Transformationen der *linearen homogenen* Gruppe (16′) operirt, man kann sogar sagen, dass er, wenn auch unbewusst, die eingliedrigen Gruppen betrachtet, die von gewissen unter diesen infinitesimalen Transformationen erzeugt werden. Dagegen findet sich bei ihm keineswegs der allgemeine Begriff einer infinitesimalen Transformation, geschweige denn der allgemeine Begriff einer eingliedrigen Gruppe.

Die von Herrn v. Helmholtz stillschweigend eingeführte Voraussetzung hat nun einfach den Sinn, dass die Gruppe (19) dann jedes Axiom erfüllt, das über die nach Festhaltung des Coordinatenanfangs noch möglichen Bewegungen gemacht worden ist, wenn die Gruppe (17) dieses Axiom erfüllt. Andrerseits aber ist klar, dass die Gruppe (17), (18) aller Bewegungen dann und nur dann alle Helmholtzschen Axiome erfüllt, wenn die Gruppe (17) den nach Festhaltung des Coordinatenanfangs noch übrig bleibenden Axiomen genügt. Endlich leuchtet ein, dass zwischen den beiden Gruppen (20) und (19) genau dieselbe Beziehung besteht, wie zwischen den Gruppen (17), (18) und (17). Demnach kommt die Helmholtzsche Annahme einfach auf die Voraussetzung hinaus, *dass die verkürzte Gruppe* (20) *immer dann jede von ihm aufgestellte Forderung erfülle, wenn die ursprüngliche Gruppe* (17), (18) *dies thue.*

Diese Annahme wird von Herrn v. Helmholtz stillschweigend gemacht, ohne die geringste Andeutung eines Beweises, ja ohne eine Andeutung, dass sie überhaupt eines Beweises bedürfe. Wir wollen an einer Reihe von Beispielen*) zeigen, dass diese Annahme unberechtigt ist. Wir werden finden, dass eine sechsgliedrige transitive Gruppe des R_3 sehr gut gewisse von den Helmholtzschen Forderungen erfüllen kann, während die zugehörige verkürzte Gruppe das nicht thut; wir werden andrerseits sehen, dass zu einer sechsgliedrigen transitiven Gruppe, die gewisse von den Helmholtzschen Forderungen nicht erfüllt, eine verkürzte Gruppe gehören kann, die die betreffenden Forderungen erfüllt.

Wie wir gesehen haben, kommt ein Theil der Helmholtzschen Forderungen darauf hinaus, dass zwei Punkte der Gruppe aller Bewegungen gegenüber eine und nur eine Invariante haben. Nun haben die beiden Punkte: x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 bei der sechsgliedrigen transitiven Gruppe:

(21) $\quad q,\ xq + r,\ x^2q + 2xr,\ x^3q + 3x^2r,\ x^4q + 4x^3r,\ p$

nur die eine Invariante: $x_2 - x_1$, bei der zugehörigen verkürzten Gruppe:

(21′) $\quad q,\ r,\ xr,\ p$

dagegen haben sie die beiden Invarianten: $x_2 - x_1$ und $y_2 - y_1$. Andrerseits haben die beiden Punkte bei der sechsgliedrigen transitiven Gruppe:

*) Lie hat diese Beispiele zuerst in den Comptes Rendus von 1892 mitgetheilt (Bd. 114, S. 463).

(22) $\quad q,\ xq + r,\ x^2q + 2xr,\ x^3q + 3x^2r,\ p,\ xp - zr$

gar keine Invariante, während sie bei der zugehörigen verkürzten Gruppe:

(22′) $\quad q,\ r,\ xr,\ p,\ xp - zr$

die Invariante: $y_2 - y_1$ haben.

Hieraus geht hervor, dass die beiden Gruppen (17), (18) und (20) im Allgemeinen die hier angenommene Forderung nicht gleichzeitig erfüllen.

Betrachten wir ferner die Gruppe:

(23) $$\begin{cases} q,\ p,\ xq + r,\ x^2q + 2xr,\ xp + yq + cr \\ \qquad x^2p + 2xyq + 2(cx + y)r, \end{cases}$$

die uns schon auf S. 418 begegnet ist. Bei dieser Gruppe haben nach S. 419 zwei Punkte eine und nur eine Invariante und $s > 2$ Punkte haben keine wesentliche Invariante, sie erfüllt also gewisse Forderungen, die aus den Helmholtzschen Axiomen folgen (vgl. S. 452). Aber die zugehörige verkürzte Gruppe:

(23′) $\quad q,\ p,\ r,\ xr,\ xp + yq - cxq,\ yr$

erfüllt diese Forderungen nicht, denn sie enthält sogar drei infinitesimale Transformationen, nämlich: $r,\ xr,\ yr$, welche die Bahncurven gemein haben, und das darf nach S. 405, Satz 1 nicht eintreten, wenn zwei Punkte eine und nur eine und $s > 2$ Punkte keine wesentliche Invariante haben sollen.

Demnach braucht auch die hier betrachtete Forderung von der Gruppe (20) nicht immer erfüllt zu werden, wenn sie von der Gruppe (17), (18) erfüllt wird.

Endlich gehört auch das Monodromieaxiom zu den Forderungen, die sehr gut bei der Gruppe (17), (18) erfüllt sein können, ohne dass sie es bei der Gruppe (20) sind.

Den Beweis hierfür liefert die Gruppe:

(24) $$\begin{cases} p,\ q,\ xp + yq + r,\ yp - xq \\ (x^2 - y^2)p + 2xyq + 2xr \\ 2xyp + (y^2 - x^2)q + 2yr, \end{cases}$$

die wir auf S. 432 gefunden haben. Diese *äusserst merkwürdige* Gruppe erfüllt nämlich alle Forderungen des Helmholtzschen Monodromieaxioms, während die zugehörige verkürzte Gruppe:

(24′) $\quad p,\ q,\ r,\ yp - xq,\ xr,\ yr$

dies nicht thut.

Dass die Gruppe (24′) das Monodromieaxiom nicht erfüllt, ist leicht einzusehen. Halten wir nämlich zwei Punkte von allgemeiner gegenseitiger Lage fest, etwa den Coordinatenanfang und den Punkt x_0, y_0, z_0, wo x_0 und y_0 nicht beide verschwinden, so bilden die noch möglichen Bewegungen eine eingliedrige Gruppe, die von der infinitesimalen Transformation: $(x_0 y - y_0 x) r$ erzeugt ist, deren endliche Gleichungen also die Form haben:

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z + t(x_0 y - y_0 x).$$

Augenscheinlich kehrt aber hier der Punkt x, y, z niemals in seine Anfangslage zurück, wenn t von Null an beständig wächst.

Um uns andrerseits zu überzeugen, dass die Gruppe (24) das Monodromieaxiom erfüllt, müssen wir auf die Bewegungen dieser Gruppe etwas näher eingehen.

Hält man bei der Gruppe (24) einen Punkt x_0, y_0, z_0 fest, so bewegt sich im Allgemeinen jeder andre Punkt x, y, z ganz frei auf der hindurchgehenden Pseudokugel:

$$\{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\} e^{-z} = \text{const.} \tag{25}$$

mit dem Mittelpunkte: x_0, y_0, z_0; nur die Punkte der Geraden: $x = x_0$, $y = y_0$, die offenbar selbst eine Pseudokugel ist, machen eine Ausnahme, denn sie bleiben sämmtlich in Ruhe. Wollen wir daher zwei verschiedene Punkte festhalten, die nur bei einer eingliedrigen Untergruppe von (24) gleichzeitig in Ruhe bleiben, so müssen wir diese Punkte so wählen, dass ihre Verbindungslinie nicht zur z-Axe parallel wird.

Zwei derartige Punkte sind der Coordinatenanfang und ein beliebiger Punkt x_0, y_0, z_0, für den x_0 und y_0 nicht beide verschwinden. Die endlichen Gleichungen der eingliedrigen Gruppe, bei der diese beiden Punkte invariant bleiben, bestimmen sich aus dem simultanen System:

$$\begin{cases} \dfrac{dx'}{dt} = y' + \dfrac{y_0 (x'^2 - y'^2)}{x_0^2 + y_0^2} - \dfrac{2 x_0 x' y'}{x_0^2 + y_0^2} \\ \dfrac{dy'}{dt} = -x' + \dfrac{2 y_0 x' y'}{x_0^2 + y_0^2} + \dfrac{x_0 (x'^2 - y'^2)}{x_0^2 + y_0^2} \\ \dfrac{dz'}{dt} = \dfrac{2 (y_0 x' - x_0 y')}{x_0^2 + y_0^2} \end{cases} \tag{26}$$

mit den bekannten Anfangsbedingungen: $[x']_{t=0} = x$ u. s. w. Aus (26) findet man:

$$\frac{d}{dt}(x' + iy') = -i \left\{ x' + iy' - \frac{(x' + iy')^2}{x_0 + iy_0} \right\}$$

und hieraus durch Integration:

$$x' + iy' = \frac{(x_0 + iy_0)(x + iy)}{\{x - x_0 + i(y - y_0)\} e^{it} + x + iy}. \tag{27}$$

Andrerseits weiss man, dass sich der Punkt x, y, z auf der durch ihn gehenden Pseudokugel bewegt, die den Coordinatenanfang zum Mittelpunkt hat, man bekommt also zwischen x, y, z und x', y', z' noch die Gleichung:

$$(x'^2 + y'^2) e^{-z'} = (x^2 + y^2) e^{-z},$$

aus der sich sofort ergiebt:

$$z' = z + l \frac{x'^2 + y'^2}{x^2 + y^2}. \tag{28}$$

Damit sind die endlichen Transformationen der in Rede stehenden eingliedrigen Gruppe vollständig bestimmt. Es wäre auch leicht, sie in reeller Form anzugeben, aber das ist für unsern Zweck gar nicht nöthig, denn schon die Gleichungen (27) und (28) zeigen, dass unsre Gruppe (24) das Monodromieaxiom erfüllt. Unterwirft man nämlich den Raum der continuirlichen Bewegung, die durch die Gleichungen (27), (28) bestimmt ist, und lässt man die Veränderliche t alle reellen Werthe zwischen 0 und 2π durchlaufen, so kehren für $t = 2\pi$ alle Punkte gleichzeitig in ihre Anfangslagen zurück*).

Wir sehen hieraus, dass die Gruppe (24) in der That das Monodromieaxiom erfüllt, während die zugehörige verkürzte Gruppe (24′) es nicht erfüllt.

Die Gruppe (24) ist auch noch deshalb besonders merkwürdig, weil sie in der schlagendsten Weise zeigt, wie wenig sich aus dem Verhalten endlich von einander entfernter Punkte auf das Verhalten unendlich benachbarter Punkte schliessen lässt, und wie gefährlich es ist, wenn man, wie Herr v. Helmholtz, die für jene aufgestellten Axiome auf diese überträgt.

Hält man nämlich bei der Gruppe (24) einen Punkt fest, etwa den Coordinatenanfang, so bewegt sich, wie wir oben sahen, jeder andre Punkt im Allgemeinen auf einer der ∞^1 invarianten Flächen:

$$(x^2 + y^2) e^{-z} = \text{const.}$$

Die Punkte jeder solchen Fläche werden dreigliedrig transformirt und zwar durch eine Gruppe, die, wie man sich leicht überzeugt, mit der

*) Die ∞^2 Bahncurven, die hierbei von den Punkten des Raumes durchlaufen werden, sind die Schnittcurven der beiden Schaaren von Pseudokugeln:

$$(x^2 + y^2) e^{-z} = \text{const.}, \quad \{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\} e^{-z} = \text{const.}$$

Ihre Projectionen auf die x, y-Ebene sind daher im Allgemeinen Kreise, in Ausnahmefällen aber auch gerade Linien.

Gruppe der Euklidischen Bewegungen einer Ebene gleichzusammengesetzt und überdies durch eine reelle Punkttransformation *ähnlich* ist.

Ganz anders verhalten sich die dem Coordinatenanfang unendlich benachbarten Punkte. Um sich ein Bild davon zu machen, wie diese Punkte transformirt werden, wenn der Coordinatenanfang festgehalten wird, fasst man am besten die Gruppe ins Auge, von welcher die ∞^2 Linienelemente durch den Coordinatenanfang transformirt werden, denn jeder dem Coordinatenanfang unendlich benachbarte Punkt bestimmt ein solches Linienelement. Versteht man unter x', y', z' die homogenen Coordinaten eines Linienelements, so lautet diese Gruppe:

$$y'p' - x'q', \quad x'r', \quad y'r'$$

und man erkennt sofort, dass bei ihr die Mannigfaltigkeit der ∞^2 Linienelemente durch eine projective Gruppe transformirt wird, *die zu der Gruppe der Euklidischen Bewegungen einer Ebene dualistisch ist.*

Man sieht hieraus, dass *beim Uebergang von endlich entfernten Punkten zu unendlich benachbarten ein vollständiger Sprung stattfinden kann und dass die unendlich benachbarten Punkte unter Umständen ganz andern Gesetzen gehorchen als die endlich von einander entfernten.*

Durch die vorstehenden Beispiele ist zur Genüge dargethan, dass die auf S. 455 ff. genauer beschriebene Annahme, die Herr v. Helmholtz stillschweigend eingeführt hat, unrichtig ist. Da nun seine übrigen Betrachtungen sämmtlich von dieser Annahme ausgehen und nur auf Grund dieser Annahme Beweiskraft haben, so kommen wir zu dem Ergebnisse, dass Herr v. Helmholtz die Behauptungen, die er am Schlusse seiner Arbeit aufstellt, nicht bewiesen hat: er hat nicht bewiesen, dass seine Axiome zur Charakterisirung der Euklidischen und der Nichteuklidischen Bewegungen hinreichen.

Nachdem wir uns auf diese Weise überzeugt haben, dass die Entwicklungen des Herrn v. Helmholtz keine Beweiskraft haben, werden wir zunächst in § 95 an die Voraussetzungen anknüpfen, die Herr v. Helmholtz im Laufe seiner Rechnungen aufgestellt hat.

§ 95.

An die Helmholtzschen Rechnungen anknüpfende Betrachtungen.

Wir sahen im vorigen Paragraphen, dass Herr v. Helmholtz seine Axiome ohne Weiteres auf unendlich benachbarte Punkte anwendet. In der unrichtigen Voraussetzung, dass das zulässig sei, lag

die Schwäche der Helmholtzschen Entwicklungen; die Einführung dieser Voraussetzung nahm seinen Ueberlegungen die Beweiskraft.

Man kann nun diesen Fehler vermeiden, wenn man von vornherein die Helmholtzschen Axiome so umgestaltet, dass sie sich blos auf unendlich benachbarte Punkte beziehen; dabei kann man es immer so einrichten, dass die Helmholtzschen Rechnungen bei Zugrundelegung der in dieser Weise formulirten Axiome wirklich zum Ziele führen. Da das in verschiedenen Weisen möglich ist und da es nicht lohnt, die verschiedenen Möglichkeiten durchzusprechen, so begnügen wir uns mit Folgendem: Wir stellen ein System von Axiomen auf, das sich auf unendlich benachbarte Punkte bezieht und das mit den Voraussetzungen, die Herr v. Helmholtz bei seinen Rechnungen stillschweigend eingeführt hat, wenn auch nicht übereinstimmt, so doch mit ihnen nahe verwandt ist. Sodann beweisen wir *durch Rechnungen, die im Principe von den Helmholtzschen nicht abweichen,* dass dieses System von Axiomen zur Charakterisirung der Euklidischen und der Nichteuklidischen Bewegungen des gewöhnlichen Raumes hinreicht.

Die Axiome, die wir aufstellen, lauten so:

I) *Der dreifach ausgedehnte Raum ist eine Zahlenmannigfaltigkeit.*

II) *Die Bewegungen dieses Raumes bilden eine reelle continuirliche Gruppe von Punkttransformationen.*

III) *Hält man einen reellen Punkt von allgemeiner Lage fest, so hat die lineare homogene Gruppe, die bestimmt, in welcher Weise die* ∞^2 *reellen durch den Punkt gehenden Linienelemente transformirt werden, gerade drei Parameter.*

IV) *Jede reelle eingliedrige Untergruppe der eben erwähnten linearen homogenen Gruppe ist so beschaffen, dass bei ihr alle reellen Linienelemente, die nicht in Ruhe bleiben, reelle Kegel beschreiben, bei deren continuirlicher Durchlaufung sie, ohne umzukehren, schliesslich gleichzeitig in ihre Anfangslagen zurückkommen; oder genauer ausgedrückt: sind:*

$$x_1' = \alpha_1(t)x' + \alpha_2(t)y' + \alpha_3(t)z'$$
$$y_1' = \beta_1(t)x' + \beta_2(t)y' + \beta_3(t)z'$$
$$z_1' = \gamma_1(t)x' + \gamma_2(t)y' + \gamma_3(t)z'$$

die endlichen Gleichungen einer solchen eingliedrigen Gruppe in ihrer kanonischen Form, so tritt, wenn die reelle Veränderliche t von 0 *an beständig wächst, für einen endlichen positiven Werth von t schliesslich der Fall ein, dass sich:* $x_1' : y_1' : z_1'$ *verhalten wie:* $x' : y' : z'$.

Wir werden zeigen, dass diese Axiome vollständig genügen, um die Euklidischen und die Nichteuklidischen Bewegungen zu charakterisiren.

Zunächst müssen wir bestimmen, welche Form die in den Axiomen erwähnte lineare homogene Gruppe besitzt.

Es seien: x_1', x_2', x_3' die homogenen Coordinaten der Linienelemente durch einen festgehaltenen reellen Punkt von allgemeiner Lage; die dem Punkte zugeordnete lineare homogene Gruppe g enthält dann unter den gemachten Voraussetzungen drei unabhängige infinitesimale Transformationen von der Form:

$$(29) \qquad \sum_{\mu\nu}^{1,2,3} \alpha_{k\mu\nu} x_\mu' p_\nu' \quad (k = 1, 2, 3).$$

Unter diesen infinitesimalen Transformationen kann es höchstens eine geben, die jedes Linienelement: $x_1' : x_2' : x_3'$ stehen lässt, demnach ist sicher, dass die zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit der ∞^2 Linienelemente: $x_1' : x_2' : x_3'$ bei g durch eine projective Gruppe $\mathfrak{g}$ transformirt wird, die entweder drei oder zwei Parameter hat.

Beziehen wir unsre ∞^2 Linienelemente projectiv auf die reellen Punkte einer Ebene, so erscheint $\mathfrak{g}$ als eine reelle drei- oder zweigliedrige projective Gruppe $\mathfrak{g}'$ der Ebene. Jede reelle eingliedrige Untergruppe von $\mathfrak{g}'$ ist dann so beschaffen, dass in der *kanonischen* Form:

$$\mathfrak{x}' = \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}; t), \quad \mathfrak{y}' = \psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}; t)$$

ihrer endlichen Gleichungen die Grössen $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{y}'$ periodische Functionen der reellen Veränderlichen t sind. Alle reellen Punkte, die bei einer solchen eingliedrigen Gruppe nicht invariant bleiben, bewegen sich daher bei ihr auf reellen Curven, die sie in ihrer ganzen Ausdehnung continuirlich durchlaufen und zwar derart, dass sie, ohne umzukehren, schliesslich gleichzeitig in ihre Anfangslagen zurückkommen; sollte die unendlich ferne Gerade bei der betreffenden eingliedrigen Gruppe nicht invariant bleiben, so kann natürlich auch ein im Endlichen gelegener Punkt bei seiner Bewegung durch das Unendliche hindurchgehen.

Wir werden jetzt zuerst alle reellen eingliedrigen projectiven Gruppen der Ebene aufsuchen, die von der eben geschilderten Beschaffenheit sind. Kennen wir die, so wird es uns nicht schwer fallen, alle zwei- und dreigliedrigen reellen projectiven Gruppen der Ebene aufzufinden, die nur reelle eingliedrige Untergruppen von dieser Beschaffenheit enthalten. Daraus endlich werden wir schliessen können, welche Form die lineare homogene Gruppe (29) hat.

Nach S. 107 und 384 lässt sich jede reelle eingliedrige projective Gruppe der Ebene durch eine reelle projective Transformation dieser Ebene auf eine der sieben Formen:

$$(30)\qquad \begin{cases} \mathfrak{p}+\mathfrak{y}\mathfrak{q};\quad \mathfrak{p}+\mathfrak{x}\mathfrak{q};\quad \mathfrak{y}\mathfrak{q};\quad \mathfrak{q} \\ \mathfrak{x}\mathfrak{p}+\mathfrak{c}\mathfrak{y}\mathfrak{q}\ (\mathfrak{c}\neq 0,1);\quad \mathfrak{y}\mathfrak{p}-\mathfrak{x}\mathfrak{q}+\mathfrak{c}(\mathfrak{x}\mathfrak{p}+\mathfrak{y}\mathfrak{q})\ (\mathfrak{c}\neq 0) \\ \mathfrak{y}\mathfrak{p}-\mathfrak{x}\mathfrak{q} \end{cases}.$$

bringen. Welche von diesen eingliedrigen Gruppen haben nun die hier von uns verlangte Beschaffenheit?

Die ersten fünf haben sie sicher nicht. Bei jeder von ihnen bleibt nämlich mindestens eine reelle Gerade in Ruhe, deren Punkte eingliedrig transformirt werden und zwar derart, dass auf dieser Geraden entweder zwei getrennte oder zwei zusammenfallende *reelle* Punkte ihre Lage behalten. Hieraus folgt, dass ein reeller Punkt einer solchen Geraden, der nicht in Ruhe bleibt, sich zwar im Allgemeinen frei auf der Geraden bewegen kann, dass er aber nicht im Stande ist, die Gerade continuirlich derart zu durchlaufen, dass er, ohne umzukehren, schliesslich in seine Anfangslage zurückkommt; er kann ja keinen der invarianten Punkte der Geraden überschreiten.

Ebensowenig erfüllt die eingliedrige Gruppe:

$$\mathfrak{y}\mathfrak{p}-\mathfrak{x}\mathfrak{q}+\mathfrak{c}(\mathfrak{x}\mathfrak{p}+\mathfrak{y}\mathfrak{q})\quad(\mathfrak{c}\neq 0)$$

unsre Forderung. Bei ihr beschreibt nämlich jeder nicht invariante reelle Punkt eine logarithmische Spirale; durchläuft er nun diese Spirale continuirlich ohne umzukehren, so kommt er offenbar niemals in seine Anfangslage zurück.

Demnach ist die eingliedrige Gruppe:

$$(31)\qquad \mathfrak{y}\mathfrak{p}-\mathfrak{x}\mathfrak{q},$$

bei der jeder reelle Punkt einen Kreis beschreibt, die einzige unter den Gruppen (30), die unsre Forderung erfüllt.

Betrachten wir nun die verschiedenen Typen der reellen zwei- und dreigliedrigen projectiven Gruppen in der Ebene (s. S. 106 f. und S. 384), so erkennen wir sofort, dass fast jede von ihnen eine reelle eingliedrige Untergruppe enthält, die eine der sechs ersten unter den Formen (30) besitzt oder doch wenigstens durch eine reelle projective Transformation auf eine dieser Formen gebracht werden kann. Die einzige reelle projective Gruppe mit zwei oder drei Parametern, die keine solche eingliedrige Gruppe enthält, ist die dreigliedrige reelle projective Gruppe:

$$(32)\qquad \mathfrak{p}+\mathfrak{x}(\mathfrak{x}\mathfrak{p}+\mathfrak{y}\mathfrak{q}),\quad \mathfrak{q}+\mathfrak{y}(\mathfrak{x}\mathfrak{p}+\mathfrak{y}\mathfrak{q}),\quad \mathfrak{y}\mathfrak{p}-\mathfrak{x}\mathfrak{q}$$

des imaginären Kegelschnitts: $\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+1=0$.

Hieraus folgt, dass die auf S. 462 definirte Gruppe $\mathfrak{g}$ unter den gemachten Voraussetzungen stets dreigliedrig ist und durch eine reelle projective Transformation auf die Form (32) gebracht werden kann.

Kehren wir daher zu der linearen homogenen Gruppe (29) zurück, so erkennen wir unmittelbar (vgl. S. 110), dass diese durch eine reelle lineare homogene Transformation die Form:

$$x_\mu' p_\nu' - x_\nu' p_\mu' + \alpha_{\mu\nu}(x_1' p_1' + x_2' p_2' + x_3' p_3') \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3;\ \alpha_{\mu\nu} + \alpha_{\nu\mu} = 0)$$

erhält. Durch paarweise Combination dieser Transformationen ergiebt sich endlich, dass alle $\alpha_{\mu\nu}$ verschwinden.

Damit sind wir zu dem Ergebnisse gelangt, dass die reelle lineare homogene Gruppe (29) unter den gemachten Voraussetzungen stets in der Form:

$$x_1' p_2' - x_2' p_1',\quad x_2' p_3' - x_3' p_2',\quad x_3' p_1' - x_1' p_3'$$

angenommen werden kann. Hieraus aber folgt, dass jede reelle Gruppe von Transformationen, die unsre Axiome III und IV erfüllt, in der Umgebung jedes reellen Punktes: x_1^0, x_2^0, x_3^0 von allgemeiner Lage drei unabhängige infinitesimale Transformationen von erster Ordnung in den $x_\nu - x_\nu^0$ enthält, die man sich auf die Form:

$$(x_\mu - x_\mu^0) p_\nu - (x_\nu - x_\nu^0) p_\mu + \cdots \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3;\ \mu < \nu)$$

gebracht denken kann, dass sie dagegen sonst keine infinitesimale Transformation von erster Ordnung enthält und insbesondere keine von der Form:

$$(x_1 - x_1^0) p_1 + (x_2 - x_2^0) p_2 + (x_3 - x_3^0) p_3 + \cdots.$$

Hiermit ist aber die Bestimmung aller dieser Gruppen auf das in § 84 (S. 365 ff.) erledigte Problem zurückgeführt. Wir können daher zunächst schliessen, dass die betreffenden Gruppen endlich sind und zwar sechsgliedrig. Ausserdem ergiebt sich aber, dass sie durch eine reelle Punkttransformation ähnlich sind entweder mit der Gruppe der Euklidischen Bewegungen oder mit der reellen projectiven Gruppe einer der beiden Flächen zweiten Grades:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0,\quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0.$$

Demnach lässt sich jede reelle Gruppe des dreifach ausgedehnten Raumes, die unsre Axiome III und IV erfüllt, durch eine reelle Punkttransformation entweder in die Gruppe der Euklidischen Bewegungen oder in eine der beiden Gruppen von Nichteuklidischen Bewegungen überführen. Mit andern Worten: Unsre Axiome I . . . IV reichen wirklich zur Charakterisirung dieser drei Arten von Bewegungen aus.

§ 96.

Welche Schlüsse lassen sich aus den Helmholtzschen Axiomen ziehen?

Wir wollen nunmehr von den Untersuchungen, die Herr v. Helmholtz selbst auf Grund seiner Axiome angestellt hat, ganz absehen und wollen, wie schon auf S. 438 angekündigt, feststellen, was aus den Helmholtzschen Axiomen an sich für Schlüsse gezogen werden können. Wir beschränken uns dabei wiederum auf den gewöhnlichen, dreifach ausgedehnten Raum.

In § 93 haben wir angegeben, wie sich die Helmholtzschen Axiome formuliren lassen, wenn man sie in der in § 92 auseinandergesetzten Weise deutet und wenn man die Begriffe und Ausdrucksweisen der Gruppentheorie hinzunimmt. Sehen wir nun zu, welche Gruppen des dreifach ausgedehnten Raumes den in § 93 aufgestellten Forderungen genügen.

Jede der verlangten Gruppen ist reell, endlich und continuirlich, zwei Punkte haben bei ihr eine und nur eine Invariante und mehr als zwei Punkte haben keine wesentliche Invariante. Nach Theorem 37, S. 433 ist aber jede derartige Gruppe durch eine reelle Punkttransformation ähnlich mit einer der auf S. 433 f. zusammengestellten Gruppen, es bleibt uns daher nur noch übrig, unter den dortigen Gruppen alle die auszuschliessen, die den übrigen Forderungen des § 93 nicht entsprechen.

Diese übrigen Forderungen kommen alle darauf hinaus, dass unsre Gruppen innerhalb eines gewissen endlichen Bereichs des dreifach ausgedehnten Raumes gewisse Eigenschaften besitzen sollen. Da der Coordinatenanfang bei allen den Gruppen auf S. 433 f. ein Punkt von allgemeiner Lage ist, so können wir offenbar annehmen, dass der betreffende Bereich aus allen reellen Punkten bestehe, die in einer gewissen Umgebung des Coordinatenanfangs liegen. Demnach brauchen wir nur noch zu untersuchen, welche unter den Gruppen auf S. 433 f. die nachstehenden Eigenschaften besitzen:

Erstens muss die Invariante: $J(x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2)$ zweier Punkte so beschaffen sein, dass die Relation:

$$(33) \qquad J(x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2) = J(x_1^0, y_1^0, z_1^0;\ x_2^0, y_2^0, z_2^0)$$

für jedes Paar von einander verschiedener reeller Werthsysteme: x_1^0, y_1^0, z_1^0 und x_2^0, y_2^0, z_2^0 in einer gewissen Umgebung des Coordinatenanfangs eine wirkliche Gleichung zwischen $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ liefert.

Zweitens muss bei Festhaltung des Coordinatenanfangs jeder beliebige Punkt x_0, y_0, z_0, der in einer gewissen Umgebung des Coordinatenanfangs liegt, noch in alle Punkte x, y, z dieser Umgebung übergehen können, die der Gleichung:

$$J(x, y, z; 0, 0, 0) = J(x_0, y_0, z_0; 0, 0, 0) \tag{34}$$

genügen und nach denen überhaupt ein continuirlicher Uebergang durch Punkte dieser Art möglich ist*).

Drittens muss das Monodromieaxiom erfüllt sein.

Wir untersuchen zunächst, bei jeder einzelnen unter den Gruppen auf S. 433 f., ob sie die erste unter diesen Forderungen erfüllt, thut sie das, so fragen wir, ob sie die zweite erfüllt; das Monodromieaxiom ziehen wir erst in letzter Linie in Betracht. Da übrigens die Gruppe der Euklidischen und die beiden Gruppen von Nichteuklidischen Bewegungen offenbar alle unsre Forderungen erfüllen, so lassen wir sie gleich von vornherein bei Seite.

Dass die beiden Gruppen:

$$p,\ q,\ r,\ xq - yp,\ yr + zq,\ zp + xr \tag{35}$$

und:

$$p - xU,\ q - yU,\ r + zU,\ xq - yp,\ yr + zq,\ zp + xr$$

unsre erste Forderung erfüllen, liegt auf der Hand, denn z. B. für die erste von ihnen lautet die Gleichung (33) so:

$$\begin{cases} (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = \\ = (x_2^0 - x_1^0)^2 + (y_2^0 - y_1^0)^2 - (z_2^0 - z_1^0)^2 \end{cases} \tag{36}$$

und das ist immer eine wirkliche Gleichung zwischen $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$. Dagegen erfüllen sie die zweite Forderung nicht. Für beide Gruppen hat nämlich die zugehörige Gleichung (34) die Form:

$$x^2 + y^2 - z^2 = x_0^2 + y_0^2 - z_0^2. \tag{37}$$

Nun kann allerdings im Allgemeinen der Punkt x_0, y_0, z_0 nach Festhaltung des Coordinatenanfangs noch in alle reellen Punkte übergehen, die der Gleichung (37) genügen, aber für alle Punkte x_0, y_0, z_0, die auf dem Kegel zweiten Grades: $x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 0$ liegen, gilt das nicht mehr; für diese Punkte erhält ja die Gleichung (37) die Form:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

und es ist klar, dass jeder solche Punkt in alle Punkte übergehen kann, die dieser Gleichung genügen, nur nicht in den Coordinatenanfang, denn der bleibt unter den gemachten Voraussetzungen in Ruhe.

*) Allerdings wird in § 93 eigentlich noch mehr verlangt, aber wir werden sehen, dass schon diese Forderung vollständig genügt.

Wir sehen hieraus, dass die Gruppen (35) und (36) schon auszuschliessen sind, ohne dass man das Monodromieaxiom benutzt.

Für die Gruppe:

(38) $p,\ q,\ xp + r,\ yq + cr,\ x^2p + 2xr,\ y^2q + 2cyr \quad (c \neq 0)$

lässt sich die zugehörige Gleichung (33) in der Form:

$$\frac{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)^c}{e^{\frac{1}{2}(z_1 + z_2)}} = \frac{(x_2^0 - x_1^0)(y_2^0 - y_1^0)^c}{e^{\frac{1}{2}(z_1^0 + z_2^0)}}$$

schreiben. Ist c negativ, so wird diese Gleichung zu einer Identität, sobald man $x_2^0 = x_1^0$ und $y_2^0 = y_1^0$ setzt, ist dagegen c positiv, so liefert sie für jedes Paar von einander verschiedener Werthsysteme x_1^0, y_1^0, z_1^0 und x_2^0, y_2^0, z_2^0 eine wirkliche Gleichung zwischen x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2. Die Gruppe (38) erfüllt daher unsre erste Forderung nur dann, wenn c positiv ist.

Aber die zweite Forderung erfüllt sie auch im Falle: $c > 0$ nicht. Die Gleichung (34) erhält nämlich für unsre Gruppe die Form:

$$\frac{x \cdot y^c}{e^{\frac{1}{2}z}} = \frac{x_0 \cdot y_0^c}{e^{\frac{1}{2}z_0}},$$

es müsste also nach Festhaltung des Coordinatenanfangs der Punkt x_0, y_0, z_0 noch alle Lagen x, y, z in einer gewissen Umgebung des Coordinatenanfangs annehmen können, die dieser Gleichung genügen. Für Punkte x_0, y_0, z_0 von allgemeiner Lage ist das allerdings der Fall. Ist jedoch z. B. $x_0 = y_0 = 0$, so müsste der Punkt x_0, y_0, z_0 noch in alle in einer gewissen Umgebung des Coordinatenanfangs liegenden Punkte übergehen können, die der Gleichung: $xy^c = 0$ genügen, das ist aber unmöglich, da bei Festhaltung des Coordinatenanfangs überhaupt alle Punkte der Geraden: $x = y = 0$ in Ruhe bleiben (s. S. 426).

Also ist auch die Gruppe (38) auszuschliessen, ohne dass man genöthigt wäre, das Monodromieaxiom herbeizuziehen.

Bei der Gruppe:

$$(39) \qquad \begin{cases} p,\ q,\ xp + yq + ar,\ yp - xq + r \\ (x^2 - y^2)p + 2xyq + 2(ax - y)r \\ 2xyp + (y^2 - x^2)q + 2(x + ay)r \end{cases}$$

ist sogar schon unsre erste Forderung niemals erfüllt, die zugehörige Gleichung (33) liefert nämlich stets, wenn: $x_2^0 = x_1^0$, $y_2^0 = y_1^0$ gesetzt wird, keine wirkliche Gleichung zwischen $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$.

Anders ist es bei der Gruppe:

$$(40)\qquad \begin{cases} p,\ q,\ xp+yq+r,\ yp-xq \\ (x^2-y^2)p+2xyq+2xr \\ 2xyp+(y^2-x^2)q+2yr. \end{cases}$$

Bei ihr lautet nämlich die Gleichung (33) so:

$$\{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\}e^{-(z_1+z_2)} = \\ = \{(x_2{}^0-x_1{}^0)^2+(y_2{}^0-y_1{}^0)^2\}\,e^{-(z_1{}^0+z_2{}^0)}$$

und das ist immer eine wirkliche Gleichung zwischen $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$. Unsre erste Forderung ist also erfüllt; dafür aber die zweite nicht.

In der That, die Gleichung (34) lautet jetzt:

$$(x^2+y^2)e^{-z} = (x_0{}^2+y_0{}^2)e^{-z_0},$$

sollte daher unsre zweite Forderung erfüllt sein, so müsste zum Beispiel jeder Punkt x_0, y_0, z_0, für den $x_0 = y_0 = 0$ ist, nach Festhaltung des Coordinatenanfangs noch in alle Punkte x, y, z übergehen können, die der Gleichung: $x^2+y^2=0$ genügen, oder, da es sich um reelle Grössen handelt, den beiden Gleichungen: $x=y=0$. Das aber ist unmöglich, weil mit dem Coordinatenanfange zugleich überhaupt alle Punkte der Geraden: $x=y=0$ in Ruhe bleiben.

Demnach kommen auch die Gruppen (39) und (40) für uns nicht in Betracht.

Die beiden Gruppen:

$$(41)\qquad \begin{cases} p,\ q,\ xq+r,\ xp+yq+cr,\ x^2q+2xr, \\ \qquad x^2p+2xyq+2(y+cx)r \end{cases}$$

und:

$$(42)\qquad p,\ q,\ r,\ 2xp+yq,\ xq+yr,\ x^2p+xyq+\tfrac{1}{2}y^2r$$

erfüllen nicht einmal unsre erste Forderung; die zugehörige Gleichung (33) liefert nämlich beide Male keine wirkliche Gleichung zwischen $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$, sobald man $x_2{}^0 = x_1{}^0$, $y_2{}^0 = y_1{}^0$ setzt.

Die Gruppe:

$$(43)\qquad r,\ p-yr,\ q+xr,\ xq,\ xp-yq,\ yp$$

endlich erfüllt zwar unsre erste Forderung, nicht aber die zweite. Die zugehörige Gleichung (34) lautet nämlich: $z=z_0$, demnach müsste bei Festhaltung des Coordinatenanfangs jeder andre Punkt x_0, y_0, z_0 noch in alle Punkte x, y, z übergehen können, die auf der Ebene: $z=z_0$

liegen. Dass dies nicht der Fall ist, zeigen die Punkte, für die $x_0 = y_0 = 0$ ist, denn die bleiben bei Festhaltung des Coordinatenanfangs alle in Ruhe.

Durch das Vorstehende ist bewiesen, *dass die Gruppe der Euklidischen Bewegungen und die beiden Gruppen von Nichteuklidischen Bewegungen die einzigen Gruppen sind, die den in* § 93 *aufgestellten Forderungen genügen; sie sind die einzigen Gruppen dieser Art selbst dann noch, wenn man das Monodromieaxiom ganz fallen lässt.*

Wir sehen hieraus, dass die Helmholtzschen Axiome zur Charakterisirung der Euklidischen und der Nichteuklidischen Bewegungen ausreichend sind, *wenn man sie in der Weise deutet,* wie es in § 92 und 93 geschehen ist, wir sehen aber zugleich, dass bei Zugrundelegung dieser Deutung jedenfalls das Monodromieaxiom überflüssig ist. Wenn aber einmal eines der Helmholtzschen Axiome sich als entbehrlich herausgestellt hat, so liegt es recht nahe, zu fragen, ob nicht auch noch andre Theile dieser Axiome entbehrt werden können. In Kapitel 23 werden wir zeigen, dass diese Frage zu bejahen ist.

Aber es giebt noch einen Punkt, der in Erwägung gezogen zu werden verdient. In § 92 und 93 haben wir die Helmholtzschen Axiome in gewisser Weise gedeutet. Es liegt uns fern zu behaupten, dass diese unsre Deutung die einzig mögliche sei, wir geben vielmehr unumwunden zu, dass die bewussten Axiome verschiedene Deutungen zulassen. Das liegt in der Natur der Sache: Herr v. Helmholtz, dem die Begriffe und die ausgebildete Kunstsprache der Gruppentheorie nicht zu Gebote standen, musste sich mit langen Umschreibungen helfen, durch die er doch nicht allen denkbaren Ausnahmen gerecht werden konnte; daher ist es ganz erklärlich, dass seine Axiome, je sorgfältiger man sie durchdenkt, um so vieldeutiger erscheinen. Wenn wir nun auch nicht die einzig mögliche Deutung der Helmholtzschen Axiome gegeben zu haben behaupten, so glauben wir doch, dass wir ihnen die günstigste Deutung untergelegt haben, die mit ihrem Wortlaute verträglich ist; manchem Leser mögen wir sogar schon zu viel in sie hineingelegt haben.

Wir wollen nicht näher auf die verschiedenen Auffassungen eingehen, die bei den Helmholtzschen Axiomen möglich sind; nur eins wollen wir noch kurz besprechen.

Wie man nämlich auch diese Axiome deuten möge, es wird im Wesentlichen stets darauf ankommen, ob man aus ihnen herausliest, dass sie innerhalb eines gewissen Bereichs ausnahmelos gelten sollen, oder ob man annimmt, dass sie nur im Allgemeinen, also für Punkte

von allgemeiner gegenseitiger Lage gelten sollen. Wir haben uns in § 92 und 93 für die erste Auffassung entschieden, aber auch die zweite hat eine gewisse Berechtigung, wenigstens bei dem dritten Helmholtzschen Axiome, dem Axiome über die freie Beweglichkeit. Um zu zeigen, welchen Einfluss diese Auffassung auf die Tragweite der Helmholtzschen Axiome hat, wollen wir zum Schluss noch untersuchen, was herauskommt, wenn die Helmholtzschen Axiome nur für Punkte von allgemeiner gegenseitiger Lage erfüllt sind. Wir werden sehen, dass diese Axiome dann nicht einmal mit Hinzunahme des Monodromieaxioms zur Charakterisirung der Euklidischen und der Nichteuklidischen Bewegungen hinreichen.

Soll eine reelle Gruppe die Helmholtzschen Axiome nur für Punkte von allgemeiner gegenseitiger Lage erfüllen, so muss sie, wenn zunächst vom Monodromieaxiom abgesehen wird, die folgenden Eigenschaften besitzen: Wird ein Punkt von allgemeiner Lage festgehalten, so bewegt sich jeder andre Punkt von allgemeiner Lage frei auf einer Fläche; werden zwei Punkte von allgemeiner gegenseitiger Lage festgehalten, so bewegt sich jeder dritte Punkt von allgemeiner Lage frei auf einer Curve; werden drei Punkte von allgemeiner gegenseitiger Lage festgehalten, so bleiben alle Punkte in Ruhe. Es ist klar, dass die auf S. 433 f. zusammengestellten Gruppen alle diese Forderungen erfüllen und dass sie die einzigen sind, die das thun.

Nehmen wir nun das Monodromieaxiom hinzu, so werden dadurch eine ganze Anzahl von den bewussten Gruppen ausgeschlossen, weil sie das Monodromieaxiom nicht erfüllen; es bleiben aber nicht blos die Euklidischen und die Nichteuklidischen Bewegungen übrig, sondern ausserdem noch eine Gruppe, nämlich die Gruppe 7 auf S. 434. Von dieser Gruppe haben wir auf S. 457 ff. gezeigt, dass sie das Helmholtzsche Monodromieaxiom vollständig befriedigt. Das Monodromieaxiom genügt daher unter den gemachten Voraussetzungen nicht, um auch diese Gruppe auszuschliessen.

Alles in Allem können wir die Ergebnisse unsers gegenwärtigen Paragraphen kurz so aussprechen:

Die Euklidischen und die Nichteuklidischen Bewegungen werden durch die Helmholtzschen Axiome vollständig charakterisirt, wenn man diese Axiome so deutet, dass sie innerhalb eines gewissen Bereiches für alle Punkte ohne Ausnahme erfüllt sein sollen; deutet man sie aber so, dann ist das Monodromieaxiom überflüssig. Verlangt man jedoch nur, dass die Helmholtzschen Axiome für Punkte von allgemeiner gegenseitiger Lage erfüllt seien, so sind sie nicht genügend, um die Euklidischen und die Nichteuklidischen Bewegungen

zu charakterisiren, sie reichen dann nicht einmal bei Mitnahme des Monodromieaxioms aus.

Wir haben gesehen, dass die Helmholtzschen Axiome zwar zur Charakterisirung der Euklidischen und der Nichteuklidischen Bewegungen hinreichen, wenn man sie in gewisser Weise deutet, dass sie aber, wenn man sie so deutet, überflüssige Bestandtheile enthalten und infolgedessen keine wirkliche Lösung des Riemann-Helmholtzschen Problems darstellen. Wir werden jetzt in den beiden nächsten Kapiteln das Riemann-Helmholtzsche Problem von Neuem behandeln und es in zwei verschiedenen Weisen lösen, nämlich in Kapitel 22 durch Aufstellung gewisser Axiome, die sich auf unendlich benachbarte Punkte beziehen, und in Kapitel 23 durch Axiome über endlich von einander entfernte Punkte.

Kapitel 22.

Erste Lösung des Riemann-Helmholtzschen Problems.

Das Riemann-Helmholtzsche Problem, wie wir es auf S. 397 formulirt haben, verlangt die Angabe solcher Eigenschaften, die der Schaar der Euklidischen und den beiden Schaaren von Nichteuklidischen Bewegungen gemeinsam sind und durch die sich diese drei Schaaren vor allen andern möglichen Schaaren von Bewegungen auszeichnen.

An und für sich ist diese Aufgabe unbestimmt, wir bestimmen sie daher von vornherein näher durch die Forderung, dass der Inbegriff der anzugebenden Eigenschaften zur Charakterisirung unsrer drei Schaaren nicht blos hinreichend sei, sondern auch nothwendig, das heisst, dass nicht schon ein Theil der betreffenden Eigenschaften jene drei Schaaren von Bewegungen vollständig charakterisire. Aber auch in dieser bestimmteren Fassung lässt die Aufgabe noch sehr verschiedene Lösungen zu, da man in der Auswahl der verlangten Eigenschaften sonst keiner Beschränkung weiter unterworfen ist.

Unter den Eigenschaften, die unsern drei Schaaren von Bewegungen gemeinsam sind, liegt uns am nächsten die, dass jede der drei Schaaren eine reelle continuirliche Gruppe bildet, deren Transformationen paarweise invers sind. Wir nehmen daher diese Eigenschaft von vornherein als etwas Gegebenes*) an und brauchen nun blos

*) Wir wollen nicht unerwähnt lassen, dass es sehr gut möglich ist, andre Forderungen aufzustellen, aus denen die Gruppeneigenschaft folgt. Aber

noch zu fragen: *Durch welche Eigenschaften sind die Gruppe der Euklidischen und die beiden Gruppen von Nichteuklidischen Bewegungen unter allen reellen continuirlichen Gruppen mit paarweise inversen Transformationen ausgezeichnet?* Der Bequemlichkeit wegen lassen wir im Folgenden die Worte „mit paarweise inversen Transformationen" immer weg, sie sind daher jedesmal mit hinzuzudenken.

In dem gegenwärtigen Kapitel werden wir diese Frage in der Weise beantworten, dass wir uns auf solche Eigenschaften unsrer drei Gruppen beschränken, die sich auf unendlich benachbarte Punkte beziehen. Wir werden einen neuen Begriff einführen, nämlich den Begriff *der freien Beweglichkeit im Infinitesimalen* und werden zeigen, dass jede reelle continuirliche Gruppe eines Raumes von mehr als zwei Dimensionen, die in einem reellen Punkte von allgemeiner Lage freie Beweglichkeit im Infinitesimalen besitzt, durch eine reelle Punkttransformation dieses Raumes entweder mit der Gruppe der Euklidischen oder mit einer der beiden Gruppen von Nichteuklidischen Bewegungen des betreffenden Raumes ähnlich ist. Damit ist dann bewiesen, dass die Eigenschaften, die wir in dem Begriffe der freien Beweglichkeit im Infinitesimalen zusammengefasst haben, solche charakteristische Eigenschaften sind, wie wir sie suchen*).

In § 97 betrachten wir zunächst die Ebene, in der allerdings der Begriff der freien Beweglichkeit im Infinitesimalen noch nicht zur Charakterisirung der Euklidischen und der Nichteuklidischen Bewegungen hinreicht. In § 98 behandeln wir den gewöhnlichen dreifach ausgedehnten Raum und in § 99 den Raum von beliebig vielen Dimensionen. In § 100 endlich gehen wir kurz auf die Beziehungen ein, die zwischen unsern Entwicklungen und denen Riemanns bestehen.

§ 97.

Es sei $\mathfrak{G}$ eine reelle continuirliche Gruppe irgend eines Raumes und F sei eine beliebige Figur in diesem Raume. Wenn dann $\mathfrak{G}$ eine

man darf wohl behaupten, dass es naturgemäss ist, die Forderung der Gruppeneigenschaft von vornherein aufzustellen. In dem Begriffe der Bewegung liegt es ja, dass man zwei Bewegungen nach einander ausführen kann, und hieraus folgt unmittelbar, dass der Inbegriff der Transformationen, welche die im Raume durch Bewegung möglichen Ortsveränderungen darstellen, eine Gruppe bildet. Wir fügen nur noch die Voraussetzung hinzu, dass die Gruppe continuirlich ist und aus paarweise zu einander inversen Transformationen besteht. Uebrigens haben wir ja in Kap. 21 eine Lösung gegeben, die die Gruppeneigenschaft nicht benutzt.

*) Das Folgende ist eine Neubearbeitung der Lieschen Abhandlung auf S. 284—321 der Leipziger Berichte von 1890.

reelle continuirliche Untergruppe mit mindestens einem Parameter enthält, bei der die Figur F invariant bleibt, so wollen wir sagen, dass bei der Gruppe $\mathfrak{G}$ nach Festhaltung von F noch continuirliche Bewegung möglich sei. Wenn dagegen die grösste continuirliche Untergruppe von $\mathfrak{G}$, die F invariant lässt, blos aus der identischen Transformation besteht, so sagen wir, dass nach Festhaltung von F keine continuirliche Bewegung mehr möglich sei.

Unter Benutzung dieser Ausdrucksweise definiren wir nunmehr, was wir in der Ebene unter freier Beweglichkeit im Infinitesimalen verstehen:

Definition. *Eine reelle continuirliche Gruppe der Ebene besitzt in dem reellen Punkte P freie Beweglichkeit im Infinitesimalen, wenn sie die folgenden Forderungen erfüllt: Nach Festhaltung von P soll noch continuirliche Bewegung möglich sein, dagegen soll keine continuirliche Bewegung mehr möglich sein, sobald man ausser P noch ein beliebiges reelles Linienelement durch P festhält.*

Wir suchen jetzt alle reellen continuirlichen Gruppen der Ebene, die in irgend einem reellen Punkte *von allgemeiner Lage* freie Beweglichkeit im Infinitesimalen besitzen.

Es sei G eine Gruppe von der verlangten Beschaffenheit und P sei der reelle Punkt von allgemeiner Lage, in dem G freie Beweglichkeit im Infinitesimalen besitzt. Ist dann g die grösste continuirliche Untergruppe von G, bei der P in Ruhe bleibt, so muss sich bei g jedes durch P gehende reelle Linienelement continuirlich um P drehen können; denn wäre dies nicht der Fall, so liesse g mindestens eines dieser Linienelemente in Ruhe, g wäre also die grösste continuirliche Untergruppe von G, bei der der Punkt P und das betreffende Linienelement invariant bliebe, es müsste demnach auf die identische Transformation zusammenschrumpfen, während wir doch voraussetzen, dass nach Festhaltung von P noch continuirliche Bewegung möglich sei.

Hieraus folgt sofort, dass G nicht nur transitiv, sondern sogar reell-primitiv*) ist. Wäre es nämlich intransitiv oder reell-imprimitiv, so liesse es eine reelle Curvenschaar: $\varphi(x, y) = \text{const.}$ invariant, mit jedem reellen Punkte x, y von allgemeiner Lage bliebe daher zugleich das hindurchgehende reelle Linienelement: $dx : dy$ in Ruhe, das durch

*) Als reell-primitiv bezeichnen wir der Kürze wegen jede reelle Gruppe, die primitiv ist, sobald man sich auf das Reelle beschränkt, wenn sie auch im complexen Gebiete imprimitiv sein sollte (vgl. S. 363).

die Gleichung: $\varphi_x dx + \varphi_y dy = 0$ bestimmt wäre; da aber bei Festhaltung des Punktes P, der ja auch von allgemeiner Lage ist, kein hindurchgehendes reelles Linienelement in Ruhe bleibt, so gelangten wir hiermit zu einem Widerspruch.

Es ist ferner leicht zu erkennen, dass unsre Gruppe G dreigliedrig ist. In der That, wenn man den Punkt P und ein beliebiges hindurchgehendes reelles Linienelement festhält, so ist keine continuirliche Bewegung mehr möglich, es bleibt also kein willkürlicher Parameter in der Gruppe mehr übrig. Da überdies P als Punkt von allgemeiner Lage wegen der Transitivität der Gruppe ∞^2 verschiedene Lagen annehmen kann und da nach Festhaltung von P die reellen Linienelemente durch P sich alle noch continuirlich um P drehen können, so liefert das Festhalten des Punktes und des Linienelements gerade *drei* Bedingungen für die Parameter von G, die Zahl dieser Parameter ist mithin gleich *drei*. Nun aber haben wir alle dreigliedrigen reellen reell-primitiven Gruppen der Ebene bereits auf S. 370 ff. bestimmt, also erhalten wir das

Theorem 38. *Besitzt eine reelle continuirliche Gruppe der Ebene in einem reellen Punkte von allgemeiner Lage freie Beweglichkeit im Infinitesimalen, so ist sie dreigliedrig und durch eine reelle Punkttransformation dieser Ebene ähnlich entweder mit der dreigliedrigen reellen continuirlichen projectiven Gruppe des Kegelschnitts:*

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

oder mit der reellen continuirlichen projectiven Gruppe des Kegelschnitts:

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

oder mit einer dreigliedrigen projectiven Gruppe von der Form:

$$p,\ q,\ yp - xq + c(xp + yq),$$

wo c eine reelle Constante bedeutet.

An den hier gefundenen Gruppen ist zunächst bemerkenswerth, dass sie alle in sämmtlichen reellen Punkten eines gewissen Theils der Ebene freie Beweglichkeit im Infinitesimalen besitzen, während wir nur verlangt hatten, dass sie diese Eigenschaft in *einem* reellen Punkte von allgemeiner Lage besässen. Diese Erscheinung hat ihren Grund darin, dass jede Gruppe die in einem reellen Punkte von allgemeiner Lage freie Beweglichkeit im Infinitesimalen besitzt, diese Eigenschaft auch in allen reellen Punkten hat, die in einer gewissen Umgebung des betreffenden Punktes liegen.

Andrerseits zeigen die gefundenen Gruppen, dass in der Ebene

die freie Beweglichkeit im Infinitesimalen noch nicht genügt, um die Gruppe der Euklidischen und die beiden Gruppen von Nichteuklidischen Bewegungen zu charakterisiren, denn ausser diesen drei Gruppen besitzt ja noch jede Gruppe von der Form:

$$p,\ q,\ yp - xq + c(xp + yq) \quad (c \gtrless 0)$$

in jedem reellen, nicht unendlich fernen Punkte freie Beweglichkeit im Infinitesimalen. Will man diese Gruppen ausschliessen, um nur die Euklidischen und die Nichteuklidischen Bewegungen zu behalten, so muss man ein besondres Axiom aufstellen. Diese Bemerkung deckt sich jedoch nicht mit Herrn v. Helmholtzs Bemerkung, dass in der Ebene die Euklidischen und die beiden Nichteuklidischen Gruppen nicht die einzigen sind, bei denen zwei Punkte nur eine und mehr als zwei Punkte keine wesentliche Invariante haben.

Wir vervollständigen nunmehr die gewonnenen Ergebnisse, indem wir auch alle reellen continuirlichen *projectiven* Gruppen der Ebene aufsuchen, die in einem reellen Punkte von allgemeiner Lage freie Beweglichkeit im Infinitesimalen besitzen. Die Bekanntschaft mit diesen Gruppen wird uns nachher bei der Betrachtung des dreifach ausgedehnten Raumes von Nutzen sein.

Genau wie oben erkennen wir zunächst, dass jede projective Gruppe der Ebene, die unsern Forderungen genügt, dreigliedrig und transitiv ist. Aus unsrer Aufzählung der dreigliedrigen projectiven Gruppe der Ebene (s. S. 106) ergiebt sich weiter, dass jede der verlangten Gruppen entweder einen Kegelschnitt oder einen Punkt invariant lässt.

Bleibt ein Kegelschnitt invariant, so muss dessen Gleichung reell sein, denn sonst bliebe auch der conjugirt imaginäre Kegelschnitt invariant und unsre Gruppe könnte daher nicht dreigliedrig sein. Da nun jeder Kegelschnitt, dessen Gleichung reell ist, durch eine reelle projective Transformation auf eine der beiden Formen: $x^2+y^2\pm 1=0$ gebracht werden kann, so ist dieser Fall schon erledigt.

Bleibt andrerseits ein Punkt invariant, so kann der nicht reell sein, denn sonst könnte sich, wenn ein reeller Punkt von allgemeiner Lage festgehalten würde, nicht jedes hindurchgehende reelle Linienelement um ihn drehen, es gäbe also keinen reellen Punkt von allgemeiner Lage, in dem die Gruppe freie Beweglichkeit im Infinitesimalen besässe. Der invariante Punkt ist demnach imaginär und es bleibt zugleich der conjugirt imaginäre Punkt sowie die reelle Verbindungsgerade beider in Ruhe. Verlegen wir daher die beiden invarianten

Punkte durch eine reelle projective Transformation in die beiden Kreispunkte, so verwandelt sich unsre Gruppe in eine dreigliedrige Untergruppe der viergliedrigen Gruppe:

$$(1) \qquad p,\ q,\ yp - xq,\ xp + yq,$$

wir brauchen somit nur noch alle dreigliedrigen Untergruppen dieser Gruppe aufzusuchen, die unsre Forderung erfüllen.

Besitzt eine dreigliedrige reelle Untergruppe G von (1) in dem reellen Punkte x_0, y_0 von allgemeiner Lage freie Beweglichkeit im Infinitesimalen, so werden, wenn man diesen Punkt festhält, die ∞^1 reellen Linienelemente: $dx : dy$ durch ihn eingliedrig transformirt. Denken wir uns daher den Punkt: x_0, y_0 durch eine reelle Transformation der zweigliedrigen Gruppe: p, q in den Coordinatenanfang verlegt, so bekommt G eine neue Form, in der es jedenfalls eine infinitesimale Transformation von der Gestalt:

$$(2) \qquad yp - xq + c(xp + yq)$$

enthält, denn: $xp + yq$ lässt überhaupt jedes Linienelement durch den Coordinatenanfang in Ruhe. Ausserdem enthält G als transitive Gruppe noch zwei infinitesimale Transformationen von der Form:

$$p + \alpha(xp + yq), \quad q + \beta(xp + yq).$$

Combinirt man nun die mit (2), so ergiebt sich:

$$-q + cp, \quad p + cq$$

und da c reell ist, G aber blos drei unabhängige infinitesimale Transformationen enthalten kann, lässt sich schliessen, dass α und β beide verschwinden, dass also G die Form:

$$p,\ q,\ yp - xq + c(xp + yq)$$

besitzt. Mithin gilt der

Satz 1. *Besitzt eine reelle continuirliche projective Gruppe der Ebene in einem reellen Punkte von allgemeiner Lage freie Beweglichkeit im Infinitesimalen, so ist sie dreigliedrig und durch eine reelle projective Transformation der Ebene mit einer der in Theorem 38 angegebenen projectiven Gruppen ähnlich.*

Unter den in Theorem 38 zusammengestellten projectiven Gruppen giebt es zwei, die in gewissen reellen Punkten der Ebene keine freie Beweglichkeit im Infinitesimalen besitzen, nämlich erstens die Gruppe des Kegelschnitts: $x^2 + y^2 - 1 = 0$ und zweitens die Gruppe: $p,\ q,\ yp - xq + c(xp + yq)$. Bei der ersten findet in allen reellen Punkten des Kegelschnitts und in allen ausserhalb des Kegelschnitts liegenden reellen Punkten keine freie Beweglichkeit im Infinitesimalen statt, bei der zweiten in allen reellen Punkten der unendlich fernen

Geraden. Dagegen giebt es bei der Gruppe des Kegelschnitts: $x^2 + y^2 + 1 = 0$ keine derartigen Ausnahmepunkte. Also:

Theorem 39. *Besitzt eine reelle continuirliche projective Gruppe ohne Ausnahme in allen reellen Punkten der Ebene freie Beweglichkeit im Infinitesimalen, so ist sie dreigliedrig und transitiv und kann durch eine reelle projective Transformation in die dreigliedrige reelle projective Gruppe des Kegelschnitts: $x^2 + y^2 + 1 = 0$ übergeführt werden.*

§ 98.

Die Untersuchungen des vorigen Paragraphen sollen jetzt für den gewöhnlichen dreifach ausgedehnten Raum durchgeführt werden. Wir definiren daher zunächst, was wir hier unter freier Beweglichkeit im Infinitesimalen verstehen:

Definition. *Eine reelle continuirliche Gruppe des dreifach ausgedehnten Raumes besitzt in dem reellen Punkte P freie Beweglichkeit im Infinitesimalen, wenn sie die folgenden Forderungen erfüllt: Hält man den Punkt P und ein beliebiges hindurchgehendes reelles Linienelement fest, so soll stets noch continuirliche Bewegung möglich sein, hält man dagegen ausser P und jenem Linienelemente noch ein beliebiges reelles Flächenelement fest, das durch beide geht, so soll keine continuirliche Bewegung mehr möglich sein* (vgl. S. 472 f.).

Wir suchen nun alle reellen continuirlichen Gruppen des R_3, die in einem reellen Punkte von allgemeiner Lage freie Beweglichkeit im Infinitesimalen besitzen.

Es sei G eine Gruppe von der verlangten Beschaffenheit und P der reelle Punkt von allgemeiner Lage, in dem G freie Beweglichkeit im Infinitesimalen besitzt. Hält man dann P und ausserdem noch ein beliebiges reelles Linienelement durch ihn fest, so muss sich jedes durch beide gehende reelle Flächenelement noch continuirlich um das betreffende Linienelement drehen können, sonst wäre ja im Widerspruch mit unsrer Voraussetzung nach Festhaltung des bewussten Linienelements keine continuirliche Bewegung mehr möglich.

Hieraus lässt sich schliessen, dass G transitiv ist. Blieben nämlich bei G ∞^1 reelle Flächen: $\varphi(x_1, x_2, x_3) = \text{const.}$ invariant, so würde P zusammen mit der Tangentialebene an die durch ihn gehende Fläche: $\varphi = \text{const.}$ ein reelles Flächenelement bestimmen, das sich um keines der in ihm liegenden Linienelemente drehen könnte. Blieben andrerseits ∞^2 reelle Curven invariant, so könnte man die auf unbegränzt viele Weisen in Schaaren von je ∞^1 invarianten Flächen an-

ordnen, man käme also auf den soeben als unmöglich nachgewiesenen Fall zurück.

Durch unsern Punkt P gehen ∞^2 reelle Linienelemente: $dx_1 : dx_2 : dx_3$, die eine ebene zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit bilden. Halten wir P fest, so wird diese Mannigfaltigkeit durch eine reelle projective Gruppe $\mathfrak{g}$ transformirt, die offenbar so beschaffen ist, dass bei Festhaltung eines beliebigen reellen Linienelements sich jedes hindurchgehende reelle Flächenelement continuirlich um das Linienelement drehen kann, während gar keine continuirliche Bewegung mehr möglich ist, sobald man ein beliebig reelles Linienelement und ein beliebiges hindurchgehendes reelles Flächenelement festhält. Beziehen wir nun aber die ∞^2 reellen Linienelemente durch P projectiv auf die reellen Punkte einer Ebene, so verwandelt sich die Gruppe $\mathfrak{g}$ in eine holoedrisch isomorphe reelle projective Gruppe $\mathfrak{g}'$ dieser Ebene, zugleich aber entsprechen den reellen Flächenelementen durch P die reellen Linienelemente dieser Ebene, wir erkennen daher sofort, dass die Gruppe $\mathfrak{g}'$ ohne Ausnahme in allen Punkten ihrer Ebene freie Beweglichkeit im Infinitesimalen besitzt. Nach Theorem 39 folgt hieraus, dass $\mathfrak{g}'$ dreigliedrig und transitiv ist und durch eine reelle projective Transformation der Ebene in die Gruppe des Kegelschnitts: $x^2 + y^2 + 1 = 0$ übergeführt werden kann. Demnach ist auch die Gruppe $\mathfrak{g}'$ transitiv und dreigliedrig und lässt einen imaginären Kegel von Linienelementen invariant, dessen Gleichung wir uns durch eine reelle lineare homogene Transformation von dx_1, dx_2, dx_3 auf die Form:

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = 0 \tag{3}$$

gebracht denken können.

Auf die Gruppe G angewandt ergiebt das zunächst, dass G sechsgliedrig ist. Wird nämlich der Punkt P, ein reelles hindurchgehendes Linienelement und ein beliebiges durch beide gehendes reelles Flächenelement festgehalten, so werden dadurch die Parameter von G genau $3 + 2 + 1 = 6$ Bedingungen unterworfen, das folgt aus der Transitivität von G und aus der oben geschilderten Beschaffenheit von $\mathfrak{g}$. Da nun aber unter den eben gemachten Voraussetzungen gar keine continuirliche Bewegung mehr möglich ist, so muss die Zahl dieser Parameter gerade gleich sechs sein.

Ferner ist klar, dass die sechsgliedrige transitive Gruppe G nach Festhaltung von P die ∞^2 reellen Linienelemente durch P dreigliedrig transformirt und zwar derart, dass ein imaginärer Kegel zweiten Grades von Linienelementen invariant bleibt. Denken wir uns daher P durch eine reelle Punkttransformation in den Coordinatenanfang ver-

legt und sodann durch eine reelle lineare homogene Transformation in x_1, x_2, x_3 bewirkt, dass der P zugeordnete Kegel von Linienelementen durch die Gleichung (3) dargestellt wird, so bekommt G eine solche neue Form, dass es in der Umgebung des Coordinatenanfangs sechs unabhängige infinitesimale Transformationen von der Form:

$$p_1 + \cdots,\ p_2 + \cdots,\ p_3 + \cdots,$$
$$x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + \alpha_{\mu\nu}(x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3) + \cdots$$
$$(\mu, \nu = 1, 2, 3;\ \mu < \nu)$$

enthält. Wegen der Sechsgliedrigkeit von G müssen hier die reellen Constanten $\alpha_{\mu\nu}$ sämmtlich verschwinden, wie man sich leicht durch Combination überzeugt.

Die Gruppe G gehört demnach zu den reellen Gruppen, die wir auf S. 385 ff. bestimmt haben; da sie überdies sechsgliedrig ist, so erhalten wir das

Theorem 40. *Besitzt eine reelle continuirliche Gruppe des dreifach ausgedehnten Raumes in einem reellen Punkte von allgemeiner Lage freie Beweglichkeit im Infinitesimalen, so ist sie sechsgliedrig und transitiv und durch eine reelle Punkttransformation dieses Raumes ähnlich entweder mit der Gruppe der Euklidischen Bewegungen dieses Raumes oder mit einer der beiden Gruppen von Nichteuklidischen Bewegungen dieses Raumes, also im zweiten Falle entweder mit der sechsgliedrigen reellen continuirlichen projectiven Gruppe, bei der die imaginäre Fläche:* $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0$ *invariant bleibt oder mit der reellen continuirlichen projectiven Gruppe der reellen nichtgeradlinigen Fläche:* $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$.

Wir sehen hieraus, dass im dreifach ausgedehnten Raume die freie Beweglichkeit im Infinitesimalen vollkommen genügt, um die Euklidischen und die Nichteuklidischen Bewegungen zu charakterisiren, ein neues Beispiel dafür, dass der dreifach ausgedehnte Raum sich wesentlich von dem zweifach ausgedehnten unterscheidet.

Jetzt können wir sofort auch alle reellen continuirlichen projectiven Gruppen des gewöhnlichen Raumes angeben, die in einem reellen Punkte von allgemeiner Lage freie Beweglichkeit im Infinitesimalen besitzen.

Jede projective Gruppe $\mathfrak{G}$ von dieser Beschaffenheit ist nämlich durch eine reelle Punkttransformation mit einer der drei Gruppen des eben bewiesenen Theorems ähnlich. Nach Theor. 19, S. 292 kann aber jede dieser drei Gruppen nur durch eine projective Transformation

wieder in eine projective Gruppe übergeführt werden, demnach ergiebt sich, dass die reelle Punkttransformation, durch die $\mathfrak{G}$ mit einer unsrer drei Gruppen ähnlich ist, projectiv ist. Beachten wir schliesslich noch, dass eine der Gruppen des Theorems 40 ohne Ausnahme in jedem reellen Punkte des Raumes freie Beweglichkeit im Infinitesimalen besitzt, während den andern beiden Gruppen diese Eigenschaft nur in einem Theile des Raumes zukommt, so können wir unser Ergebniss folgendermassen aussprechen:

Theorem 41. *Besitzt eine reelle continuirliche projective Gruppe des gewöhnlichen dreifach ausgedehnten Raumes ohne Ausnahme in allen reellen Punkten dieses Raumes freie Beweglichkeit im Infinitesimalen, so ist sie sechsgliedrig und transitiv und besteht aus allen reellen projectiven Transformationen, bei denen eine nicht ausgeartete imaginäre Fläche zweiten Grades invariant bleibt, die durch eine reelle Gleichung dargestellt wird.*

Satz 2. *Besitzt eine reelle continuirliche projective Gruppe des gewöhnlichen dreifach ausgedehnten Raumes nicht in allen reellen Punkten dieses Raumes, sondern nur in allen reellen Punkten eines gewissen Bereichs freie Beweglichkeit im Infinitesimalen, so ist sie sechsgliedrig und transitiv und zwar ist sie entweder die continuirliche reelle projective Gruppe einer nicht ausgearteten reellen nichtgeradlinigen Fläche zweiten Grades oder sie ist durch eine reelle projective Transformation mit der Gruppe der Euklidischen Bewegungen ähnlich.*

§ 99.

Bevor wir dazu übergehen die Sätze des vorigen Paragraphen auf Räume von beliebig vielen Dimensionen auszudehnen, müssen wir mit ein paar Worten gewisse Ausdrucksweisen erklären, von denen wir Gebrauch machen werden (vgl. auch S. 338, Anm.).

Durch jeden Punkt eines n-fach ausgedehnten Raumes $x_1 \ldots x_n$ gehen ∞^{n-1} Linienelemente: $dx_1 : \cdots : dx_n$, die eine $(n-1)$-fach ausgedehnte projective Mannigfaltigkeit bilden. Im gewöhnlichen dreifach ausgedehnten Raume bezeichneten wir nun jedes ebene Büschel von ∞^1 solchen Linienelementen mit dem Namen: Flächelement, im R_n wollen wir dafür lieber sagen: Element einer Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionen oder kürzer: M_2-element. Ebenso soll jedes ebene Bündel von ∞^2 Linienelementen als Element einer Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen oder kurz als M_3-element bezeichnet werden und so weiter. Endlich wollen wir uns vorbehalten, auch für die Linienelemente die Benennung: M_1-elemente anzuwenden.

Nunmehr können wir definiren, was wir im R_n unter freier Beweglichkeit im Infinitesimalen verstehen.

Definition. *Eine reelle Gruppe von Punkttransformationen des R_n besitzt in dem reellen Punkte P freie Beweglichkeit im Infinitesimalen, wenn sie folgende Forderungen erfüllt: Wird der Punkt P festgehalten, ferner ein beliebiges hindurchgehendes reelles M_1-element, ein beliebiges durch beide gehendes reelles M_2-element, ein beliebiges durch alle drei gehendes reelles M_3-element, und sofort, schliesslich ein beliebiges reelles M_q-element, das durch jedes der vorherigen Elemente geht, so soll continuirliche Bewegung möglich sein so lange aber auch nur so lange als $q < n-1$ ist.*

Es liegt nahe zu vermuthen, dass die Sätze, die wir in § 98 für den Raum von drei Dimensionen gefunden haben, sich auch auf jeden Raum von $n > 3$ Dimensionen übertragen lassen. Mit andern Worten, es liegt nahe zu vermuthen, dass die folgenden Sätze gelten:

Theorem 42. *Besitzt eine reelle continuirliche Gruppe des R_n $(n \gtreqless 3)$ in einem reellen Punkte von allgemeiner Lage freie Beweglichkeit im Infinitesimalen, so ist sie $\frac{1}{2}n(n+1)$-gliedrig und transitiv nnd durch eine reelle Punkttransformation des R_n ähnlich entweder mit der Gruppe der Euklidischen Bewegungen dieses Raumes oder mit einer der beiden Gruppen von Nichteuklidischen Bewegungen, also im zweiten Falle entweder mit der reellen continuirlichen projectiven Gruppe der Mannigfaltigkeit:*

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + 1 = 0$$

oder mit der reellen continuirlichen projectiven Gruppe der Mannigfaltigkeit:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - 1 = 0.$$

Theorem 43. *Besitzt eine reelle continuirliche* projective *Gruppe des R_n $(n \gtreqless 3)$ ohne Ausnahme in allen reellen Punkten dieses Raumes freie Beweglichkeit im Infinitesimalen, so ist sie $\frac{1}{2}n(n+1)$-gliedrig und transitiv und besteht aus allen reellen projectiven Transformationen, bei denen eine nicht ausgeartete imaginäre Mannigfaltigkeit zweiten Grades invariant bleibt, die durch eine reelle Gleichung dargestellt wird.*

Satz 3. *Besitzt eine reelle continuirliche projective Gruppe des R_n $(n \gtreqless 3)$ nicht in allen reellen Punkten dieses Raumes, sondern nur in allen reellen Punkten eines gewissen Bereichs freie Beweglichkeit im Infinitesimalen, so ist sie $\frac{1}{2}n(n+1)$-gliedrig und transitiv und zwar ist sie entweder die continuirliche reelle projective Gruppe einer nicht aus-*

gearteten reellen nichtgeradlinigen Mannigfaltigkeit zweiten Grades oder sie ist durch eine reelle projective Transformation des R_n mit der Gruppe der Euklidischen Bewegungen dieses Raumes ähnlich.

Wir werden jetzt zeigen, dass es sich wirklich so verhält. Zu dem Ende brauchen wir offenbar nur zu zeigen, dass aus der Gültigkeit unsrer Sätze in einem Raume von $n \geqq 3$ Dimensionen stets ihre Richtigkeit im Raume von $n + 1$ Dimensionen folgt; denn da unsre Sätze für $n = 3$ bereits als richtig erkannt sind, so ist damit ihre Richtigkeit für jedes $n \geqq 3$ dargethan.

Wir setzen also voraus, dass die Theoreme 42 und 43 und der Satz 3 für den Raum von $n \geqq 3$ Dimensionen bereits bewiesen sind. Unter dieser Voraussetzung suchen wir zunächst alle reellen continuirlichen Gruppen des R_{n+1}, die in irgend einem reellen Punkte von allgemeiner Lage freie Beweglichkeit im Infinitesimalen besitzen.

Es sei G eine reelle continuirliche Gruppe des R_{n+1}, die in dem reellen Punkte P von allgemeiner Lage freie Beweglichkeit im Infinitesimalen besitzt. Wird dann der Punkt P festgehalten, ferner ein beliebiges reelles M_1-element durch ihn, ein beliebiges durch beide gehendes reelles M_2-element, u. s. f., endlich ein beliebiges reelles M_{n-1}-element, das durch alle vorigen Elemente geht, so muss sich jedes reelle M_n-element, das durch das festgehaltene M_{n-1}-element geht, noch continuirlich um dieses drehen können; denn könnte es das nicht, so wäre schon nach Festhaltung der $n-1$ genannten Elemente keine continuirliche Bewegung mehr möglich.

Hieraus folgt, dass G transitiv ist. Wäre es nämlich intransitiv, so zerfiele der R_{n+1} auf eine oder sogar auf unendlich viele Weisen in ∞^1 invariante reelle n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten, es ginge daher durch den Punkt P, der von allgemeiner Lage ist, mindestens ein reelles M_n-element, das zugleich mit P invariant bliebe und sich in Folge dessen um keines der in ihm liegenden reellen M_{n-1}-elemente continuirlich drehen könnte.

Ferner erinnern wir daran, dass die ∞^n reellen M_1-elemente durch P eine ebene n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit bilden, die bei festgehaltenem P durch eine reelle projective Gruppe $\mathfrak{g}$ transformirt wird. Die M_1-elemente dieser Mannigfaltigkeit denken wir uns auf die reellen Punkte eines ebenen n-fach ausgedehnten Raumes R_n' projectiv bezogen; dabei verwandelt sich jedes M_1-element durch P in einen Punkt des R_n', jedem reellen M_2-element durch P entspricht eindeutig umkehrbar ein reelles M_1'-element des R_n', überhaupt entspricht jedem reellen M_q-element durch P eindeutig umkehrbar ein reelles M_{q-1}'-

element des R_n', der Gruppe $\mathfrak{g}$ endlich entspricht eine holoedrisch isomorphe reelle projective Gruppe $\mathfrak{g}'$ des R_n'. Halten wir nun in dem R_n' einen Punkt fest, ferner ein beliebiges hindurchgehendes reelles M_1'-element, ein beliebiges durch beide gehendes reelles M_2'-element u. s. f., schliesslich ein beliebiges reelles M_{n-2}'-element, das durch alle vorherigen Elemente geht, so muss sich jedes reelle M_{n-1}'-element, das durch den Punkt und durch alle diese Elemente geht, noch continuirlich um das M_{n-2}'-element drehen können; sonst wäre ja bei unsrer Gruppe G die Forderung der freien Beweglichkeit im Infinitesimalen in dem Punkte P nicht erfüllt. Demnach besitzt die reelle projective Gruppe $\mathfrak{g}'$ des R_n' ohne Ausnahme in jedem reellen Punkte des R_n' freie Beweglichkeit im Infinitesimalen.

Nach unsrer Voraussetzung gilt aber in dem n-fach ausgedehnten Raume R_n' das Theorem 43, die Gruppe $\mathfrak{g}'$ ist daher $\frac{1}{2}n(n+1)$-gliedrig und kann durch eine reelle projective Transformation des R_n' auf eine solche Form gebracht werden, dass sie die imaginäre Mannigfaltigkeit zweiten Grades:

$$x_1'^2 + x_2'^2 + \cdots + x_n'^2 + 1 = 0$$

invariant lässt. Demnach ist auch die Gruppe $\mathfrak{g}$ $\frac{1}{2}n(n+1)$-gliedrig und kann durch eine reelle lineare homogene Transformation der Differentiale: $dx_1 \ldots dx_{n+1}$ auf eine solche Form gebracht werden, dass sie die imaginäre Mannigfaltigkeit von M_1-elementen invariant lässt, die durch die Gleichung:

$$dx_1^2 + \cdots + dx_n^2 + dx_{n+1}^2 = 0 \tag{4}$$

dargestellt wird.

Kehren wir jetzt zur Gruppe G zurück, so erkennen wir, dass bei dieser Gruppe nach Festhaltung von P die ∞^n reellen M_1-elemente $\frac{1}{2}n(n+1)$-gliedrig transformirt werden und zwar derart, dass eine gewisse imaginäre Mannigfaltigkeit zweiten Grades von M_1-elementen invariant bleibt. Denken wir uns insbesondere den Punkt P durch eine reelle Punkttransformation in den Coordinatenanfang verlegt, so können wir stets durch eine reelle lineare homogene Transformation in den Veränderlichen $x_1 \ldots x_{n+1}$ erreichen, dass diese imaginäre Mannigfaltigkeit durch die Gleichung (4) dargestellt wird.

Endlich ist noch zu bemerken, dass G $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$-gliedrig ist. Halten wir nämlich den Punkt P fest, so werden die Parameter von G $n+1$ Bedingungen unterworfen, halten wir ferner alle ∞^n reellen M_1-elemente durch P fest, so werden die Parameter von G $\frac{1}{2}n(n+1)$ weiteren Bedingungen unterworfen, denn diese ∞^n M_1-elemente werden ja nach Festhaltung von P gerade $\frac{1}{2}n(n+1)$-gliedrig transformirt.

Da nun, sobald P und alle hindurchgehenden reellen M_1-elemente festgehalten werden, zugleich alle reellen M_2-, M_3-, ... M_n-elemente durch P in Ruhe bleiben und in Folge dessen gar keine continuirliche Bewegung mehr möglich ist, so muss die Parameterzahl von G gerade gleich:

$$n + 1 + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} = \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2}$$

sein.

Nunmehr ist es leicht, G zu bestimmen.

Denken wir uns nämlich die Veränderlichen $x_1 \ldots x_{n+1}$ so gewählt wie oben, also insbesondere so, dass P der Coordinatenanfang wird, so enthält G in der Umgebung des Coordinatenanfangs augenscheinlich $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ unabhängige infinitesimale Transformationen von der Form:

$$p_1 + \cdots, \quad \cdots, \quad p_{n+1} + \cdots, \quad x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + \alpha_{\mu\nu} \sum_1^{n+1} {}_\tau x_\tau p_\tau + \cdots,$$

$$(\mu, \nu = 1 \ldots n+1; \ \mu < \nu),$$

wo die $\alpha_{\mu\nu}$ reelle Constanten sind. Da G gerade $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$-gliedrig ist, ergiebt sich überdies durch Combination sofort, dass alle $\alpha_{\mu\nu}$ verschwinden. Demnach gehört G zu den reellen Gruppen, die wir auf S. 385 ff. bestimmt haben, und zwar ergiebt sich, dass G durch eine reelle Punkttransformation des R_{n+1} entweder in die Gruppe der Euklidischen Bewegungen dieses Raumes übergeführt werden kann oder in die reelle continuirliche projective Gruppe einer der beiden Mannigfaltigkeiten zweiten Grades:

$$x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 \pm 1 = 0.$$

Hiermit ist bewiesen, dass, sobald das Theorem 43 in einem Raume von $n \geqq 3$ Dimensionen gilt, stets das Theorem 42 in dem Raume von $n+1$ Dimensionen gültig ist.

Wenn aber das Theorem 42 im Raume von $n+1$ Dimensionen gilt, so gilt in diesem Raume zugleich das Theorem 43 und der Satz 3.

In der That, jede reelle continuirliche projective Gruppe $\mathfrak{G}$ des R_{n+1}, die in einem reellen Punkte von allgemeiner Lage freie Beweglichkeit im Infinitesimalen besitzt, ist unter der eben gemachten Voraussetzung durch eine reelle Punkttransformation ähnlich entweder mit der Gruppe der Euklidischen Bewegungen des R_{n+1}, oder mit einer der beiden Gruppen von Nichteuklidischen Bewegungen dieses Raumes. Nach Theorem 19, S. 292 ist aber diese reelle Punkttransformation nothwendig projectiv, demnach kommen wir unter der

gemachten Voraussetzung ohne Weiteres auf das Theorem 43 und den Satz 3.

Hiermit ist bewiesen, dass, sobald die Theoreme 42 und 43 und der Satz 3 in einem Raume von $n \geqq 3$ Dimensionen gelten, sie auch in dem Raume von $n + 1$ Dimensionen richtig sind. Da wir sie nun im gewöhnlichen dreifach ausgedehnten Raume schon bewiesen haben, so sind sie allgemein gültig.

Ist also $n \geqq 3$, so sind die Gruppe der Euklidischen und die beiden Gruppen von Nichteuklidischen Bewegungen des R_n vollständig durch die Forderung charakterisirt, dass sie in einem reellen Punkte von allgemeiner Lage freie Beweglichkeit im Infinitesimalen haben sollen.

Wir erwähnen noch, dass die vorstehenden Entwicklungen nicht blos für solche reelle Gruppen gelten, deren endliche Transformationen durch analytische Gleichungen dargestellt werden, sondern auch für solche, deren endliche Gleichungen nichtanalytisch sind, vorausgesetzt nur, dass diese Gleichungen eine gewisse Anzahl Differentiationen nach den Veränderlichen und den Parametern zulassen (s. S. 365 u. 366).

§ 100.

Ueber Riemanns Habilitationsrede.

Die eben durchgeführten Untersuchungen über die freie Beweglichkeit im Infinitesimalen stehen in Zusammenhang mit gewissen Ueberlegungen, die Riemann in seiner Habilitationsrede angedeutet hat. Wir wollen daher überhaupt auf den Inhalt dieser Rede etwas näher eingehen, umsomehr da sie mit allen neueren Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie viele Berührungspunkte hat.

Riemann ist niemals leicht lesbar, aber seine berühmte Rede „Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen" bietet dem Verständnisse Schwierigkeiten von ganz besonderer Art. Riemann musste seine Rede vor einer Versammlung halten, die nur zum Theil aus Mathematikern bestand, er war deshalb bestrebt, möglichst allgemein verständlich zu sein; darunter hat aber die Schärfe und Bestimmtheit des Ausdrucks an sehr vielen Stellen gelitten und die Folge ist, dass nun gerade der Mathematiker öfter in Zweifel ist, was Riemann eigentlich hat sagen wollen.

Besonders fühlbar macht sich dieser Mangel in der Darstellung da, wo Riemann über die Beweglichkeit der Figuren eines n-fach ausgedehnten Raumes spricht; Riemann hilft sich da mit Ausdrücken,

die zwar dem Nichtmathematiker anschaulich vorkommen mögen, deren wahren Sinn aber der Mathematiker nur errathen kann.

Leider hat bis jetzt noch Niemand den Inhalt der Riemannschen Rede nach allen Seiten hin so genau untersucht, wie wir es in Kapitel 21 mit dem Inhalte der Helmholtzschen Abhandlung „Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen" gethan haben. Man hat zwar die Theorie des Riemannschen Krümmungsmasses eines R_n nach Riemanns Andeutungen wiederhergestellt und hat sich überzeugt, dass das Bogenelement wirklich, sobald das Riemannsche Krümmungsmass überall constant ist, auf die von Riemann angegebene Form gebracht werden kann. Aber gerade die Betrachtungen Riemanns über die Beweglichkeit der Figuren scheinen wenig oder gar nicht beachtet worden zu sein, obwohl doch gerade diese Betrachtungen für Riemanns Auffassung der Frage nach den Grundlagen der Geometrie von ganz besonderer Wichtigkeit sind. Andrerseits giebt es auch sonst noch eine Reihe von Stellen in Riemanns Rede, deren Aufklärung dringend zu wünschen ist.

Es wäre sehr verdienstvoll, wenn sich jemand der Mühe unterzöge, Riemanns Gedankengang Schritt für Schritt zu verfolgen und die verschiedenen Fragen, die sich da aufdrängen, soweit als möglich zu beantworten. Wir beabsichtigen jedoch nicht, dies auszuführen, sondern begnügen uns mit einigen Andeutungen, die hoffentlich dazu beitragen, eine derartige Durcharbeitung der Riemannschen Gedanken anzuregen.

Wie schon früher erwähnt, denkt sich Riemann zunächst die Punkte des n-fach ausgedehnten Raumes durch n Coordinaten $x_1 \ldots x_n$ bestimmt. Wir sagten damals (s. S. 394), dass Riemann dies zu beweisen versuche. Vielleicht haben wir aber damit Riemann Unrecht gethan. Man kann es auch so auffassen, dass Riemann die Bestimmbarkeit der Punkte durch Coordinaten als *selbstverständlich* ansieht. Herr v. Helmholtz scheint anzunehmen, dass Riemann die betreffende Voraussetzung als Axiom aufstellt*).

Um innerhalb des n-fach ausgedehnten Raumes Massbestimmungen ausführen zu können, stellt Riemann als nächstliegende Annahme die auf, dass jede Linie, also jede einfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit durch jede andre messbar sei**). Zur wirklichen Ausführung der Messung ist es dann nöthig einen Ausdruck für das Bogenelement

*) s. Gött. Nachr. 1868. S. 198.

**) s. Riemanns ges. Werke, 1. Ausg. S. 259 ff.

zu besitzen, also einen Ausdruck für die Länge des unendlich kleinen Linienstücks zwischen zwei unendlich benachbarten Punkten x_ν und $x_\nu + dx_\nu$. Er setzt voraus, dass dieses Bogenelement eine homogene Function ersten Grades von $dx_1 \ldots dx_n$ ist, die ungeändert bleibt, sobald alle dx_ν das Zeichen wechseln, und die ausserdem noch von $x_1 \ldots x_n$ abhängt.

Es handelt sich jetzt darum, die Form des Bogenelements näher zu bestimmen. Zu diesem Zwecke nimmt Riemann ohne ein Wort der Begründung an, dass auch zwei beliebige nicht unendlich benachbarte Punkte des R_n einen ganz bestimmten Abstand von einander haben, er setzt nämlich ohne Weiteres die Existenz einer Function:

$$\Omega(x_1 \ldots x_n;\quad x_1^0 \ldots x_n^0)$$

voraus, die für alle Punkte $x_1 \ldots x_n$, die von dem Punkte $x_1^0 \ldots x_n^0$ „gleich weit abstehen", denselben Werth hat. Es ist nicht zu ersehen, ob Riemann damit eine neue Voraussetzung hat machen wollen, oder ob er meint, dass aus der Existenz eines Bogenelementes von der angegebenen Beschaffenheit die Existenz einer solchen Function Ω folge. Das letztere ist jedenfalls nicht unmittelbar klar, denn es ist sicher, dass aus der Existenz eines Bogenelements die Existenz einer solchen Function Ω nur dann folgt, wenn durch das Bogenelement zugleich zwischen je zwei Punkten eine kürzeste Linie bestimmt ist; es müsste daher erst bewiesen werden, dass die Existenz solcher kürzesten Linien aus den vorher über das Bogenelement gemachten Voraussetzungen folgt.

Man kann sich direct überzeugen, dass die Existenz eines Bogenelements:

$$\omega(x_1 \ldots x_n;\ dx_1 \ldots dx_n),$$

das eine *beliebige* homogene Function ersten Grades von $dx_1 \ldots dx_n$ ist, nicht immer die Existenz einer Abstandsfunction:

$$\Omega(x_1 \ldots x_n;\quad y_1 \ldots y_n)$$

zweier endlich von einander entfernter Punkte nach sich zieht.

Es sei nämlich Γ die grösste continuirliche Gruppe von reellen Punkttransformationen des R_n, bei der das Bogenelement $\omega(x, dx)$ invariant bleibt. Dann können wir die Existenz dieses Bogenelements offenbar auch so ausdrücken, dass wir sagen: die beiden unendlich benachbarten Punkte x_ν und $x_\nu + dx_\nu$ haben Γ gegenüber die Invariante: $\omega(x, dx)$. Zugleich würde die Existenz einer Abstandsfunction $\Omega(x, y)$ darauf hinauskommen, dass die beiden endlich von einander entfernten Punkte x_ν und y_ν der Gruppe Γ gegenüber die Invariante $\Omega(x, y)$ hätten.

Nun aber können bei einer Gruppe die beiden unendlich benachbarten Punkte x_ν und $x_\nu + dx_\nu$ sehr gut eine Invariante von der Form $\omega(x, dx)$

haben, ohne dass die beiden Punkte x_ν und y_ν eine Invariante haben. Das zeigt schon die auf S. 457 erwähnte Gruppe:

$$q, \quad xq + r, \quad x^2q + 2xr, \quad x^3q + 3x^2r, \quad p, \quad xp - zr$$

des R_3. Bei dieser haben nämlich die beiden unendlich benachbarten Punkte x, y, z und $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ die Invariante: $dy - z\,dx$, während zwei endlich von einander entfernte Punkte keine Invariante haben.

Es ist freilich noch denkbar, dass sich die Sache anders verhält, wenn man mit Riemann die Voraussetzung hinzufügt, dass das Bogenelement $\omega(x, dx)$ seinen Werth nicht ändert, sobald alle dx_ν das Zeichen wechseln. In diesem Falle lässt sich aus dem eben angeführten Beispiele nichts schliessen, da die Invariante: $dz - y\,dx$ die Riemannsche Forderung nicht erfüllt. Wir wollen jedoch die hiermit angeregte Frage auf sich beruhen lassen.

Wir fahren in dem Berichte über Riemanns Gedankengang fort. Riemann setzt also voraus, dass es eine Function

$$\Omega(x_1 \ldots x_n;\ x_1^0 \ldots x_n^0)$$

giebt, die für alle von $x_1^0 \ldots x_n^0$ gleich weit entfernten Punkte denselben Werth hat. Wie es scheint, tritt hier zum ersten Male der allgemeine Begriff einer Abstandsfunction im n-fach ausgedehnten Raume auf.

Von der Function Ω nimmt Riemann an, dass sie als Function von $x_1 \ldots x_n$ in der Umgebung des Werthsystems: $x_1^0 \ldots x_n^0$ nach allen Seiten wächst und also für: $x_\nu = x_\nu^0$ ein Minimum hat, er nimmt weiter an, dass ihre ersten und zweiten Differentialquotienten für $x_\nu = x'^0$ alle endlich sind. Unter diesen Voraussetzungen muss das erste Differential von Ω für $x_\nu = x_\nu^0$ verschwinden und das zweite:

$$d^2\Omega = \sum_{\mu\nu}^{1\ldots n} \frac{\partial^2\Omega}{\partial x_\mu \partial x_\nu} dx_\mu dx_\nu$$

darf nach der Substitution: $x_\nu = x_\nu^0$ für kein Werthsystem: $dx_1 \ldots dx_n$ negativ werden.

Riemann beschränkt sich auf die Betrachtung des Falles, wo das Differential $d^2\Omega$ für $x_\nu = x_\nu^0$ in eine beständig positive quadratische Form von $dx_1 \ldots dx_n$ übergeht. Das Quadrat des zu dem Punkte $x_1^0 \ldots x_n^0$ gehörigen Bogenelements ds kann sich dann von dem Ausdruck

$$\sum_{\mu\nu}^{1\ldots n} \left[\frac{\partial^2\Omega}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\right]_{x=x^0} dx_\mu dx_\nu$$

nur um einen constanten, von $x_1^0 \ldots x_n^0$ abhängigen Factor unterscheiden und das Bogenelement in einem beliebigen Punkte $x_1 \ldots x_n$ ist demnach durch eine Gleichung von der Form:

$$(5) \qquad ds^2 = \sum_{\mu\nu}^{1\ldots n} \alpha_{\mu\nu}(x_1 \ldots x_n)\, dx_\mu\, dx_\nu$$

bestimmt, wo die $\alpha_{\mu\nu}$ reelle Functionen sind, deren Determinante nicht identisch verschwindet, und wo die rechte Seite für allgemeine Werthe von $x_1 \ldots x_n$ eine beständig positive Function von $dx_1 \ldots dx_n$ ist.

Wir haben diese Ableitung des Ausdrucks für das Bogenelement so ausführlich wiedergegeben, weil sie namentlich durch die Einführung der Abstandsfunction von besonderem Interesse ist.

Der für das Bogenelement gefundene Ausdruck erlaubt die Variationsrechnung anzuwenden, und es ergiebt sich, dass zwischen je zwei Punkten, die innerhalb eines gewissen Bereichs liegen, eine und nur eine kürzeste Linie möglich ist, die ganz diesem Bereiche angehört. Ueberdies ist klar, dass durch jeden Punkt $x_1 \ldots x_n$ nur eine kürzeste Linie geht, die ein gegebenes Linienelement: $dx_1 : \cdots : dx_n$ durch den Punkt enthält.

Riemann betrachtet nun in einem beliebigen Punkte $x_1 \ldots x_n$ ein beliebiges hindurchgehendes M_2-element und denkt sich durch jedes der ∞^1 Linienelemente dieses M_2-elements die hindurchgehende kürzeste Linie gelegt. Die so entstehende zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit ist durch das ausgewählte M_2-element eindeutig bestimmt und ihr Gausssches Krümmungsmaass hat in dem Punkte $x_1 \ldots x_n$ einen ganz bestimmten Werth. Den Werth dieses Gaussschen Krümmungsmasses, der nur von der Form (5) des angenommenen Bogenelements abhängt, bezeichnet Riemann als das Mass der Krümmung, die der n-fach ausgedehnte Raum mit dem Bogenelemente (5) in dem Punkte $x_1 \ldots x_n$ in der Richtung des ausgewählten M_2-elements hat. Er behauptet überdies, dass umgekehrt das Bogenelement (5) eines n-fach ausgedehnten Raumes im Allgemeinen vollständig bestimmt ist, sobald das Krümmungsmass in jedem Punkte in den Richtungen von $\frac{1}{2}n(n-1)$ M_2-elementen von allgemeiner gegenseitiger Lage gegeben ist.

Unter den n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten, die ein Bogenelement von der obigen Form (5) haben, betrachtet Riemann insbesondere alle die, bei denen das Krümmungsmass allenthalben constant ist, bei denen es also in allen Punkten in allen hindurchgehenden M_2-elementen denselben Werth hat. Er sagt über sie Folgendes:

„Der gemeinsame Charakter dieser Mannigfaltigkeiten, deren

Krümmungsmass constant ist, kann auch so ausgedrückt werden, dass sich die Figuren in ihnen ohne Dehnung*) bewegen lassen. Denn offenbar würden die Figuren in ihnen nicht beliebig verschiebbar und drehbar sein können, wenn nicht in jedem Punkte in allen Richtungen das Krümmungsmass dasselbe wäre. Andererseits aber sind durch das Krümmungsmass die Massverhältnisse der Mannigfaltigkeit vollständig bestimmt; es sind daher um einen Punkt nach allen Richtungen die Massverhältnisse genau dieselben, wie um einen andern, und also von ihm aus dieselben Constructionen ausführbar, und folglich kann in den Mannigfaltigkeiten mit constantem Krümmungsmass den Figuren jede beliebige Lage gegeben werden."

In diesen Worten ist ausgesprochen, dass die Forderung, das Krümmungsmass solle überall constant sein, gleichbedeutend ist mit gewissen Forderungen über die Beweglichkeit der Figuren. Stellen wir diese letzteren Forderungen an die Spitze, so können wir Riemanns Gedankengang etwas präciser, wenn auch nicht völlig präcis, folgendermassen wiedergeben:

Riemann sucht unter den Mannigfaltigkeiten, deren Bogenelement die Form (5) *hat, alle die auf, in denen die Figuren jede beliebige Lage erhalten können, das heisst, in denen sich die Figuren beliebig verschieben und drehen lassen, ohne Dehnung zu erleiden. Er gelangt zu dem Ergebnisse, dass die Mannigfaltigkeiten, deren Krümmungsmass allenthalben constant ist, die einzigen sind, in denen die Figuren in dieser Weise beweglich sind.*

Was ist nun aber darunter zu verstehen, dass die Figuren jede beliebige Lage erhalten können oder dass sie ohne Dehnung beliebig verschiebbar und drehbar sein sollen?

Zunächst wollen wir feststellen, was es heisst, dass die Figuren überhaupt ohne Dehnung beweglich sein sollen.

Wenn Riemann von einer Bewegung der Figuren spricht, so denkt er sich diese Bewegung unzweifelhaft als continuirlich, das zeigen namentlich die Worte „verschiebbar" und „drehbar", die er braucht. Nun bringt aber jede continuirliche Bewegung continuirliche Aenderungen der Coordinaten der bewegten Punkte mit sich und liefert daher eine continuirliche Schaar von ∞^1 reellen Transformationen:

$$(6) \qquad x_\nu' = f_\nu(x_1 \ldots x_n;\ t) \quad (\nu = 1 \ldots n)$$

*) Hier hätte Riemann eigentlich schon das Wort „beliebig" hinzufügen müssen

der Mannigfaltigkeit $x_1 \ldots x_n$ und zwar eine Schaar, in der die identische Transformation steckt (vgl. S. 440). Sollen bei dieser Bewegung die Figuren keine Dehnung erleiden, so muss die Länge jeder Linie ungeändert bleiben, mit andern Worten: die ∞^1 Transformationen (6) müssen das Bogenelement (5) invariant lassen. Umgekehrt leuchtet ein, dass jede Schaar (6) von ∞^1 Transformationen, die das Bogenelement (5) invariant lässt und der die identische Transformation angehört, eine continuirliche Bewegung darstellt, bei der die Figuren keine Dehnung erleiden. Demnach kommt die Forderung, dass überhaupt Bewegung der Figuren ohne Dehnung möglich sei, darauf hinaus, dass es mindestens eine continuirliche Schaar (6) von ∞^1 Transformationen geben soll, die das Bogenelement (5) invariant lässt und die identische Transformation enthält.

Nun bildet der Inbegriff aller reellen Transformationen, bei denen das Bogenelement (5) invariant bleibt, sicher eine Gruppe $\mathfrak{G}$ und diese Gruppe $\mathfrak{G}$ enthält stets eine gewisse continuirliche Untergruppe G, die in keiner grösseren continuirlichen Untergruppe von $\mathfrak{G}$ steckt. Ist dann (6) irgend eine Schaar von ∞^1 reellen Transformationen, die die identische Transformation enthält und die der Gruppe G angehört, so bestimmt diese Schaar augenscheinlich eine continuirliche Bewegung, bei der keine Dehnung der Figuren stattfindet. Ist umgekehrt (6) eine continuirliche Bewegung, bei der keine Dehnung stattfindet, so gehört die Schaar (6) offenbar der Gruppe G an. Hieraus folgt, dass G durch den Inbegriff aller Bewegungen, bei denen die Figuren keine Dehnung erleiden, vollständig bestimmt ist; zugleich ist klar, dass die Transformationen von G den Inbegriff aller der Lagen bestimmen, die man den Figuren durch continuirliche Bewegungen ohne Dehnung geben kann.

Was heisst es nun aber, wenn Riemann verlangt, dass die Figuren ohne Dehnung *beliebig verschiebbar und drehbar* seien?

Offenbar ist das Wort „beliebig“ viel zu unbestimmt, als dass man daraus irgend welche Schlüsse ziehen könnte. Man ist also auf Vermuthungen angewiesen.

Wir glauben, dass Riemann sich die *beliebige Verschiebbarkeit* der Figuren so gedacht hat, dass bei den Bewegungen, die eine Figur ausführen kann, ohne Dehnung zu erleiden, ein beliebig ausgewählter Punkt der Figur in jeden andern Punkt des Raumes übergehen kann. Bei dieser Deutung kommt die Forderung der beliebigen Verschiebbarkeit offenbar darauf hinaus, dass die oben definirte Gruppe G *transitiv* sein soll.

Andrerseits kann Riemann unter Drehungen jedenfalls nur solche

Bewegungen verstehen, die nach Festhaltung eines beliebigen Punktes noch möglich sind. Die Forderung der *beliebigen Drehbarkeit* der Figuren verstehen wir nun so, dass die allgemeinste nach Festhaltung des Coordinatenanfangs noch mögliche Bewegung ohne Dehnung von so vielen Parametern abhängen soll, als es *mit der Invarianz des Ausdrucks:*

$$\sum_{\mu\nu}^{1\ldots n} \alpha_{\mu\nu}(0\ldots 0)\, dx_\mu dx_\nu$$

verträglich ist, dass also die transitive Gruppe G möglichst viele Parameter enthalten soll.

Um uns über die Tragweite dieser Forderung Rechenschaft zu geben, müssen wir untersuchen, was für Bewegungen ohne Dehnung nach Festhaltung eines reellen Punktes von allgemeiner Lage noch möglich sind.

Der Einfachheit wegen nehmen wir an, dass der Coordinatenanfang ein Punkt von allgemeiner Lage sei, und denken uns überdies das Bogenelement durch eine reelle lineare homogene Transformation der x auf eine solche Form gebracht, dass es für:

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

den Werth:

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2 \tag{7}$$

annimmt. Jede nach Festhaltung des Coordinatenanfangs etwa noch mögliche Bewegung ohne Dehnung wird dann durch eine Transformation von der Form:

$$x_k' = \sum_1^n{}_\nu \alpha_{k\nu} x_\nu + \cdots \quad (k = 1\ldots n) \tag{8}$$

dargestellt, bei der das Bogenelement (5) invariant bleibt; hierbei darf die Determinante der $\alpha_{k\nu}$ nicht verschwinden und die weggelassenen Glieder sind von zweiter und höherer Ordnung in den x.

Unter den gemachten Voraussetzungen ist klar, dass die zu (8) gehörige verkürzte Transformation:

$$x_k' = \sum_1^n{}_\nu \alpha_{k\nu} x_\nu \quad (k = 1\ldots n) \tag{9}$$

den Differentialausdruck (7) invariant lassen muss. Ferner ist leicht zu sehen, dass die Transformation (8) vollständig bestimmt ist, sobald man die zugehörige verkürzte Transformation (9) kennt. Die verkürzte Transformation (9) giebt nämlich an, wie die ∞^{n-1} Linienelemente durch den Coordinatenanfang transformirt werden. Nun

geht durch jedes Linienelement $dx_1 : \cdots : dx_n$ des Coordinatenanfangs nur eine kürzeste Linie und jeder Punkt $x_1 \ldots x_n$ dieser kürzesten Linie ist vollständig bestimmt, wenn man ausser dem bewussten Linienelement noch seinen Abstand r vom Coordinatenanfang kennt. Weiss man daher, dass bei der Transformation (8), die das Bogenelement (5) invariant lässt, das Linienelement: $dx_1 : \cdots : dx_n$ in das Linienelement: $dx_1' : \cdots : dx_n'$ übergeht, so ist zugleich auch die neue Lage $x_1' \ldots x_n'$ bestimmt, die der Punkt $x_1 \ldots x_n$ bei der Transformation (8) erhält, $x_1' \ldots x_n'$ ist nämlich offenbar der Punkt, der auf der kürzesten Linie durch das Linienelement: $dx_1' : \cdots : dx_n'$ in der Entfernung r vom Coordinatenanfange liegt.

Wir sehen hieraus, dass jede Bewegung ohne Dehnung, die nach Festhaltung des Coordinatenanfangs noch möglich ist, vollkommen bestimmt ist durch die Art und Weise, in der sie die ∞^{n-1} Linienelemente durch den Coordinatenanfang bewegt. Verlangen wir daher, dass die allgemeinste nach Festhaltung des Coordinatenanfangs noch mögliche Bewegung ohne Dehnung von möglichst vielen Parametern abhänge, so kommt das darauf hinaus, zu verlangen, dass bei der Gruppe G nach Festhaltung des Coordinatenanfangs die Linienelemente durch diesen Punkt durch eine projective Gruppe von möglichst grosser Gliederzahl transformirt werden.

Fassen wir die gewonnenen Ergebnisse zusammen, so können wir sagen: *Wenn Riemann verlangt, dass ein beständig positives Bogenelement von der Form* (5) *existire und dass die Figuren des Raumes* $x_1 \ldots x_n$ *ohne Dehnung beliebig verschiebbar und drehbar seien, so verlangt er damit genau dasselbe, als wenn man fordert, dass das Bogenelement* (5) *bei einer continuirlichen Gruppe* G *invariant bleibe, die erstens transitiv ist und die zweitens die* ∞^{n-1} *reellen Linienelemente durch jeden festgehaltenen reellen Punkt von allgemeiner Lage in möglichst allgemeiner Weise transformirt* (vgl. S. 355 f.).

Verbinden wir nun die Entwicklungen auf S. 353 f. mit denen auf S. 385 ff., so erkennen wir sofort, dass jede reelle Gruppe G von der hier verlangten Beschaffenheit durch eine reelle Punkttransformation überführbar ist entweder in die Gruppe der Euklidischen Bewegungen des R_n oder in eine der beiden Gruppen von Nichteuklidischen Bewegungen. Die Forderungen, die Riemann an die Beweglichkeit der Figuren stellt, reichen demnach zusammen mit der Forderung eines Bogenelements hin, um diese drei Gruppen von Bewegungen zu charakterisiren.

Wir schalten zunächst noch ein paar Bemerkungen ein über die Lösung, die Riemann selbst von seinem Probleme giebt.

Riemann sagt: „Offenbar würden die Figuren nicht beliebig verschiebbar und drehbar sein können, wenn nicht in jedem Punkte in allen Richtungen das Krümmungsmass dasselbe wäre.“ Aus der Constanz des Krümmungsmasses schliesst er nun, dass die Massverhältnisse um jeden Punkt nach allen Richtungen genau dieselben sind wie um jeden andern und daraus wieder ergiebt sich, dass die Figuren ohne Dehnung beliebig verschiebbar und drehbar sind in der oben beschriebenen Weise.

Nun ist die Forderung, dass das Krümmungsmass in allen Punkten in allen Richtungen der hindurchgehenden M_2-elemente constant sei, offenbar nothwendig, wenn die Gruppe G transitiv sein und wenn sie ausserdem so beschaffen sein soll, dass nach Festhaltung eines reellen Punktes von allgemeiner Lage noch jedes reelle M_2-element durch den Punkt in jedes andre übergehen kann. Ist umgekehrt die Gruppe G so beschaffen, dass nach Festhaltung eines reellen Punktes von allgemeiner Lage noch jedes reelle M_2-element in jedes andre übergehen kann, so folgt leicht, dass die Gruppe transitiv ist und dass das Krümmungsmass in allen Punkten in allen hindurchgehenden M_2-elementen denselben Werth hat. Hieraus aber folgt nach Riemann, dass die Figuren beliebig ohne Dehnung verschiebbar und drehbar sind und das wieder kommt darauf hinaus, dass bei G nach Festhaltung eines reellen Punktes von allgemeiner Lage die Linienelemente durch den Punkt in möglichst allgemeiner Weise transformirt werden.

Aus den Riemannschen Entwicklungen folgt demnach der Satz:

Ist G die grösste reelle continuirliche Gruppe, die einen beständig positiven Differentialausdruck von der Form (5) *invariant lässt, und ist diese Gruppe so beschaffen, dass bei Festhaltung eines reellen Punktes von allgemeiner Lage jedes reelle M_2-element durch den Punkt in jedes andre übergehen kann, so transformirt sie die ∞^{n-1} Linienelemente durch diesen Punkt in möglichst allgemeiner Weise.*

Riemann setzt voraus, dass das Quadrat des Bogenelements ein beständig positiver Differentialausdruck zweiten Grades ist und fügt die Forderung hinzu, dass die Figuren, ohne Dehnung zu erleiden, beliebig verschiebbar und drehbar seien. Diese letztere Forderung ist, wenn man sie so deutet, wie wir gethan haben, gleichbedeutend mit der, dass der bewusste Differentialausdruck eine continuirliche reelle Gruppe G gestatte, die transitiv ist und die reellen Linienelemente durch jeden festgehaltenen reellen Punkt von allgemeiner Lage in möglichst allgemeiner Weise transformirt.

Es ist klar, dass die reelle Gruppe G unter diesen Voraussetzungen

in jedem reellen Punkte von allgemeiner Lage freie Beweglichkeit im Infinitesimalen besitzt. Andrerseits haben wir in § 97—99 bewiesen, dass jede reelle Gruppe $\mathfrak{G}$ des R_n $(n > 2)$, die in einem reellen Punkte von allgemeiner Lage freie Beweglichkeit im Infinitesimalen besitzt, durch eine reelle Punkttransformation entweder in die Gruppe der Euklidischen oder in eine der beiden Gruppen von Nichteuklidischen Bewegungen überführbar ist. Demnach genügen die beiden Riemannschen Forderungen: Existenz eines quadratischen beständig positiven Bogenelements und beliebige Verschiebbarkeit und Drehbarkeit der Figuren zur Charakterisirung der Euklidischen und der Nichteuklidischen Bewegungen, vorausgesetzt dass man die beliebige Verschiebbarkeit und Drehbarkeit so deutet, wie es oben geschehen ist. Wir sehen aber zugleich, *dass die Forderung der freien Beweglichkeit im Infinitesimalen zusammen mit der Forderung, dass die Bewegungen eine Gruppe bilden sollen, diese beiden anscheinend weitergehenden Riemannschen Forderungen vollständig ersetzt.*

Wir werden jetzt noch zeigen, dass man aus der Forderung der freien Beweglichkeit im Infinitesimalen direct die Existenz eines beständig positiven quadratischen Bogenelements schliessen kann, ohne sich auf die Entwicklungen der §§ 97—99 zu stützen.

Zunächst kann man in wesentlich einfacherer Weise als damals zeigen, dass jede reelle *projective* Gruppe, die in allen reellen Punkten des Raumes freie Beweglichkeit im Infinitesimalen besitzt, mit der reellen projectiven Gruppe einer imaginären Fläche zweiten Grades zusammenfällt, deren Gleichung reell ist.

Für die Ebene beweisen wir das wie in § 97. Um es allgemein zu beweisen, nehmen wir an, dass es im Raume von $n - 1 \geq 2$ Dimensionen bewiesen ist, und beweisen sodann, dass der Satz auch im Raume von n Dimensionen gültig ist.

Ist nämlich der Satz für den Raum von $n - 1$ Dimensionen bewiesen, so ergiebt sich sofort, dass jede reelle projective Gruppe γ des R_n, die in der Umgebung eines Punktes von allgemeiner Lage freie Beweglichkeit im Infinitesimalen besitzt, $\frac{1}{2}n(n+1)$ Parameter hat und durch eine reelle projective Transformation auf die Form:

$$p_\mu + \sum_{jk}^{1\ldots n} \alpha_{\mu jk} x_j p_k + \sum_{\tau}^{1\ldots n} \beta_{\mu\tau} x_\tau U$$

$$x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + \sum_{\tau}^{1\ldots n} \gamma_{\mu\nu\tau} x_\tau U$$

$$(\mu, \nu = 1 \ldots n;\ \gamma_{\mu\nu\tau} + \gamma_{\nu\mu\tau} = 0)$$

gebracht werden kann. Hieraus aber folgt durch Rechnungen, die sich von denen auf S. 290 ff. fast gar nicht unterscheiden, dass γ durch eine reelle projective Transformation die Form:

$$p_\mu + cx_\mu U, \quad x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu \quad (\mu, \nu = 1 \ldots n)$$

erhalten kann. Soll nun γ insbesondere in allen reellen Punkten des Raumes freie Beweglichkeit im Infinitesimalen besitzen, so muss c positiv sein, folglich besteht γ in diesem Falle bei geeigneter Wahl der Veränderlichen aus allen reellen projectiven Transformationen, die die Mannigfaltigkeit:

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 + 1 = 0$$

invariant lassen.

Hiermit ist direct bewiesen, dass unser Satz für den R_n gilt, wenn er für den R_{n-1} gilt, und da er in der Ebene richtig ist, so ist er allgemein bewiesen.

Betrachten wir jetzt eine beliebige Gruppe G des R_n, die in der Umgebung eines reellen Punktes von allgemeiner Lage freie Beweglichkeit im Infinitesimalen besitzt. Dann ergiebt sich in derselben Weise wie auf S. 482 ff., dass G transitiv und $\frac{1}{2}n(n+1)$-gliedrig ist und dass es durch eine reelle Transformation auf die Form:

$$p_\nu + \cdots, \quad x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + \cdots \quad (\mu, \nu = 1 \ldots n)$$

gebracht werden kann.

Hieraus folgt, dass bei Festhaltung des Coordinatenanfangs die Differentiale $dx_1 \ldots dx_n$ so transformirt werden, dass der Differentialausdruck:

$$dx_1^2 + \cdots + dx_n^2 \tag{10}$$

invariant bleibt. Da nun der Coordinatenanfang ein Punkt von allgemeiner Lage ist und da unsre Gruppe transitiv ist, so erhalten wir überhaupt zu jedem Punkte von allgemeiner Lage einen derartigen Differentialausdruck zugeordnet und zwar finden wir den zu dem Punkte $x_1^0 \ldots x_n^0$ gehörigen Differentialausdruck, wenn wir auf den Ausdruck (10) irgend eine Transformation

$$x_\nu' = f_\nu(x_1 \ldots x_n) \quad (\nu = 1 \ldots n)$$

ausführen, die den Coordinatenanfang in den Punkt $x_1^0 \ldots x_n^0$ überführt, und wenn wir nachher in den Coefficienten des so erhaltenen Ausdrucks die Substitution: $x_\nu' = x_\nu^0$ machen.

Die Differentialausdrücke, die auf diese Weise den Punkten des Raumes zugeordnet sind, werden bei den Transformationen unsrer Gruppe genau so unter einander vertauscht wie die Punkte selbst und daraus folgt wiederum, dass unsre Gruppe einen gewissen Differentialausdruck von der Form:

$$\sum_{k\nu}^{1 \ldots n} \alpha_{k\nu}(x_1 \ldots x_n)\, dx_k\, dx_\nu$$

invariant lässt, der im Coordinatenanfang die Form (10) annimmt und daher für reelle Punkte $x_1 \ldots x_n$ von allgemeiner Lage in eine beständig positive quadratische Form von $dx_1 \ldots dx_n$ übergeht.

Hiermit ist ohne Benutzung des Theorems 42, S. 481 bewiesen, dass jede reelle Gruppe, die in einem reellen Punkte von allgemeiner Lage freie Beweglichkeit im Infinitesimalen besitzt, einen beständig positiven

Differentialausdruck zweiten Grades invariant lässt, es ist also gezeigt, dass man mit Hülfe des Axioms der freien Beweglichkeit im Infinitesimalen das Riemannsche Axiom über das Bogenelement ableiten kann, ohne die Gruppen, die freie Beweglichkeit im Infinitesimalen besitzen, selbst aufzustellen*).

Wir wollen schliesslich noch mit ein paar Worten auf eine Stelle der Riemannschen Probevorlesung eingehen, die uns in der vorliegenden Fassung unverständlich erscheint. Wir meinen die Stelle auf S. 265 seiner gesammelten Werke (1. Ausg.), wo Riemann seine Untersuchungen über die Bestimmung der Massverhältnisse einer n-fach ausgedehnten Grösse auf den Raum anwendet.

Das „erstens" in den Worten: „Sie lassen sich erstens u. s. w." ist es zunächst, was Schwierigkeiten macht. Dieses „erstens" weist auf ein nachfolgendes „zweitens" hin, das auch kommt, es kommt in den Worten: „Setzt man aber zweitens u. s. w." Aber dieses „zweitens" entspricht dem „erstens" gar nicht. Während nämlich unter „erstens" die Bedingungen angegeben werden, die zur Bestimmung der Massverhältnisse des (Euklidischen) Raumes hinreichend und nothwendig sind, wenn gewisse Voraussetzungen gemacht werden, giebt Riemann unter „zweitens" nicht, wie man eigentlich erwarten sollte, eine andere Fassung dieser Bedingungen, sondern er führt ganz neue Voraussetzungen ein. Die Worte: „Setzt man aber zweitens u. s. w." entsprechen also nicht dem „erstens", sondern den Worten: „wenn Unabhängigkeit der Linien vom Ort . . . vorausgesetzt wird". Man sieht hieraus, dass das „erstens" mit dem „zweitens" gar nichts zu thun hat, dass es im Grunde ganz überflüssig ist. In der That wird die ganze Stelle ziemlich klar**), wenn man das erstens weglässt, zwischen den Worten „vorausgesetzt wird" und „Sie lassen sich so ausdrücken u. s. w." keinen Absatz macht, und endlich, wie oben angedeutet, das Wort „Euklidisch" hinzufügt.

Nach einer Mittheilung, die wir der Güte des Herrn H. Weber, des Herausgebers der Riemannschen Werke verdanken, unterliegt es keinem Zweifel, dass Riemann wirklich das „erstens" geschrieben hat; die Möglichkeit einer andern Lesart ist also ausgeschlossen. Es wird in Folge dessen wohl nichts andres übrig bleiben, als anzunehmen, dass hier jedenfalls ein stilistisches Versehen Riemanns vorliegt.

---

*) Lie hat hierauf bereits 1890 in den Leipziger Berichten hingewiesen (s. das. S. 292 Anm.).

**) Allerdings bliebe immer noch festzustellen, was die Worte „Endlich könnte man drittens u. s. w." bedeuten, das ist uns aber nicht gelungen. Uebrigens finden sich auch sonst noch in der Riemannschen Vorlesung Stellen, die uns mindestens unverständlich erscheinen.

Kapitel 23.

Zweite Lösung des Riemann-Helmholtzschen Problems.

Wir erinnern zuvörderst an die in der Einleitung des vorigen Kapitels gemachten Bemerkungen (s. S. 471 f.). Den dort eingenommenen Standpunkt behalten wir auch hier bei, wir fragen also wieder nach solchen Eigenschaften, die der Gruppe der Euklidischen und den beiden Gruppen von Nichteuklidischen Bewegungen gemeinsam sind und durch die diese drei Gruppen unter allen continuirlichen Gruppen mit paarweise inversen Transformationen ausgezeichnet sind. Während aber die im vorigen Kapitel betrachteten charakteristischen Eigenschaften sich blos auf unendlich benachbarte Punkte beziehen, wollen wir jetzt nur solche Eigenschaften benutzen, die das gegenseitige Verhalten endlich von einander entfernter Punkte betreffen.

Bei Riemann wird die Unterscheidung zwischen Axiomen, die sich auf unendlich benachbarte, und solchen, die sich auf endlich von einander entfernte Punkte beziehen, noch nicht gemacht. Die von Riemann benutzten Axiome, die bei ihm freilich nicht ausdrücklich oder doch jedenfalls nicht scharf und deutlich formulirt sind, beziehen sich theils auf die eine, theils auf die andre Art von Punkten. Riemanns Forderung über die Existenz eines Bogenelements bezieht sich auf unendlich benachbarte Punkte. Aus der Existenz eines Bogenelements folgt nun aber, wie wir schon auf S. 487 f. hervorhoben, die Existenz einer Abstandsfunction zweier endlich von einander entfernter Punkte noch nicht, so lange man nichts genaures über die Beschaffenheit des Bogenelementes weiss. Trotzdem setzt Riemann ohne nähere Begründung auch die Existenz einer solchen Abstandsfunction voraus und das ist eine Annahme, die sich auf endlich von einander entfernte Punkte bezieht. Endlich beziehen sich Riemanns allerdings sehr unbestimmt ausgedrückte Forderungen über die Beweglichkeit der Figuren ohne Dehnung offenbar auch auf endlich von einander entfernte Punkte, sie lassen sich aber wegen der besondern Beschaffenheit des Bogenelements, das Riemann aus der von ihm angenommenen Abstandsfunction ableitet, sofort auf unendlich benachbarte Punkte anwenden (vgl. S. 490 ff.).

Die Axiome des Herrn v. Helmholtz beziehen sich in der Fassung, die er ihnen am Anfang seiner Arbeit gegeben hat, auf endlich von einander entfernte Punkte; er wendet sie aber nicht blos auf solche Punkte an, sondern auch auf unendlich benachbarte, ein Verfahren, dessen Unzulässigkeit wir in Kapitel 21 zur Genüge dargethan haben.

Der Wesensunterschied zwischen beiden Arten von Axiomen, zwischen den auf endlich entfernte Punkte und den auf unendlich benachbarte Punkte bezüglichen, kommt in unsrer Darstellung zum ersten Male deutlich zum Ausdruck. Riemann macht allerdings Andeutungen, die auf die Vermuthung führen können, dass er ähnliche Gedanken gehabt hat, aber seine Ausdrücke*) sind viel zu allgemein gehalten, als dass man entscheiden könnte, was er gemeint hat.

Unsre sogenannte *erste* Lösung des Riemann-Helmholtzschen Problems bezieht sich nur auf unendlich benachbarte Punkte, genauer ausgedrückt: sie erledigt die Aufgabe, alle Gruppen zu bestimmen, die durch gewisse Eigenschaften im Infinitesimalen definirt sind. Allerdings muss zugestanden werden, dass die Forderung, die Bewegungen sollen eine Gruppe bilden, sich auf endlich von einander entfernte Punkte bezieht, aber eine derartige Forderung lässt sich überhaupt nicht vermeiden, da es sich bei der Betrachtung der Bewegungen nothwendig um endliche Ortsveränderungen handelt.

Unsre *zweite* Lösung behandelt ein Problem, das sich nur auf endlich von einander entfernte Punkte bezieht; der Begriff der unendlich benachbarten Punkte spielt nur insofern ein, als wir verlangen, dass getrennte Punkte auch getrennt bleiben, dass also zwei endlich von einander entfernte Punkte bei allen Bewegungen endlich von einander entfernt bleiben und niemals in unendlich benachbarte Punkte übergehen**).

Legt man bei dem Riemann-Helmholtzschen Probleme Axiome zu Grunde, die sich auf endlich von einander entfernte Punkte beziehen, so ist die Lösung ungleich schwieriger, als wenn man Axiome über unendlich benachbarte Punkte benutzt. Aus diesem Grunde ist unsre *erste* Lösung (s. Kap. 22) auch für den Raum von n Dimensionen *endgültig* abgeschlossen, *unsre zweite Lösung dagegen*, die in dem gegenwärtigen Kapitel auseinandergesetzt wird, *erledigt blos den, freilich wichtigsten Fall des Raumes von drei Dimensionen wenigstens in gewissem Sinne endgültig.* Für den Raum von n Dimensionen zeigen wir nur, dass es ausreichend ist, gewisse Axiome aufzustellen, die sich auf *endlich von einander entfernte* Punkte beziehen und die jedenfalls weniger verlangen als die Helmholtzschen; wir behaupten jedoch nicht, dass

*) S. seine ges. Werke, 1. Ausg., S. 267.

**) Denselben Charakter trägt die Lösung des Riemann-Helmholtzschen Problems, die wir in Kapitel 21 auf Grund der Helmholtzschen Axiome gegeben haben.

diese Axiome für $n > 3$ keine überflüssigen Elemente enthalten, wir erachten es sogar für wahrscheinlich, dass sie welche enthalten.

In § 101 entwickeln wir zunächst einen allgemeinen Satz über Gruppen, bei denen zwei Punkte eine Invariante haben. In § 102 behandeln wir sodann den Raum von drei Dimensionen, wobei uns der in § 101 bewiesene Satz von einigem Nutzen sein wird. In § 103 endlich erledigen wir den Fall eines Raumes von vier Dimensionen und deuten schliesslich noch an, wie man in Räumen von mehr als vier Dimensionen zum Ziele kommt.

§ 101.

Bei der Besprechung der Helmholtzschen Arbeit erwähnten wir schon, dass man äusserst vorsichtig sein muss, wenn man daraus, wie sich endlich von einander entfernte Punkte bei einer Gruppe verhalten, auf das Verhalten unendlich benachbarter Punkte schliessen will. Damit ist jedoch nicht gesagt, dass man aus dem Verhalten jener Punkte überhaupt nicht auf das Verhalten dieser schliessen könne. Es gilt nämlich jedenfalls das

Theorem 44. *Haben bei einer continuirlichen, von infinitesimalen Transformationen erzeugten Gruppe des n-fach ausgedehnten Raumes zwei endlich von einander entfernte Punkte* $x_1 \dots x_n$ *und* $y_1 \dots y_n$ *eine Invariante, so haben auch zwei unendlich benachbarte Punkte* x_ν *und* $x_\nu + dx_\nu$ *der Gruppe gegenüber* mindestens eine *Invariante oder schärfer ausgedrückt: die Gruppe lässt mindestens einen Ausdruck von der Form:*

$$J(x_1 \dots x_n,\ dx_1 \dots dx_n)$$

invariant.

Der Einfachheit wegen beweisen wir dieses Theorem zunächst für endliche continuirliche Gruppen.

Es sei:

$$X_k f = \sum_1^n{}_\nu \xi_{k\nu}(x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \qquad (k = 1 \dots r)$$

eine beliebige r-gliedrige Gruppe und es möge:

$$Y_k f = \sum_1^n{}_\nu \xi_{k\nu}(y_1 \dots y_n) \frac{\partial f}{\partial y_\nu}$$

gesetzt werden. Sollen dann die beiden Punkte x_ν und y_ν eine Invariante $\Omega(x, y)$ haben, so ist nothwendig und hinreichend, dass die r Gleichungen:

(1) $$X_k f + Y_k f = 0 \quad (k = 1 \ldots r)$$

in den $2n$ Veränderlichen x_v und y_v eine Lösung gemein haben oder, was auf dasselbe hinauskommt, dass alle $2n$-reihigen Determinanten der Matrix:

(2) $$\left| \underset{(k=1,\ 2 \ldots r)}{\xi_{k1}(x) \ldots \xi_{kn}(x) \quad \xi_{k1}(y) \ldots \xi_{kn}(y)} \right|$$

identisch verschwinden.

Ist nun diese Bedingung erfüllt und setzen wir: $y_v = x_v + dx_v$, so ergiebt sich sofort, dass auch alle $2n$-reihigen Determinanten der Matrix:

(2′) $$\left| \underset{(k=1 \ldots r)}{\xi_{k1}(x) \ldots \xi_{kn}(x) \quad d\xi_{k1}(x) \ldots d\xi_{kn}(x)} \right|$$

identisch verschwinden, demnach ist die aus $X_1 f \ldots X_r f$ durch Erweiterung (vgl. Abschn. I, S. 524 ff.) entstehende Gruppe:

$$X_k f + \sum_1^n{}_v \left\{ \sum_1^n{}_\tau \frac{\partial \xi_{kv}(x)}{\partial x_\tau} x'_\tau \right\} \frac{\partial f}{\partial x'_v} \quad (k = 1 \ldots r)$$

in den $2n$ Veränderlichen x_v, x'_v sicher intransitiv und lässt mindestens eine Function: $\omega(x_1 \ldots x_n, x_1' \ldots x_n')$ invariant. Es ist überdies leicht zu sehen, dass man diese Function ω immer so wählen kann, dass sie nicht von allen x' frei ist. Haben nämlich die r Gleichungen (1) keine von $y_1 \ldots y_n$ freie gemeinsame Lösung, so haben offenbar auch die Gleichungen:

(3) $$X_k f + \sum_1^n{}_v \left\{ \sum_1^n{}_\tau \frac{\partial \xi_{kv}(x)}{\partial x_\tau} x'_\tau \right\} \frac{\partial f}{\partial x'_v} = 0 \quad (k = 1 \ldots r)$$

keine von $x_1' \ldots x_n'$ freie Lösung gemein. Haben andrerseits die Gleichungen (1) die von allen y freie Lösung: $\Omega(x_1 \ldots x_n)$ gemein, so haben sie auch die von allen x freie Lösung: $\Omega(y_1 \ldots y_n)$ und es ist dann augenscheinlich der Ausdruck:

$$\sum_1^n{}_\tau \frac{\partial \Omega(x_1 \ldots x_n)}{\partial x_\tau} x'_\tau$$

eine nicht von allen x' freie gemeinsame Lösung der Gleichungen (3).

Hieraus folgt, dass die beiden unendlich benachbarten Punkte x_v und $x_v + dx_v$ der Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ gegenüber stets eine Invariante haben, sobald die beiden Punkte x_v und y_v eine haben, und es ist somit die Richtigkeit unsers Theorems 44 für alle endlichen continuirlichen Gruppen bewiesen.

Bisher haben wir uns beim Beweise des Theorems 44 auf endliche continuirliche Gruppen beschränkt, es ist aber nicht schwer zu sehen, dass unser Beweis überhaupt auf alle endlichen oder unendlichen continuirlichen Gruppen anwendbar ist, die von infinitesimalen Transformationen erzeugt sind.

Ist nämlich Xf die allgemeine infinitesimale Transformation einer Gruppe und hat Yf dieselbe Bedeutung wie oben, so haben die beiden Punkte x_ν und y_ν dieser Gruppe gegenüber dann und nur dann eine Invariante, wenn in dem Inbegriff aller Gleichungen:

$$Xf + Yf = 0$$

nicht mehr als $2n - 1$ von einander unabhängige Gleichungen enthalten sind. Ist aber diese Bedingung erfüllt, so sind auch in dem Inbegriff aller Gleichungen:

$$Xf + \sum_1^n{}_\nu \left\{ \sum_1^n{}_\tau \frac{\partial \xi_\nu(x)}{\partial x_\tau} x'_\tau \right\} \frac{\partial f}{\partial x'_\nu} = 0$$

höchstens $2n - 1$ von einander unabhängige Gleichungen enthalten und die beiden Punkte x_ν und $x_\nu + dx_\nu$ haben infolgedessen sicher eine Invariante.

Damit ist unser Theorem allgemein bewiesen.

Weiss man schon, dass die beiden endlich von einander entfernten Punkte x_ν und y_ν bei einer gegebenen continuirlichen Gruppe die Invariante $\Omega(x, y)$ haben, so erhebt sich die Frage, ob man nicht aus Ω eine Invariante der beiden unendlich benachbarten Punkte x_ν und $x_\nu + dx_\nu$ ableiten kann; denn dass diese beiden Punkte eine Invariante haben, folgt aus Theorem 44. Wir wollen uns auf die Beantwortung dieser Frage nicht weiter einlassen und nur erwähnen, dass man die gesuchte Invariante der Punkte x_ν und $x_\nu + dx_\nu$ stets dann ohne Weiteres angeben kann, wenn der Ausdruck $\Omega(x, x + dx)$ in eine gewöhnliche Potenzreihe von $dx_1 \ldots dx_n$ entwickelbar ist; man erhält nämlich dann die gewünschte Invariante, wenn man die ganze homogene Function niedrigsten Grades von $dx_1 \ldots dx_n$ aufsucht, die in der Entwicklung von $\Omega(x, x + dx)$ nach Potenzen von $dx_1 \ldots dx_n$ enthalten ist. Wenn dagegen $\Omega(x, x + dx)$ nicht in eine gewöhnliche Potenzreihe von $dx_1 \ldots dx_n$ entwickelbar ist, so kann die Invariante von x_ν und $x_\nu + dx_\nu$ nicht unmittelbar aus dem Ausdrucke $\Omega(x, x + dx)$ abgeleitet werden.

Es ist wünschenswerth ein einfaches Kriterium zu besitzen, an dem man erkennen kann, ob zwei unendlich benachbarte Punkte einer

Gruppe gegenüber eine Invariante haben oder nicht. Hat man sich nämlich überzeugt, dass sie keine Invariante haben, so ist auf Grund von Theorem 44 unmittelbar klar, dass auch zwei endlich von einander entfernte Punkte keine Invariante haben. Wir werden deshalb zeigen, wie man zu einem derartigen Kriterium gelangt.

Wir betrachten irgend eine endliche oder unendliche continuirliche Gruppe G, die von infinitesimalen Transformationen erzeugt ist. Unter den infinitesimalen Transformationen von G, die einen Punkt $x_1^0 \ldots x_n^0$ von allgemeiner Lage invariant lassen, giebt es eine gewisse Zahl, etwa gerade $m \leqq n^2$ von einander unabhängige:

$$(4) \qquad \sum_{\mu\nu}^{1\ldots n} \alpha_{k\mu\nu}(x_\mu - x_\mu^0)\frac{\partial f}{\partial x_\nu} + \cdots \quad (k = 1 \ldots m),$$

die in den $x_\mu - x_\mu^0$ von der ersten Ordnung sind und aus denen sich keine Transformation von zweiter oder höherer Ordnung in den $x_\mu - x_\mu^0$ linear ableiten lässt. Die infinitesimalen Transformationen (4) sind dann offenbar so beschaffen, dass sich die Glieder erster Ordnung in jeder infinitesimalen Transformation von G, die den Punkt $x_1^0 \ldots x_n^0$ festhält, aus den Gliedern erster Ordnung der Transformationen (4) linear ableiten lassen.

Hieraus folgt, dass die infinitesimalen Transformationen:

$$(5) \qquad A_k f = \sum_{\mu\nu}^{1\ldots n} \alpha_{k\mu\nu} x_\mu' \frac{\partial f}{\partial x_\nu'} \quad (k = 1 \ldots m)$$

in den Veränderlichen $x_1' \ldots x_n'$ ihrerseits eine m-gliedrige lineare homogene Gruppe erzeugen, die durch die Gruppe G und den Punkt $x_1^0 \ldots x_n^0$ vollständig bestimmt ist. Diese lineare homogene Gruppe, deren Vorhandensein uns im Falle einer endlichen continuirlichen Gruppe G bereits aus Abschn. I, S. 599 ff. bekannt ist, hat eine sehr einfache Bedeutung, sie giebt nämlich an, in welcher Weise die dem Punkte $x_1^0 \ldots x_n^0$ unendlich benachbarten Punkte:

$$x_\nu^0 + dx_\nu = x_\nu^0 + x_\nu' dt \quad (\nu = 1 \ldots n)$$

bei der Gruppe G transformirt werden, sobald man den Punkt $x_1^0 \ldots x_n^0$ festhält. Man erkennt das sofort, wenn man bedenkt, dass die Glieder erster Ordnung in den infinitesimalen Transformationen (4) die einzigen sind, bei denen die dem Punkte $x_1^0 \ldots x_n^0$ unendlich benachbarten Punkte wirklich transformirt werden*).

*) Bisher haben wir $x_1' \ldots x_n'$ gewöhnlich als homogene Coordinaten der ∞^{n-1} Linienelemente durch den Punkt $x_1^0 \ldots x_n^0$ aufgefasst, doch haben wir die hier angegebene Deutung der Gruppe (5) auch schon erwähnt (vgl. S. 454).

Haben nun die beiden unendlich benachbarten Punkte x_ν und $x_\nu + dx_\nu$ bei der Gruppe G die Invariante $\omega(x_1 \ldots x_n, dx_1 \ldots dx_n)$, so ist klar, dass nach Festhaltung des Punktes x_ν^0 die unendlich benachbarten Punkte: $x_\nu^0 + dx_\nu$ derart transformirt werden, dass der Ausdruck: $\omega(x_1^0 \ldots x_n^0, dx_1 \ldots dx_n)$ invariant bleibt, es ist somit in diesem Falle $\omega(x_1^0 \ldots x_n^0, x_1' \ldots x_n')$ eine Invariante der Gruppe (5).

Besitzt andrerseits die Gruppe (5) eine Invariante: $\varphi(x_1' \ldots x_n')$, so folgt daraus, dass zwei beliebige unendlich benachbarte Punkte bei G eine Invariante haben. Ist nämlich G intransitiv und $\chi(x_1 \ldots x_n)$ irgend eine Invariante von G, so ist der Ausdruck:

$$\sum_1^n{}_\nu \frac{\partial \chi(x)}{\partial x_\nu} dx_\nu$$

augenscheinlich eine Invariante der beiden unendlich benachbarten Punkte x_ν und $x_\nu + dx_\nu$. Ist aber G transitiv, so denke man sich alle Transformationen von G auf den Ausdruck:

$$\varphi(dx_1 \ldots dx_n)$$

ausgeführt; man erhält dann jedem Punkte des Raumes einen ganz bestimmten Ausdruck dieser Art zugeordnet und alle diese Ausdrücke werden bei den Transformationen von G unter einander vertauscht, das aber heisst nichts andres, als dass es einen bei G invarianten Ausdruck:

$$\omega(x_1 \ldots x_n, dx_1 \ldots dx_n),$$

giebt, dass also zwei beliebige unendlich benachbarte Punkte bei G eine Invariante haben (vgl. S. 496).

Wir sehen hieraus, dass zwei beliebige unendlich benachbarte Punkte bei G dann und nur dann eine Invariante haben, wenn die vorhin definirte lineare homogene Gruppe (5) in den Veränderlichen $x_1' \ldots x_n'$ eine Invariante besitzt. Dieses Ergebniss sprechen wir so aus:

Satz 1. *Wünscht man zu entscheiden, ob zwei beliebige unendlich benachbarte Punkte bei einer continuirlichen, von infinitesimalen Transformationen erzeugten Gruppe eine Invariante haben, so braucht man nicht die infinitesimalen Transformationen dieser Gruppe selbst zu kennen, sondern es genügt, wenn man von den infinitesimalen Transformationen der Gruppe, die einen Punkt $x_1^0 \ldots x_n^0$ von allgemeiner Lage invariant lassen, die Glieder von erster Ordnung in den $x_\nu - x_\nu^0$ kennt.*

Besonders wichtig ist es, entscheiden zu können, ob zwei unendlich benachbarte Punkte x_ν und $x_\nu + dx_\nu$ eine Invariante $\omega(x, dx)$ besitzen, die in den dx_ν homogen von erster Ordnung ist. Haben sie

nämlich eine solche Invariante, so kann man die als das Bogenelement einer Curve betrachten und findet durch Quadratur, dass jede Curve eine gewisse Länge hat.

Es ist nicht schwer festzustellen, ob eine derartige Invariante existirt oder nicht; man braucht zu diesem Zwecke offenbar blos festzustellen, ob die Gruppe (5) eine Invariante besitzt, die in den x_ν' homogen von erster Ordnung ist. Das aber ist sehr leicht.

Lässt sich aus den infinitesimalen Transformationen (5) die Transformation:

$$Uf = \sum_1^n {}_\nu x_\nu' \frac{\partial f}{\partial x_\nu'}$$

linear ableiten, so sind alle etwaigen Invarianten von (5) homogen von nullter Ordnung und es giebt sicher keine, die homogen von erster Ordnung wäre. Lässt sich dagegen Uf aus den Transformationen (5) nicht linear ableiten und hat die Gruppe (5) überhaupt eine Invariante, so hat sie immer auch eine, die homogen von erster Ordnung ist; denn unter den gemachten Voraussetzungen haben die Gleichungen:

$$(5') \qquad A_k f = \sum_{\mu\nu}^{1\ldots n} \alpha_{k\mu\nu} x_\mu' \frac{\partial f}{\partial x_\nu'} = 0 \quad (k = 1 \ldots m)$$

sicher eine Lösung gemein. Da nun die Gleichung $Uf = 0$ keine Folge der Gleichungen (5') ist und da die m Ausdrücke $(A_k U)$ identisch verschwinden, so ist klar, dass die Gleichungen:

$$A_1 f = 0, \ \ldots, \ A_m f = 0, \ Uf = f$$

ebenfalls eine Lösung gemein haben.

Man sieht hieraus, dass aus der Existenz einer Invariante zweier endlich entfernter Punkte nicht mit Sicherheit auf die Existenz eines Bogenelements geschlossen werden kann, *dass also zu zwei endlich von einander entfernten Punkten sehr gut eine Abstandsfunction gehören kann, ohne dass die Curven eine Länge haben.* Wenn nämlich zwei endlich von einander entfernte Punkte eine Invariante haben, so folgt zwar aus Theorem 44, dass zwei unendlich benachbarte Punkte x_ν und $x_\nu + dx_\nu$ mindestens eine Invariante haben, aber die betreffenden Invarianten können alle homogen von nullter Ordnung in den dx_ν sein, während doch die Curven nur dann eine Länge haben, wenn eine Invariante $\omega(x, dx)$ existirt, die in den dx_ν homogen von erster Ordnung ist.

Ein Beispiel hierfür liefert die dreigliedrige Gruppe:

$$p, \ q, \ xp + yq$$

der Ebene. Bei ihr haben zwei endlich von einander entfernte Punkte eine und nur eine Invariante, nämlich:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

und ebenso haben zwei unendlich benachbarte Punkte eine und nur eine Invariante, nämlich:

$$\frac{dy}{dx}.$$

Während also zu endlich von einander entfernten Punkten eine Abstandsfunction gehört, haben doch die Curven dieser Gruppe gegenüber keine Länge.

Umgekehrt sahen wir früher, dass aus der Existenz einer Invariante $\omega(x, dx)$, die in den dx homogen von erster Ordnung ist, keineswegs die Existenz einer Abstandsfunction zweier endlich von einander entfernter Punkte folgt (s. S. 487 f.). Wir können das jetzt auch so ausdrücken: *Wenn auch die Curven eine Länge haben, so braucht deswegen doch zu zwei endlich von einander entfernten Punkten weder eine Abstandsfunction noch eine kürzeste Verbindungslinie zu gehören.*

Die vorstehenden Betrachtungen über die Beziehungen zwischen den Invarianten endlich von einander entfernter Punkte und denen unendlich benachbarter Punkte lassen sich noch wesentlich vervollständigen; man kann sie auch verallgemeinern, indem man drei und mehr Punkte einführt, die Differentiale zweiter und höherer Ordnung der x_r mitnimmt und so weiter. Wir behalten uns vor, auf diese Fragen bei einer andern Gelegenheit ausführlich einzugehen.

Wir wenden uns jetzt zur eigentlichen Aufgabe des gegenwärtigen Kapitels, zur Lösung des Riemann-Helmholtzschen Problems und zwar beschränken wir uns, wie oben angekündigt, zunächst auf den dreifach ausgedehnten Raum.

§ 102.

Wir behaupten, dass die Euklidischen und die Nichteuklidischen Bewegungen des R_3 vollständig charakterisirt sind, wenn man die folgenden Axiome aufstellt:

I) *Der R_3 ist eine Zahlenmannigfaltigkeit.*

II) *Die Bewegungen des R_3 bilden eine reelle continuirliche, von infinitesimalen Transformationen erzeugte Gruppe.*

III) *Hält man einen beliebigen reellen Punkt: y_1^0, y_2^0, y_3^0 von allgemeiner Lage fest, so befriedigen alle reellen Punkte: x_1, x_2, x_3, in die*

ein andrer reeller Punkt: x_1^0, x_2^0, x_3^0 *dann noch übergehen kann, eine reelle Gleichung von der Form:*

$$(6) \qquad W(y_1^0, y_2^0, y_3^0;\ x_1^0, x_2^0, x_3^0;\ x_1, x_2, x_3) = 0,$$

die für: $x_1 = y_1^0,\ x_2 = y_2^0,\ x_3 = y_3^0$ *nicht erfüllt ist und die (im Allgemeinen) eine reelle, durch den Punkt:* x_1^0, x_2^0, x_3^0 *gehende Fläche darstellt.*

IV) *Um den Punkt:* y_1^0, y_2^0, y_3^0 *herum lässt sich ein endlicher dreifach ausgedehnter Bereich derart abgränzen, dass nach Festhaltung des Punktes:* y_1^0, y_2^0, y_3^0 *jeder andre reelle Punkt:* x_1^0, x_2^0, x_3^0 *des Bereichs noch continuirlich in jeden dem Bereiche angehörigen reellen Punkt übergehen kann, der die Gleichung* (6) *befriedigt und der mit dem Punkte:* x_1^0, x_2^0, x_3^0 *durch eine irreducible continuirliche Reihe von Punkten verbunden ist.*

Werden die eingeklammerten Worte gestrichen, so genügen diese Axiome sicher; das zeigt das Folgende, wenn man überall das Eingeklammerte weglässt. Behält man in Axiom III und im Folgenden die eingeklammerten Worte bei, so zeigt das Folgende, wenn wir nicht irren, dass auch dann noch die Axiome genügen.

Unter G wollen wir eine beliebige endliche oder unendliche continuirliche Gruppe verstehen, die von infinitesimalen Transformationen erzeugt ist und die Axiome III und IV erfüllt.

Da die Gleichung (6) für: $x_1 = x_1^0,\ x_2 = x_2^0,\ x_3 = x_3^0$ identisch erfüllt ist, so giebt es unter dem Inbegriff aller reellen Punkte: x_1, x_2, x_3, die der Gleichung (6) genügen, stets eine continuirliche, nicht zerfallende Schaar, in der der Punkt: x_1^0, x_2^0, x_3^0 enthalten ist. Diese Schaar von Punkten bildet nach Axiom III (im Allgemeinen) eine durch den Punkt: x_1^0, x_2^0, x_3^0 gehende Fläche, (es ist aber auch denkbar, dass sie auf eine durch diesen Punkt gehende Curve oder gar auf den Punkt selbst zusammenschrumpft. Wie dem auch sei,) wir wollen sie als eine zu der Gruppe G gehörige *Pseudokugel* bezeichnen und zwar als eine Pseudokugel mit dem Mittelpunkte: y_1^0, y_2^0, y_3^0 (vgl. S. 402).

Unser Axiom III sagt jetzt offenbar aus, *dass eine Pseudokugel mit dem Mittelpunkte:* y_1^0, y_2^0, y_3^0 *niemals durch ihren Mittelpunkt geht.* Hierin liegt, dass bei allen Transformationen von G zwei getrennte Punkte auch getrennt bleiben, dass also zwei endlich von einander entfernte Punkte niemals in zwei unendlich benachbarte übergehen können (vgl. S. 499).

Unser Axiom IV aber kann nunmehr so ausgesprochen werden: Um den Punkt: y_1^0, y_2^0, y_3^0 herum lässt sich ein endlicher dreifach

ausgedehnter Bereich so abgränzen, dass nach Festhaltung des Punktes: y_1^0, y_2^0, y_3^0 jeder andre reelle Punkt des Bereichs sich innerhalb des Bereichs ganz frei auf der durch ihn gehenden Pseudokugel mit dem Mittelpunkte: y_1^0, y_2^0, y_3^0 bewegen kann.

Bevor wir dazu übergehen, alle Gruppen G zu bestimmen, die unsre Axiome erfüllen, wollen wir noch in aller Kürze unsre Axiome mit den Helmholtzschen vergleichen.

Herr v. Helmholtz verlangt in seinen Axiomen thatsächlich mehr als wir, selbst wenn man von seinem Monodromieaxiom ganz absieht. Wie früher gezeigt wurde, folgt ja aus seinen drei ersten Axiomen, dass die Bewegungen eine *endliche* continuirliche Gruppe bilden, die von infinitesimalen Transformationen erzeugt ist; wir jedoch verlangen in unserm Axiome II blos, dass sie überhaupt eine continuirliche, von infinitesimalen Transformationen erzeugte Gruppe bilden, wir schliessen also die Möglichkeit, dass die Gruppe *unendlich* ist, von vornherein nicht aus. Andrerseits verlangen unsre Axiome III und IV wesentlich weniger als das dritte Helmholtzsche Axiom.

Während nämlich Herr v. Helmholtz fordert, dass jeder Punkt vollkommen frei beweglich sei, soweit er nicht durch die Gleichungen gebunden ist, die zwischen ihm und den übrigen bewegten Punkten bestehen, verlangen wir blos, dass nach Festhaltung *eines* Punktes jeder andre Punkt vollkommen frei beweglich sei, soweit er nicht durch die zwischen ihm und dem festgehaltenen Punkt bestehende Gleichung gebunden ist. Allerdings fügen wir noch die anscheinend neue Forderung hinzu, dass eine Pseudokugel niemals durch ihren Mittelpunkt gehe, aber diese Forderung ist nichts weiter als eine präcise Fassung dessen, was auch Herr v. Helmholtz implicite verlangt. Dieser fordert nämlich insbesondere, dass nach Festhaltung des Punktes: y_1^0, y_2^0, y_3^0 jeder andre Punkt sich ganz frei auf der hindurchgehenden Pseudokugel mit dem Mittelpunkte: y_1^0, y_2^0, y_3^0 bewegen könne. Ginge nun eine der betreffenden Pseudokugeln durch ihren Mittelpunkt, so könnte sich nach Festhaltung von: y_1^0, y_2^0, y_3^0 kein Punkt P dieser Pseudokugel ganz frei auf seiner Pseudokugel bewegen, denn unter den nicht ausgearteten Transformationen von G, die den Punkt: y_1^0, y_2^0, y_3^0 in Ruhe lassen, giebt es keine, die den Punkt P in den invarianten Punkt: y_1^0, y_2^0, y_3^0 überführt.

Jetzt zur Bestimmung aller Gruppen, die unsre Axiome erfüllen.

Wir zeigen zunächst, dass jede derartige Gruppe G *transitiv ist* und dass *zwei endlich von einander entfernte Punkte bei G eine und nur eine Invariante haben.*

Wäre G intransitiv, so liesse es sicher ∞^1 reelle Flächen invariant, deren Gleichungen wir durch eine reelle Punkttransformation auf die Form: $x_3 = \text{const.}$ bringen könnten. Hielten wir nun einen reellen Punkt: y_1^0, y_2^0, y_3^0 von allgemeiner Lage fest, so könnte offenbar jeder andre Punkt: x_1^0, x_2^0, x_3^0 nur noch solche Lage annehmen, die der Gleichung: $x_3 = x_3^0$ genügten, die Gleichung (6) hätte daher

nothwendig die Form: $x_3 = x_3^0$. Demnach würden die Pseudokugeln mit dem Mittelpunkte: y_1^0, y_2^0, y_3^0 durch die Gleichung: $x_3 = \text{const.}$ dargestellt und es ginge infolgedessen eine dieser Pseudokugeln durch ihren Mittelpunkt, was ausgeschlossen ist. Also kann G nicht intransitiv, sondern es muss *transitiv* sein.

Aus Axiom IV folgt ferner, dass nach Festhaltung eines reellen Punktes von allgemeiner Lage jeder andre reelle Punkt (im Allgemeinen) noch gerade ∞^2 verschiedene Lagen annehmen kann. Es ist daher klar, dass bei G nicht jedes Punktepaar des R_3 in jedes andre übergehen kann, dass vielmehr ein Punktepaar bei G höchstens ∞^5 verschiedene Lagen annimmt. Ist also Xf eine beliebige infinitesimale Transformation von G und hat Yf dieselbe Bedeutung wie auf S. 500, so giebt es unter den sämmtlichen Gleichungen: $Xf + Yf = 0$ sicher nicht mehr als fünf von einander unabhängige, diese Gleichungen haben daher mindestens eine Lösung: $\Omega(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3)$ gemein, das heisst die beiden Punkte x_r und y_r haben bei G jedenfalls eine Invariante, nämlich die Invariante $\Omega(x, y)$.

Aus der Transitivität von G ergiebt sich nun sofort, dass die beiden Punkte x_r und y_r bei G nur eine Invariante haben; hätten sie nämlich zwei oder gar drei Invarianten, so nähme jedes Punktepaar bei G höchstens ∞^4 verschiedene Lagen an, nach Festhaltung eines Punktes von allgemeiner Lage könnte sich daher jeder andre Punkt höchstens auf einer Curve bewegen, was mit Axiom IV in Widerspruch steht.

Demnach ist G wirklich transitiv und zwei endlich von einander entfernte Punkte x_r und y_r haben bei G nur die eine Invariante: $\Omega(x, y)$. Wir können daraus schliessen, dass sich die Gleichung (6) auf die Form:

$$(6') \qquad \Omega(x_1, x_2, x_3; y_1^0, y_2^0, y_3^0) = \Omega(x_1^0, x_2^0, x_3^0; y_1^0, y_2^0, y_3^0)$$

bringen lässt.

Wir zeigen jetzt, dass unsre Gruppe G *reell primitiv* ist.

(Da der Inbegriff aller Pseudokugeln mit dem Mittelpunkte: y_1^0, y_2^0, y_3^0 durch *eine* Gleichung dargestellt wird und da sich unter diesen Pseudokugeln ∞^1 reelle Flächen befinden, so ist klar, dass nur eine discrete Anzahl von Pseudokugeln mit dem Mittelpunkte: y_1^0, y_2^0, y_3^0 auf Curven oder Punkte zusammenschrumpfen kann.) Da (überdies) keine der Pseudokugeln mit dem Mittelpunkte: y_1^0, y_2^0, y_3^0 durch ihren Mittelpunkt gehen kann, so leuchtet ein, dass bei Festhaltung des Punktes: y_1^0, y_2^0, y_3^0 keine durch diesen Punkt gehende reelle Curve oder Fläche in Ruhe bleiben kann, dass also G wirklich reell primitiv ist.

Nunmehr ist es auch leicht zu beweisen, dass G endlich und zwar höchstens *sechsgliedrig* ist.

Zunächst ist nämlich sicher, dass zu G mindestens ∞^2 verschiedene Pseudokugeln gehören. Gäbe es nämlich blos ∞^1 Pseudokugeln, so ginge durch jeden Punkt blos eine Pseudokugel und jeder Punkt wäre Mittelpunkt der durch ihn gehenden Pseudokugel; das aber darf nicht sein.

Es seien ferner P_1, P_2, P_3 und P irgend vier reelle Punkte von allgemeiner gegenseitiger Lage. Da es ∞^2 verschiedene Pseudokugeln giebt, so schneiden sich die zwei durch P gehenden Pseudokugeln mit den Mittelpunkten P_1 und P_2 nothwendig in einer reellen Curve C durch P. Läge nun C auch auf der durch P gehenden Pseudokugel mit dem Mittelpunkte P_3, so schnitten sich überhaupt alle durch P gehenden Pseudokugeln in der Curve C; wenn man also P festhielte, bliebe nothwendig zugleich auch die Curve C durch P in Ruhe. Das aber haben wir vorhin als unmöglich nachgewiesen. Es ergiebt sich somit, dass die drei durch P gehenden Pseudokugeln mit den Mittelpunkten P_1, P_2 und P_3 nur den Punkt P gemein haben, nicht aber eine durch diesen Punkt gehende reelle Curve. Halten wir nun die drei Punkte P_1, P_2 und P_3 fest, so kann sich P jedenfalls nur auf der Schnittmannigfaltigkeit der drei durch P gehenden Pseudokugeln mit den Mittelpunkten P_1, P_2 und P_3 bewegen und da diese Schnittmannigfaltigkeit nur aus dem Punkte P besteht, so muss P in Ruhe bleiben. Mit andern Worten: sobald man drei reelle Punkte von allgemeiner gegenseitiger Lage festhält, bleiben überhaupt alle Punkte des R_3 in Ruhe. Da nun G transitiv ist und da nach Festhaltung eines Punktes jeder andre reelle Punkt von allgemeiner Lage noch eine Fläche beschreiben kann, so kommt das Festhalten von drei Punkten auf höchstens sechs Bedingungen hinaus. Die Gruppe G ist demnach endlich und zwar höchstens sechsgliedrig.

Halten wir einen reellen Punkt P von allgemeiner Lage fest, so wird die projective Mannigfaltigkeit der ∞^2 reellen Linienelemente durch P durch eine reelle projective Gruppe g transformirt, die offenbar höchstens dreigliedrig ist. Nun aber ergiebt sich aus unsrer Bestimmung aller reellen projectiven Gruppen der Ebene (s. S. 106 f. u. 380 ff.), dass jede reelle projective Gruppe der Ebene, die weniger als drei Parameter hat, mindestens einen reellen Punkt in Ruhe lässt. Hätte demnach g weniger als drei Parameter, so liesse es mindestens ein reelles Linienelement durch P in Ruhe und daraus würde folgen, dass G reell-imprimitiv wäre, während es doch reell-primitiv sein muss. Demnach ist g gerade dreigliedrig und G infolge dessen gerade sechsgliedrig. Also:

Wenn eine reelle Gruppe G unsre Axiome III und IV erfüllt, so ist sie sechsgliedrig und reell-primitiv, ferner haben zwei endlich von einander entfernte Punkte bei ihr blos eine Invariante und ausserdem ist sie so beschaffen, dass die ∞^2 reellen Linienelemente durch jeden festgehaltenen reellen Punkt von allgemeiner Lage dreigliedrig transformirt werden.

Vor allen Dingen müssen wir jetzt feststellen, was für verschiedene Formen die oben definirte Gruppe g haben kann. Wir wissen, dass g dreigliedrig ist und dass es kein reelles Linienelement invariant lässt. Beziehen wir daher die ∞^2 reellen Linienelemente durch P projectiv auf die reellen Punkte einer Ebene, so verwandelt sich g in eine dreigliedrige reelle projective Gruppe $\mathfrak{g}$ dieser Ebene und zwar in eine Gruppe, bei der kein reeller Punkt invariant bleibt. Nach S. 106 und 384 ist aber jede solche Gruppe $\mathfrak{g}$ entweder die dreigliedrige reelle projective Gruppe eines nicht ausgearteten Kegelschnitts, der durch eine reelle Gleichung dargestellt wird, oder sie ist durch eine reelle projective Transformation der Ebene mit der Gruppe:

$$\mathfrak{p},\ \mathfrak{q},\ \mathfrak{y}\mathfrak{p} - \mathfrak{x}\mathfrak{q} + \mathfrak{c}(\mathfrak{x}\mathfrak{p} + \mathfrak{y}\mathfrak{q})$$

ähnlich. Demnach lässt g entweder einen nicht ausgearteten Kegel zweiten Grades von Linienelementen invariant, der durch eine reelle Gleichung dargestellt wird, oder es lässt ein reelles Flächenelement invariant und in diesem zwei conjugirt imaginäre Linienelemente.

Wenn der zweite Fall eintritt, so ist bei G mit jedem reellen Punkte von allgemeiner Lage ein hindurchgehendes reelles Flächenelement invariant verknüpft, G lässt also eine reelle Pfaffsche Gleichung invariant, die natürlich wegen der Primitivität von G nicht integrabel sein darf. Denken wir uns diese Gleichung durch eine reelle Punkttransformation des R_3 auf die Form: $dz - y\,dx = 0$ gebracht, so verwandelt sich G in eine sechsgliedrige reelle Gruppe G', bei der die Gleichung: $dz - y\,dx = 0$ invariant bleibt. Ueberdies können wir es durch eine reelle Punkttransformation, bei der die genannte Pfaffsche Gleichung invariant bleibt, so einrichten, dass der Coordinatenanfang: $x = y = z = 0$ bei G' ein Punkt von allgemeiner Lage ist (s. Abschn. II, S. 402 f.).

Halten wir den Coordinatenanfang fest, so bleibt das Flächenelement: $dz = 0$ invariant und in diesem zwei conjugirt imaginäre Linienelemente, die wir immer durch eine reelle Transformation, bei der der Coordinatenanfang und die Gleichung: $dz - y\,dx = 0$ invariant bleiben, in die Linienelemente:

$$(7) \qquad dz = dx + i\,dy = 0, \quad dz = dx - i\,dy = 0$$

überführen können. Da nun G' transitiv ist und da bei Festhaltung des Coordinatenanfangs die hindurchgehenden Linienelemente dreigliedrig transformirt werden, so muss G' in der Umgebung des Coordinatenanfangs drei unabhängige infinitesimale Transformationen von erster Ordnung in den x, y, z enthalten, dagegen keine Transformation von zweiter oder höherer Ordnung. Andrerseits kennen wir aber alle infinitesimalen Transformationen, die die Gleichung: $dz - y\,dx = 0$ invariant lassen und die in den x, y, z von erster Ordnung sind (s. Abschnitt II, S. 405), und wir erkennen sofort, dass es unter diesen Transformationen blos vier giebt, bei denen die beiden Linienelemente (7) invariant bleiben und aus denen sich keine Transformation von zweiter oder höherer Ordnung linear ableiten lässt, es sind das die vier:

$$yp - xq + \cdots, \quad xp + yq + 2zr + \cdots, \quad zp + \cdots, \quad zq + \cdots,$$

wo die weggelassenen Glieder in x, y, z von zweiter und höherer Ordnung sind. Bedenken wir, dass unsre Gruppe G' gerade drei unabhängige infinitesimale Transformationen von erster Ordnung enthält und dass diese kein reelles Linienelement durch den Coordinatenanfang in Ruhe lassen dürfen, so finden wir leicht, dass die infinitesimalen Transformationen von G', die den Coordinatenanfang in Ruhe lassen, die Form haben:

$$yp - xq + c(xp + yq + 2zr) + \cdots, \quad zp + \cdots, \quad zq + \cdots.$$

Ausserdem enthält G' natürlich als transitive Gruppe noch drei infinitesimale Transformationen nullter Ordnung von der Form:

$$(8) \qquad p + \cdots, \quad q + \cdots, \quad r + \cdots.$$

Die lineare homogene Gruppe, die G' dem Coordinatenanfang zuordnet (vgl. S. 503), hat offenbar die Form:

$$(9) \qquad y'p' - x'q' + c(x'p' + y'q' + 2z'r'), \quad z'p', \quad z'q'.$$

Nun aber sollen bei G' zwei endlich von einander entfernte Punkte eine Invariante haben, also muss nach S. 502 ff. die lineare homogene Gruppe (9) eine Invariante besitzen, was augenscheinlich nur eintritt, wenn c verschwindet, also ergiebt sich, dass G' ausser den Transformationen (8) noch drei von der Form:

$$(10) \qquad yp - xq + \cdots, \quad zp + \cdots, \quad zq + \cdots$$

enthält und dass jede infinitesimale Transformation von G' sich aus diesen sechs linear ableiten lässt.

Wir erinnern jetzt daran, dass die infinitesimalen Transformationen von G auch als infinitesimale Berührungstransformationen der Ebene x, z aufgefasst werden können und dass zu jeder dieser infinitesimalen

Berührungstransformationen eine charakteristische Function gehört, durch die sie vollständig bestimmt ist. Insbesondere lauten die charakteristischen Functionen der Transformationen (10) so:

$$x^2 + y^2 + \cdots, \quad yz + \beta_3(x, y) + \cdots, \quad xz + \alpha_3(x, y) + \cdots,$$

wo α_3 und β_3 gewisse ganze homogene Functionen dritten Grades von x und y sind und wo die weggelassenen Glieder jedesmal von höherer Stufe in x, y, z sind als die geschriebenen (s. Abschn. II, S. 526 u. S. 532 f.). Nun aber muss G' nothwendig auch die infinitesimale Transformation enthalten, deren charakteristische Function die Form:

$$(11) \quad \{yz + \beta_3 + \cdots, \; xz + \alpha_3 + \cdots\} = z^2 + \lambda_2(x, y)z + \lambda_4(x, y) + \cdots$$

besitzt, unter λ_2 und λ_4 ganze homogene Functionen zweiten und vierten Grades von x und y verstanden (a. a. O. S. 321 und S. 526 f.). Allein eine infinitesimale Transformation, deren charakteristische Function die Form (11) besitzt, wäre von zweiter Ordnung in x, y, z, während doch G' gar keine infinitesimalen Transformationen von zweiter Ordnung enthält. Wir kommen demnach zu dem Ergebniss, dass es gar keine sechsgliedrige Gruppe G' von der hier betrachteten Beschaffenheit giebt, dass also der zweite der auf S. 511 unterschiedenen beiden Fälle gar nicht eintreten kann.

Will man die Rechnung mit charakteristischen Functionen vermeiden, so kann man auch folgendermassen verfahren: G' lässt die Pfaffsche Gleichung: $dz - y\,dx = 0$ invariant und, wenn man einen reellen Punkt von allgemeiner Lage festhält, so bleiben in dem reellen Flächenelement, das die Gleichung: $dz - y\,dx = 0$ dem Punkte zuordnet, zwei conjugirt imaginäre Linienelemente in Ruhe. Hieraus folgt, dass G', aufgefasst als Berührungstransformationsgruppe der Ebene x, z, zwei conjugirt imaginäre gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung invariant lässt. Durch eine (imaginäre) Berührungstransformation der Ebene können wir daher erreichen, dass die Integralcurven der einen von diesen Differentialgleichungen in die Punkte der Ebene übergehen. Demnach können wir uns die Veränderlichen x, y, z von vornherein so gewählt denken, dass G' als Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene x, z aufgefasst, aus lauter erweiterten Punkttransformationen besteht und ausserdem noch eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung invariant lässt. Nun aber haben wir auf S. 76 gesehen, dass jede endliche continuirliche Gruppe von Punkttransformationen der Ebene, die eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung invariant lässt, durch Punkttransformation mit einer projectiven Gruppe der Ebene ähnlich ist. Folglich können wir annehmen, dass G', wenn es überhaupt existirt, durch Erweiterung einer sechsgliedrigen projectiven Gruppe der Ebene entstanden ist; dabei brauchen wir natürlich zwei projective Gruppen, die innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe mit einander gleichberechtigt oder zu einander dualistisch

sind, nicht als von einander verschieden zu betrachten, wir dürfen daher annehmen, dass G' aus der allgemeinen linearen Gruppe:

$$p,\ r,\ xp,\ zp,\ xr,\ zr$$

der Ebene durch Erweiterung entstanden ist und somit in den gewählten Veränderlichen x, y, z die Form:

$$p,\ r,\ xp - yq,\ zp - y^2 q,\ xr + q,\ zr + yq$$

besitzt. Aber von dieser Gruppe haben wir bereits auf S. 415 f. gezeigt, dass bei ihr zwei endlich von einander entfernte Punkte keine Invariante haben. Also ergiebt sich wieder, dass eine Gruppe G' von der hier verlangten Beschaffenheit gar nicht existirt.

Es bleibt noch der erste der beiden auf S. 511 unterschiedenen Fälle zu behandeln.

Tritt dieser Fall ein, so werden bei G die ∞^2 reellen Linienelemente durch jeden festgehaltenen reellen Punkt von allgemeiner Lage dreigliedrig transformirt und zwar derart, dass ein nicht ausgearteter Kegel zweiten Grades von Linienelementen invariant bleibt. G lässt demnach eine reelle Gleichung von der Form:

$$\sum_{\mu\nu}^{1,2,3} \alpha_{\mu\nu}(x_1, x_2, x_3)\, dx_\mu dx_\nu = 0$$

invariant, deren Determinante nicht verschwindet. Da nun unser G sechsgliedrig ist, so ergiebt sich aus Theorem 35, S. 391, dass es durch eine reelle Punkttransformation des R_3 überführbar ist entweder in die Gruppe der Euklidischen oder in eine der beiden Gruppen von Nichteuklidischen Bewegungen oder in eine der beiden Gruppen:

$$p_1,\ p_2,\ p_3,\quad x_1p_2 - x_2p_1,\quad x_2p_3 + x_3p_2,\quad x_3p_1 + x_1p_3;$$

$$p_1 + x_1U_1,\quad p_2 + x_2U_2,\quad p_3 - x_3U_3,$$
$$x_1p_2 - x_2p_1,\quad x_2p_3 + x_3p_2,\quad x_3p_1 + x_1p_3.$$

Allein die beiden letzten Gruppen erfüllen unser Axiom III nicht, denn bei beiden ist der Coordinatenanfang ein Punkt von allgemeiner Lage, und eine der Pseudokugeln, die den Coordinatenanfang zum Mittelpunkt haben, ist der Kegel:

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0;$$

diese Pseudokugel geht aber durch ihren Mittelpunkt, was eben durch das Axiom III ausgeschlossen ist.

Damit ist bewiesen, dass die Euklidischen und die Nichteuklidischen Bewegungen wirklich durch die auf S. 506 f. aufgestellten Axiome vollständig charakterisirt sind.

§ 103.

Wir werden jetzt zeigen, dass die Euklidischen und die Nicht-euklidischen Bewegungen des R_4 vollständig charakterisirt sind, wenn man die folgenden Axiome aufstellt:

I) *Der R_4 ist eine Zahlenmannigfaltigkeit.*

II) *Die Bewegungen des R_4 bilden eine reelle, continuirliche, von infinitesimalen Transformationen erzeugte Gruppe.*

III) *Hält man einen beliebigen reellen Punkt: $y_1^0 \ldots y_4^0$ von allgemeiner Lage fest, so befriedigen alle reellen Punkte: $x_1 \ldots x_4$, in die ein andrer reeller Punkt: $x_1^0 \ldots x_4^0$ dann noch übergehen kann, eine reelle Gleichung von der Form:*

$$W(y_1^0 \ldots y_4^0;\ x_1^0 \ldots x_4^0;\ x_1 \ldots x_4) = 0, \tag{12}$$

die für: $x_1 = y_1^0, \ldots, x_4 = y_4^0$ nicht erfüllt ist und die im Allgemeinen eine reelle durch den Punkt: $x_1^0 \ldots x_4^0$ gehende dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit darstellt.

IV) *Um den Punkt: $y_1^0 \ldots y_4^0$ herum lässt sich ein endlicher vierfach ausgedehnter Bereich derart abgränzen, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind: Hält man den Punkt: $y_1^0 \ldots y_4^0$ fest, so kann jeder andre reelle Punkt: $x_1^0 \ldots x_4^0$ des Bereichs noch continuirlich in alle reellen Punkte: $x_1 \ldots x_4$ übergehen, die der Gleichung (12) genügen. Hält man ausser dem Punkte: $y_1^0 \ldots y_4^0$ noch einen zweiten reellen Punkt: $z_1^0 \ldots z_4^0$ des Bereichs fest, so kann jeder andre reelle Punkt: $x_1^0 \ldots x_4^0$ des Bereichs noch continuirlich in alle reellen Punkte: $x_1 \ldots x_4$ des Bereichs übergehen, die den beiden Gleichungen: (12) und:*

$$W(z_1^0 \ldots z_4^0;\ x_1^0 \ldots x_4^0;\ x_1 \ldots x_4) = 0 \tag{13}$$

genügen. Dabei wird jedesmal vorausgesetzt, dass die beiden Punkte: $x_1^0 \ldots x_4^0$ und $x_1 \ldots x_4$ durch eine irreducible continuirliche Reihe von Punkten derselben Art mit einander verbunden sind.

Wir machen aber nochmals ausdrücklich darauf aufmerksam, dass diese Axiome möglicherweise noch gewisse überflüssige Bestandtheile enthalten, obwohl sie weniger verlangen als die Helmholtzschen. Herr v. Helmholtz verlangt nämlich ausserdem, dass wenn drei Punkte festgehalten werden, jeder vierte Punkt noch ganz frei beweglich sei, soweit es die Gleichungen erlauben, die ihn mit den festgehaltenen Punkten verknüpfen; hierzu kommt sogar noch sein Monodromieaxiom.

Es sei wieder G irgend eine Gruppe, die unsre Axiome erfüllt. Die durch den Punkt: $x_1^0 \ldots x_4^0$ gehende reelle Mannigfaltigkeit, die durch die Gleichung (12) definirt wird, nennen wir natürlich wieder

eine zu G gehörige Pseudokugel mit dem Mittelpunkte: $y_1^0 \ldots y_4^0$. Unser Axiom III sagt dann aus, dass die Pseudokugeln im Allgemeinen reelle dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten sind und dass eine Pseudokugel niemals durch ihren Mittelpunkt geht.

Genau wie im vorigen Paragraphen lässt sich jetzt beweisen, dass G transitiv ist und dass zwei endlich von einander entfernte Punkte: $x_1 \ldots x_4$ und: $y_1 \ldots y_4$ bei G eine und nur eine Invariante: $\Omega(x, y)$ haben. Daraus folgt dann sofort, dass die Gleichung (12) auf die Form:

$$(14) \qquad \Omega(x_1 \ldots x_4;\ y_1^0 \ldots y_4^0) = \Omega(x_1^0 \ldots x_4^0;\ y_1^0 \ldots y_4^0)$$

gebracht werden kann. Wir brauchen uns damit wohl nicht länger aufzuhalten.

Auch der Beweis, dass G *reell-primitiv* ist, gestaltet sich fast genau so wie in § 102. Unter den Pseudokugeln mit dem Mittelpunkte: $y_1^0 \ldots y_4^0$ giebt es nur eine discrete Anzahl von solchen, die nicht reelle Mannigfaltigkeiten von drei Dimensionen sind, sondern blos zweifach oder einfach ausgedehnt sind oder gar auf einen Punkt zusammenschrumpfen. Da überdies keine Pseudokugel durch ihren Mittelpunkt geht, so kann bei Festhaltung des Punktes: $y_1^0 \ldots y_4^0$ sicher keine durch diesen Punkt gehende reelle Punktmannigfaltigkeit in Ruhe bleiben. G muss also *reell-primitiv* sein.

Schliesslich kann man auch genau so wie in § 102 beweisen, dass G endlich und zwar höchstens zehngliedrig ist.

Sind nämlich $P_1 \ldots P_4$ und P fünf Punkte von allgemeiner gegenseitiger Lage, so können sich die vier durch P gehenden Pseudokugeln mit den Mittelpunkten $P_1 \ldots P_4$ nur in P schneiden; denn schnitten sie sich in einer durch P gehenden reellen Mannigfaltigkeit M, die nicht blos aus dem Punkte P bestände, so schnitten sich überhaupt alle durch P gehenden Pseudokugeln in M und infolgedessen bliebe bei Festhaltung von P zugleich auch M in Ruhe, was ausgeschlossen ist. Wenn wir nun die vier Punkte $P_1 \ldots P_4$ festhalten, so kann sich P offenbar nur noch auf dem Schnitte der durch P gehenden Pseudokugeln mit den Mittelpunkten $P_1 \ldots P_4$ bewegen und da dieser Schnitt blos aus dem Punkte P selbst besteht, so muss P in Ruhe bleiben, und weil P ein Punkt von allgemeiner Lage ist, zugleich überhaupt jeder Punkt des Raumes. Das Festhalten von $P_1 \ldots P_4$ erfordert unter den hier gemachten Voraussetzungen höchstens: $4+3+2+1=10$ Bedingungen, also ergiebt sich, dass G endlich und zwar *höchstens zehngliedrig* ist.

Wir wählen jetzt unter den Pseudokugeln mit dem Mittelpunkte P_1 irgend eine von allgemeiner Lage aus und nennen sie K_1. Ist P_2 irgend ein Punkt von K_1, so giebt es ∞^1 Pseudokugeln mit dem Mittelpunkte P_2, von denen aber keine mit K_1 zusammenfällt, denn eine Pseudokugel enthält ja niemals ihren Mittelpunkt.

Halten wir P_1 fest, so kann sich P_2 ganz frei auf der Pseudokugel K_1 bewegen, die unter den gemachten Voraussetzungen sicher eine dreifach ausgedehnte reelle Mannigfaltigkeit ist. Halten wir ausser P_1 auch noch P_2 fest, so kann sich jeder andre Punkt P_3 von K_1 nur auf der Mannigfaltigkeit M' bewegen, in der K_1 von der durch P_3 gehenden Pseudokugel mit dem Mittelpunkte P_2 geschnitten wird; auf dieser Mannigfaltigkeit aber kann er sich nach Axiom IV ganz frei bewegen. Wir können hinzufügen, dass M' unter den gemachten Voraussetzungen im Allgemeinen eine zweifach ausgedehnte reelle Mannigfaltigkeit ist.

Bestimmen wir die Punkte von K_1 durch drei Coordinaten: $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ und nennen wir die Coordinaten von P_2: $\mathfrak{y}_1^0, \mathfrak{y}_2^0, \mathfrak{y}_3^0$ und die von P_3: $\mathfrak{x}_1^0, \mathfrak{x}_2^0, \mathfrak{x}_3^0$, so können wir alles das auch so ausdrücken: Wird P_1 festgehalten, so werden die Punkte: $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ der Pseudokugel K_1 derart transformirt, dass nach Festhaltung eines reellen Punktes: $\mathfrak{y}_1^0, \mathfrak{y}_2^0, \mathfrak{y}_3^0$ von K_1 jeder andre reelle Punkt: $\mathfrak{x}_1^0, \mathfrak{x}_2^0, \mathfrak{x}_3^0$ von K_1 noch in alle reellen Punkte: $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ von K_1 übergehen kann, die einer Gleichung von der Form:

$$\mathfrak{W}(\mathfrak{y}_1^0, \mathfrak{y}_2^0, \mathfrak{y}_3^0;\ \mathfrak{x}_1^0, \mathfrak{x}_2^0, \mathfrak{x}_3^0;\ \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3) = 0$$

genügen; diese Gleichung bestimmt im Allgemeinen eine auf K_1 liegende zweifach ausgedehnte reelle Mannigfaltigkeit. Nun aber werden, wenn man P_1 festhält, die Punkte der dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit K_1 offenbar durch eine Gruppe G_1 transformirt; aus dem eben Gesagten geht überdies hervor, dass diese Gruppe alle im vorigen Paragraphen aufgestellten Axiome erfüllt, folglich können wir schliessen, dass G_1 sechsgliedrig ist und durch eine reelle Punkttransformation in den Veränderlichen: $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ entweder in die Gruppe der Euklidischen oder in eine der beiden Gruppen von Nichteuklidischen Bewegungen des R_3 übergeführt werden kann. Andrerseits sahen wir oben, dass G transitiv und höchstens zehngliedrig ist, die Untergruppe von G, bei der P_1 invariant bleibt, hat daher sicher nicht mehr als sechs Parameter. Demnach ergiebt sich, dass G gerade zehn Parameter hat, und dass bei Festhaltung von P_1 die Punkte des R_4 durch eine sechsgliedrige Gruppe transformirt werden; zugleich werden die Punkte jeder allgemein gelegenen Pseudokugel mit dem Mittelpunkte

P_1 durch eine sechsgliedrige holoedrisch isomorphe Gruppe transformirt, die durch eine reelle Punkttransformation des R_3 entweder mit der Gruppe der Euklidischen oder mit einer der beiden Gruppen von Nichteuklidischen Bewegungen ähnlich ist.

Halten wir P_1 und P_2 fest, so werden die Punkte von K_1 noch dreigliedrig transformirt und ebenso die Punkte jeder andern allgemein gelegenen Pseudokugel mit dem Mittelpunkte P_1. Die betreffenden dreigliedrigen reellen Gruppen sind natürlich mit einander holoedrisch isomorph. Aber wenn eine dreigliedrige reelle Untergruppe der Euklidischen oder der Nichteuklidischen Bewegungen des R_3 holoedrisch isomorph ist mit der dreigliedrigen Untergruppe, die einen reellen Punkt invariant lässt, so ist sie offenbar selbst die dreigliedrige Untergruppe, bei der ein gewisser reeller Punkt invariant bleibt (vgl. S. 385 und Kap. 10). Demnach muss, wenn P_1 und P_2 festgehalten werden, überhaupt auf jeder allgemein gelegenen Pseudokugel mit dem Mittelpunkte P_1 ein reeller Punkt in Ruhe bleiben, und zwar müssen die betreffenden Punkte augenscheinlich eine continuirliche Curve bilden, die durch P_2 geht. Die Symmetrie zeigt, dass bei Festhaltung von P_1 und P_2 zugleich auch durch P_1 eine continuirliche Curve geht, deren Punkte sämmtlich in Ruhe bleiben.

Wenn wir also P_1 und P_2 festhalten, so geht durch P_1 und durch P_2 je eine continuirliche reelle Curve, deren Punkte in Ruhe bleiben. Es ist denkbar, dass diese beiden Curven zusammenfallen, es ist aber auch denkbar, dass sie von einander verschieden sind. Wir wollen dahingestellt sein lassen, ob der zweite Fall wirklich eintreten kann. Um uns aber bequem ausdrücken zu können, wollen wir den Inbegriff der beiden Curven als eine *Pseudogerade* bezeichnen. Dann können wir sagen: Durch je zwei Punkte P_1 und P_2 des R_4 ist eine Pseudogerade bestimmt, die durch P_1 und P_2 geht; hält man P_1 und P_2 fest, so bleiben die Punkte dieser Pseudogeraden sämmtlich in Ruhe.

Es ist klar, dass jeder Punkt der Pseudokugel K_1 eine durch P_1 gehende Pseudogerade bestimmt und dass die so bestimmten Pseudogeraden überhaupt alle durch P_1 gehenden Pseudogeraden sind; denn halten wir mit P_1 zugleich einen nicht auf K_1 liegenden Punkt P von allgemeiner Lage fest, so bleibt auch auf K_1 ein Punkt P' in Ruhe und die durch P_1 und P bestimmte Pseudogerade fällt daher mit der durch P_1 und P' bestimmten zusammen. Durch den Punkt P_1 sind demnach im Ganzen genau ∞^3 verschiedene Pseudogerade bestimmt, da aber jede dieser Pseudogeraden möglicherweise aus zwei Curven besteht, von denen blos die eine durch P_1 selbst geht, so ist es von

vornherein nicht sicher, dass die Schaar der durch P_1 gehenden Curven, die durch diese ∞^3 Pseudogeraden bestimmt wird, aus ∞^3 verschiedenen Curven besteht.

Da durch P_1 ∞^3 verschiedene Pseudogerade bestimmt sind und andrerseits auch ∞^3 verschiedene reelle Linienelemente, so wird es unter diesen Linienelementen eine gewisse Anzahl, nämlich ∞^m $(0 \leqq m \leqq 3)$ verschiedene geben, die so beschaffen sind, dass durch jedes von ihnen gewisse jener Pseudogeraden gehen, während durch keines der übrigen Linienelemente eine solche Pseudogerade geht. Wir werden zeigen, dass die betreffende Zahl m gleich drei ist.

In der That, wenn P_1 festgehalten wird, so werden die durch P_1 bestimmten Pseudogeraden unter einander vertauscht, es bleibt also die vorhin definirte Mannigfaltigkeit von ∞^m Linienelementen in Ruhe. Da überdies jedem Punkte der Pseudokugel K_1 eine der Pseudogeraden durch P_1 zugeordnet ist und da nach Festhaltung von P_1 jeder Punkt von K_1 noch in jeden andern übergehen kann, so muss nach Festhaltung von P_1 auch jede der durch P_1 bestimmten Pseudogeraden in jede andre übergehen können und demnach auch jedes jener ∞^m Linienelemente in jedes andre. Hieraus folgt, dass durch jedes dieser ∞^m Linienelemente ∞^{3-m} verschiedene Pseudogerade hindurchgehen und dass die Pseudokugel K_1 derart in ∞^m $(3-m)$-fach ausgedehnte reelle Mannigfaltigkeiten zerfällt, dass jedem unsrer ∞^m Linienelemente eine dieser Mannigfaltigkeiten zugeordnet ist; bei Festhaltung von P_1 werden natürlich diese ∞^m $(3-m)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten von K_1 unter einander vertauscht. Wäre nun $m = 1$ oder $= 2$, so würden bei Festhaltung von P_1 die Punkte von K_1 reell-imprimitiv transformirt, was offenbar nicht der Fall ist. Wäre andrerseits $m = 0$, so bliebe mit P_1 zugleich eine discrete Anzahl von hindurchgehenden reellen Linienelementen in Ruhe und unsre zehngliedrige Gruppe G wäre also reell-imprimitiv, während sie doch reell-primitiv sein muss.

Demnach ist wirklich die oben definirte Zahl $m = 3$ und es geht in Folge dessen im Allgemeinen durch jedes reelle Linienelement von P_1 eine Pseudogerade.

Hiermit ist bewiesen, dass zwischen den ∞^3 reellen Linienelementen von P_1 und den ∞^3 reellen Punkten der Pseudokugel K_1 eine Beziehung besteht, die jedenfalls innerhalb gewisser Bereiche eindeutig umkehrbar ist und die bei allen Transformationen von G, welche den Punkt P_1 invariant lassen, erhalten bleibt. Erinnern wir uns daher, dass bei Festhaltung von P_1 die ∞^3 hindurchgehenden Linienelemente durch eine reelle projective Gruppe $\mathfrak{g}$ transformirt werden, so erkennen wir sofort, dass diese Gruppe $\mathfrak{g}$ mit der Gruppe G_1 ähnlich ist, durch

welche gleichzeitig die Punkte von K_1 transformirt werden, und zwar ähnlich durch eine reelle Punkttransformation des R_3. Aber G_1 war seinerseits durch eine reelle Punkttransformation des R_3 ähnlich entweder mit der Gruppe der Euklidischen oder mit einer der beiden Gruppen von Nichteuklidischen Bewegungen dieses Raumes, also ergiebt sich mit Berücksichtigung von Theor. 19, S. 292, dass $\mathfrak{g}$ sechsgliedrig ist und durch eine reelle projective Transformation des R_3 in eine der drei genannten Gruppen von Bewegungen übergeführt werden kann.

Also unsre zehngliedrige Gruppe G ist so beschaffen, dass bei Festhaltung eines reellen Punktes von allgemeiner Lage die ∞^3 hindurchgehenden reellen Linienelemente sechsgliedrig und zwar entweder Euklidisch oder Nichteuklidisch transformirt werden.

Werden die bewussten Linienelemente Euklidisch transformirt, so bleibt mit jedem reellen Punkte von allgemeiner Lage zugleich ein hindurchgehendes reelles Bündel von ∞^2 Linienelementen invariant, G lässt also eine reelle Pfaffsche Gleichung:

$$\sum_1^4{}_\nu \alpha_\nu (x_1 \ldots x_4)\, dx_\nu = 0 \tag{15}$$

invariant, die natürlich nicht integrabel sein darf, weil sonst G reell-imprimitiv wäre. Nun aber ist aus der Theorie des Pfaffschen Problems bekannt, dass mit jeder nicht integrabeln Pfaffschen Gleichung in vier Veränderlichen ein simultanes System invariant verknüpft ist. Dieses simultane System, das für die reelle Gleichung (15) ebenfalls reell wird, müsste natürlich bei G invariant bleiben, also wäre G auch in diesem Falle reell-imprimitiv, also kommt der Fall, dass die ∞^3 Linienelemente durch einen festgehaltenen reellen Punkt Euklidisch transformirt werden, überhaupt nicht in Betracht.

Werden andrerseits die bewussten Linienelemente Nichteuklidisch transformirt, so ist mit jedem reellen Punkte von allgemeiner Lage ein imaginärer oder reeller Kegel zweiten Grades von Linienelementen verknüpft, der bei geeigneter Wahl der Veränderlichen entweder die Form:

$$dx_1^2 + \cdots + dx_4^2 = 0 \tag{16}$$

oder die Form:

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2 = 0 \tag{17}$$

erhält. Da nun G zehngliedrig ist und die Linienelemente durch jeden festgehaltenen reellen Punkt sechsgliedrig transformirt, so ergiebt sich aus den Entwicklungen auf S. 385 ff., dass G durch eine reelle Punkttransformation des R_4 entweder in die Gruppe der Euklidischen oder

in eine der beiden Gruppen von Nichteuklidischen Bewegungen des R_4 übergeführt werden kann — diese Fälle sind möglich, wenn die Form (16) auftritt — oder dass es durch eine reelle Punkttransformation des R_4 ähnlich ist entweder mit der projectiven Gruppe einer der beiden Mannigfaltigkeiten:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = \pm 1$$

oder mit der Gruppe:

$$p_1 \dots p_4, \quad x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \quad x_\mu p_4 + x_4 p_\mu \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3)$$

— diese Fälle entsprechen der Form (17).

Aber die drei letzten Gruppen kommen hier gar nicht in Betracht, denn bei jeder von ihnen giebt es augenscheinlich unter den Pseudokugeln mit gegebenem Mittelpunkt immer eine, die durch ihren Mittelpunkt geht. *Demnach bleiben nur die Euklidischen und die Nichteuklidischen Bewegungen übrig und es ist somit bewiesen, dass diese drei Schaaren von Bewegungen des R_4 durch die auf S. 515 angegebenen Axiome vollständig charakterisirt sind.*

Nunmehr wollen wir noch andeuten, wie sich diese Betrachtungen für Räume von mehr als vier Dimensionen gestalten.

Im R_n $(n > 2)$ verlangen wir ebenfalls, dass der Raum eine Zahlenmannigfaltigkeit sei und dass die Bewegungen eine continuirliche, von infinitesimalen Transformationen erzeugte Gruppe bilden. Wird ein reeller Punkt: $y_1^0 \dots y_n^0$ von allgemeiner Lage festgehalten, so soll jeder andre reelle Punkt: $x_1^0 \dots x_n^0$ nur noch in solche reelle Punkte: $x_1 \dots x_n$ übergehen, die einer gewissen Gleichung:

$$W(y_1^0 \dots y_n^0;\ x_1^0 \dots x_n^0;\ x_1 \dots x_n) = 0$$

genügen. Dabei setzen wir voraus, dass diese Gleichung im Allgemeinen eine $(n-1)$-fach ausgedehnte reelle Mannigfaltigkeit darstellt und dass sie für: $x_1 = y_1^0, \dots, x_n = y_n^0$ nicht erfüllt ist.

Die durch den Punkt: $x_1^0 \dots x_n^0$ gehende reelle Mannigfaltigkeit, die durch die Gleichung: $W = 0$ bestimmt ist, bezeichnen wir natürlich als eine Pseudokugel mit dem Mittelpunkte: $y_1^0 \dots y_n^0$. Unsre letzte Forderung sagt dann offenbar aus, dass eine Pseudokugel niemals durch ihren Mittelpunkt gehen darf.

Schliesslich verlangen wir noch, dass in dem R_n ein endlicher n-fach ausgedehnter Bereich abgegränzt werden kann, innerhalb dessen die folgenden Forderungen erfüllt sind: Hält man einen Punkt P_1 des Bereichs fest, so soll jeder andre Punkt des Bereichs sich innerhalb des Bereichs ganz frei auf der durch ihn gehenden Pseudokugel mit

dem Mittelpunkte P_1 bewegen können. Hält man q Punkte $P_1 \ldots P_q$ des Bereichs fest, die von allgemeiner gegenseitiger Lage sind, so soll stets, wenn $q < n - 1$ ist, jeder andre dem Bereiche angehörige Punkt P von allgemeiner Lage sich ganz frei auf der Mannigfaltigkeit bewegen können, in der sich die q durch P gehenden Pseudokugeln mit den Mittelpunkten $P_1 \ldots P_q$ schneiden.

Wir behaupten, dass diese Forderungen zur Charakterisirung der Euklidischen und der Nichteuklidischen Bewegungen ausreichen. Den Beweis für diese Behauptung wollen wir aber nur andeuten.

Wir nehmen an, dass unsre Behauptung für den Raum von $n-1$ Dimensionen schon bewiesen ist und zeigen auf Grund dieser Voraussetzung, dass unsre Behauptung auch für den Raum von n Dimensionen richtig ist. Da wir sie in den Fällen $n = 3$ und $n = 4$ schon bewiesen haben, ist damit ihre Allgemeingültigkeit dargethan.

Um aber zu beweisen, dass unsre Behauptung im R_n richtig ist, sobald sie es im R_{n-1} ist, verfahren wir wie im Fall $n = 4$. Wir zeigen, dass jede Gruppe G, die unsre Axiome erfüllt, transitiv ist und dass bei ihr zwei endlich von einander entfernte Punkte eine und nur eine Invariante haben, ferner dass sie reell-primitiv und endlich ist und höchstens $\frac{1}{2}n(n+1)$ Parameter enthält. Halten wir nunmehr einen reellen Punkt P_1 von allgemeiner Lage fest, so ergiebt sich leicht, dass die Punkte jeder allgemein gelegenen Pseudokugel mit dem Mittelpunkte P_1 durch eine Gruppe transformirt werden, die alle für den R_{n-1} aufgestellten Axiome erfüllt, die also unter der gemachten Voraussetzung durch eine reelle Punkttransformation des R_{n-1} entweder in die Gruppe der Euklidischen oder in eine der beiden Gruppen von Nichteuklidischen Bewegungen dieses Raumes übergeführt werden kann.

Hieraus folgt zunächst, dass G gerade $\frac{1}{2}n(n+1)$ Parameter enthält. Ferner lässt sich genau wie im Falle: $n = 4$ beweisen, dass je zwei Punkte des R_n eine Pseudogerade bestimmen. Man muss sich dabei auf die Untersuchungen des Herrn Werner stützen, der auf Lies Veranlassung die grössten Untergruppen bestimmt hat, die in der projectiven Gruppe einer nicht ausgearteten Mannigfaltigkeit zweiten Grades des Raumes von $n > 5$ Dimensionen enthalten sind*).

Nachdem die Existenz von Pseudogeraden erkannt ist, zeigt man, wiederum genau wie im Falle: $n = 4$, dass bei G die ∞^{n-1} reellen Linienelemente durch jeden festgehaltenen reellen Punkt von allgemeiner Lage entweder Euklidisch oder Nichteuklidisch transformirt werden.

*) Math. Ann. Bd. 35, S. 161 ff.

Schliesslich beweist man leicht, dass sie sicher nicht Euklidisch transformirt werden können, und durch Betrachtung der übrigen Fälle ergiebt sich, dass G durch eine reelle Punkttransformation des R_n entweder in die Gruppe der Euklidischen oder in eine der beiden Gruppen von Nichteuklidischen Bewegungen des R_n übergeführt werden kann.

Wir wollen das gegenwärtige Kapitel damit beschliessen, dass wir ein kleines Versehen berichtigen, das sich auf S. 446 ff. eingeschlichen hat. Dort wird nämlich gesagt, dass das dritte Axiom des Herrn v. Helmholtz aus zwei Theilen bestehe, von denen der zweite gewisse Forderungen enthalte, die aus den im ersten Theile gestellten Forderungen nicht folgen, obwohl er seiner Fassung nach blos Folgerungen aus dem ersten Theile zu enthalten scheine.

In der That verhält es sich aber doch etwas anders. *Wenn man nämlich den damals sogenannten ersten Theil des Helmholtzschen Axioms so versteht*, dass, wenn ein Punkt P_1 festgehalten wird, jeder andre Punkt sich ganz frei auf der durch ihn gehenden Pseudokugel mit dem Mittelpunkte P_1 bewegen können soll, und wenn man daraus den Schluss zieht, dass eine Pseudokugel niemals durch ihren Mittelpunkt gehen darf, so enthält allerdings der von uns sogenannte zweite Theil des dritten Helmholtzschen Axioms nichts, was nicht schon aus dem ersten Theile folgt; das zeigen ähnliche Ueberlegungen wie die, die wir in dem gegenwärtigen Kapitel benutzt haben, um z. B. im R_3 zu beweisen, dass drei Pseudokugeln, deren Mittelpunkte von allgemeiner gegenseitiger Lage sind, sich im Allgemeinen nur in einem Punkte schneiden. Da wir nun im Verlaufe unsrer Untersuchung über die Helmholtzschen Axiome es immer so aufgefasst haben, dass eine Pseudokugel nicht durch ihren Mittelpunkt gehen darf (vgl. S. 465 f.), so ist unsre auf S. 446 f. aufgestellte Eintheilung des Helmholtzschen dritten Axioms in zwei Theile unrichtig. Freilich bleibt immer noch die Thatsache bestehen, dass Herr v. Helmholtz die Folgerungen, die er aus seinem dritten Axiome zieht, hinstellt, ohne sie zu begründen, obwohl ihre Begründung gar nicht so einfach ist.

Kapitel 24.

Kritik einiger neuerer Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie.

Auf die Untersuchungen Riemanns und des Herrn v. Helmholtz sind eine grosse Anzahl von Arbeiten über die Grundlagen der Geometrie gefolgt, die zum grössten Theile durch jene Untersuchungen veranlasst worden sind. Wir können hier nur auf einige von diesen Rücksicht nehmen und zwar natürlich nur auf solche, die directe Berührungspunkte mit der Gruppentheorie darbieten. Daher beschränken wir uns auf die *metrische* Geometrie, die Untersuchungen über die Grundlagen der *projectiven* Geometrie lassen wir bei Seite*).

Wir wenden uns zuerst zur Arbeit des Herrn de Tilly: Sur les principes fondamentaux de la géométrie et de la mécanique**), sodann gehen wir kurz auf gewisse Bemerkungen ein, die von den Herren F. Klein und Lindemann gemacht worden sind***), endlich besprechen wir zwei Arbeiten des Herrn Killing.

§ 104.

Herr de Tilly macht den Versuch, die Geometrie des dreifach ausgedehnten Raumes zu begründen und solche Axiome aufzustellen, die entweder auf die Euklidische Geometrie oder auf eine der beiden Nichteuklidischen führen.

Er definirt zunächst die Fläche als Gränze zweier Raumtheile, die Curve als Gränze zweier Flächentheile, den Punkt als Gränze zweier Curventheile.

---

*) Dass man mit Hülfe der Gruppentheorie auch über die Grundlagen der projectiven Geometrie gewisse Aufschlüsse gewinnen können muss, liegt auf der Hand; einen wichtigen Beitrag dazu haben wir bereits in Kap. 16 geliefert. Dort haben wir ja gezeigt, dass die allgemeine projective Gruppe des R_n und die mit ihr ähnlichen Gruppen die einzigen endlichen continuirlichen Gruppen von Punkttransformationen des R_n sind, bei denen erst $n+3$ verschiedene Punkte eine Invariante haben. Hieraus folgt, dass zum Aufbau der projectiven Geometrie einer n-fach ausgedehnten Zahlenmannigfaltigkeit nur ein Axiom erforderlich ist, nämlich dieses: Es giebt in der betreffenden Mannigfaltigkeit eine endliche continuirliche Gruppe von Punkttransformationen, bei der $n+2$ Punkte keine Invariante haben.

**) Mémoires de la société des sciences phys. et nat. de Bordeaux, II. Série, Tome 3 (Jahrgang 1878—79).

***) Die folgenden Bemerkungen über die Herren: de Tilly, F. Klein und Lindemann finden sich zum Theil schon in einer Note von Lie (Leipziger Berichte 1892, S. 106 ff.).

Sodann führt er den Begriff Entfernung zweier Punkte ein. Er versteht darunter vorläufig nur eine Grösse, die durch die beiden Punkte bestimmt ist; um aber den Begriff genauer festzustellen, denkt er sich zwei Punkte A und B durch irgend eine Curve verbunden und lässt einen Punkt P diese Curve in der Richtung von B nach A durchlaufen: er verlangt, *dass sich die Entfernung AP dabei continuirlich ändere, immer positiv bleibe und schliesslich gegen Null convergire.*

Ausser dieser Voraussetzung macht Herr de Tilly nur noch die folgende: *Wenn ein System von beliebig vielen Punkten: A, B, C, D... gegeben ist und wenn der Punkt B' so beschaffen ist, dass die beiden Entfernungen AB' und AB einander gleich sind, so soll es stets auch solche Punkte: C', D'... geben, dass die Gleichungen:*

$$AC = AC', \quad AD = AD', \ldots$$
$$BC = B'C', \quad BD = B'D', \ldots$$
$$CD = C'D', \ldots$$

erfüllt sind.

Auf Grund dieser wenigen Voraussetzungen glaubt Herr de Tilly beweisen zu können, dass entweder die Euklidische Geometrie gilt oder eine der beiden Nichteuklidischen.

Man kann gegen die de Tillyschen Voraussetzungen sofort einwenden, dass es keinen Sinn hat, von einer *continuirlichen* Aenderung der Entfernung zu reden, so lange man noch gar nicht weiss, dass die Punkte des R_3 durch Coordinaten bestimmbar sind. Wüsste man das, so wäre unmittelbar klar, dass die Entfernung zweier Punkte A und B eine Function der Coordinaten von A und B ist, und es wäre ganz berechtigt, zu verlangen, dass sich die Entfernung AP continuirlich ändere, wenn P eine zwischen A und B gedachte Curve durchläuft. So aber, wo man über die Bestimmbarkeit der Punkte durch Coordinaten noch gar nichts weiss, ist es offenbar unerlaubt, von einer continuirlichen Aenderung der Entfernung zu sprechen.

Dieser Einwand wird auch dadurch nicht hinfällig, dass Herr de Tilly an einer andern Stelle ohne Benutzung des Begriffs der Entfernung beweist oder vielmehr zu beweisen versucht, dass die Punkte des R_3 durch Coordinaten bestimmbar sind. Denn selbst wenn der de Tillysche Beweis hierfür unanfechtbar wäre, so würde doch die Nothwendigkeit bestehen bleiben, in dem Axiome über die Entfernung ausdrücklich hervorzuheben, dass die Punkte durch Coordinaten bestimmt gedacht werden, es würde also auch dann noch die *Fassung* des de Tillyschen Axioms ungenügend sein.

Nun aber ist Herrn de Tillys Beweis für die Bestimmbarkeit der Punkte durch Coordinaten alles andre als unanfechtbar. Denn dieser Beweis stützt sich nicht blos auf den Begriff: geschlossene Fläche, der auf dem de Tillyschen Standpunkte kaum definirbar ist, sondern auch auf allerhand andre Betrachtungen von zweifelhafter Beschaffenheit. Ueberhaupt ist es ja von vornherein ganz aussichtslos, beweisen zu wollen, dass jeder Punkt des R_3 durch drei Coordinaten bestimmbar ist, solange man nur die Begriffe: Fläche, Curve und Punkt hat; macht sich doch jetzt immer mehr und mehr die Auffassung geltend, dass die Einführung des Coordinatenbegriffs in die Geometrie auf einem besonderen Axiome beruht. Wie freilich dieses Axiom zu fassen ist, darüber dürften noch verschiedene Meinungen möglich sein.

Hieraus folgt, dass das Axiom des Herrn de Tilly über die Entfernung vollständig in der Luft schwebt und dass es so, wie es vorliegt, ganz und gar ungeeignet ist, um darauf Schlüsse zu bauen. Die Betrachtungen, die Herr de Tilly an sein Axiom knüpft, können infolgedessen auch keine Beweiskraft haben, obwohl sie in mancher Beziehung nicht ohne Interesse sind.

Etwas andres ist es, wenn man Herrn de Tillys Voraussetzungen dadurch vervollständigt, dass man von vornherein das Axiom aufstellt: *Der R_3 ist eine Zahlenmannigfaltigkeit.* Thut man das, so kann man der Definition, die Herr de Tilly von der Entfernung giebt, eine vollständig befriedigende Fassung geben. Fügt man überdies noch die Annahme hinzu, dass die Bewegungen des R_3 eine continuirliche Gruppe bilden, deren Gleichungen gewisse Differentialquotienten besitzen, so lässt sich sogar zeigen, dass die Voraussetzungen des Herrn de Tilly, wenn sie in dieser Weise vervollständigt werden, ausreichend sind, um die Euklidischen und die Nichteuklidischen Bewegungen des R_3 zu charakterisiren.

In der That, unter den gemachten Annahmen zeigen die de Tillyschen Voraussetzungen, dass nach Festhaltung eines reellen Punktes P des R_3 jeder andre reelle Punkt dieses Raumes sich ganz frei auf einer reellen Fläche bewegen kann, die niemals durch P hindurchgeht. Hieraus aber folgt nach den Entwicklungen des vorigen Kapitels sofort, dass die Gruppe der Bewegungen des R_3 durch eine reelle Punkttransformation entweder in die Gruppe der Euklidischen oder in eine der beiden Gruppen von Nichteuklidischen Bewegungen übergeführt werden kann.

Wir sehen hieraus, dass es möglich ist, die Voraussetzungen des

Herrn de Tilly so zu vervollständigen, dass sie zur Charakterisirung der Euklidischen und der Nichteuklidischen Bewegungen des R_3 hinreichen. Soviel wir daher auch gegen Herrn de Tillys ganze Untersuchungen einzuwenden haben, so glauben wir doch gern, dass sein Werk Beachtung verdient.

Herr Killing kommt zweimal auf die de Tillysche Arbeit zu sprechen, zuerst in seinem Braunsberger Programm von 1884 „Erweiterung des Raumbegriffs“ und dann in Bd. 35 der Math. Annalen, auf S. 430.

An der ersten Stelle drückt sich Herr Killing sehr unklar aus, so dass es uns nicht gelungen ist, den wahren Sinn seiner kritischen Bemerkungen zu verstehen. An der zweiten Stelle dagegen thut er Herrn de Tilly Unrecht; dort behauptet er nämlich, dass die Voraussetzungen des Herrn de Tilly darauf hinauskämen, dass bei der Gruppe der Bewegungen des R_3 zwei Punkte eine und nur eine und mehr als zwei Punkte keine wesentliche Invariante haben sollten. Diese Behauptung ist nicht richtig. Allerdings folgt aus Herrn de Tillys Voraussetzungen, wenn man sie in der früher angegebenen Weise vervollständigt, dass die Gruppe der Bewegungen die betreffenden Eigenschaften hat; aber Herr de Tilly verlangt ausserdem noch, dass nach Festhaltung eines Punktes P jeder andre Punkt sich ganz frei auf einer nicht durch P gehenden Fläche bewege und durch diese Forderung werden eben die Gruppen ausgeschlossen, die nicht in die Gruppe der Euklidischen oder in eine der beiden Gruppen von Nichteuklidischen Bewegungen übergeführt werden können.

Auch Herr Veronese erwähnt in seinem Werke: *Fondamenti di geometria* die Arbeit des Herrn de Tilly, aber auch nicht in ganz zutreffender Weise. Er sagt nämlich unter Anderm, bereits Herr de Tilly habe behauptet, dass das Helmholtzsche Monodromieaxiom überflüssig sei. Nun benutzt allerdings Herr de Tilly das Monodromieaxiom nicht, denn er verlangt von vornherein nicht einmal, dass nach Festhaltung von zwei Punkten noch continuirliche Bewegung möglich sei, vielmehr versucht er dies auf Grund seiner Voraussetzungen zu beweisen und überdies zu zeigen, dass nach Festhaltung zweier Punkte alle andern Punkte geschlossene Bahncurven beschreiben und schliesslich gleichzeitig in ihre Anfangslagen zurückkommen. Dagegen behauptet Herr de Tilly keineswegs, dass das Helmholtzsche Monodromieaxiom aus den übrigen Axiomen des Herrn v. Helmholtz folge, auch können seine Betrachtungen, selbst wenn sie stich-

haltig wären, nicht als Beweis für eine derartige Behauptung gelten, denn Herr de Tilly macht über die Abstandsfunction Voraussetzungen, die bei Herrn v. Helmholtz nicht vorkommen, überhaupt *hat er ja alle Helmholtzschen Axiome durch andre ersetzt.*

§ 105.

In einer Abhandlung aus dem Jahre 1890 in Bd. 37 der Math. Ann. kommt Herr F. Klein auch auf das Helmholtzsche Monodromieaxiom zu sprechen (a. a. O. S. 564 f.).

Herr Klein erhebt dort den Anspruch, die Ueberflüssigkeit eines Theils des Helmholtzschen Monodromieaxioms durch eine einfache Ueberlegung ohne alle Rechnung dargethan zu haben, während nach seiner Ansicht Lie eines ausführlichen Beweises bedarf, um zu demselben Ergebnisse zu gelangen*). Herr Veronese, der in seinem schon erwähnten Buche: Fondamenti di geometria die wichtigsten Ergebnisse, zu denen Lie bei seinen Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie gelangt ist, ganz richtig wiedergiebt, bestätigt diese Kleinsche Auffassung und behauptet sogar, Herr Klein habe einen viel einfacheren Beweis für die Ueberflüssigkeit des genannten Axioms in seiner ganzen Ausdehnung geliefert.

Sehen wir uns nun die Kleinschen Betrachtungen näher an, so bemerken wir sofort, dass Herr Klein in Wirklichkeit für das von Lie gewonnene Ergebniss überhaupt gar keinen Beweis liefert, geschweige denn einen viel einfacheren als Lie. Herr Klein stellt sich nämlich gar nicht auf den Helmholtzschen Standpunkt, er geht gar nicht von den drei ersten Helmholtzschen Axiomen aus und versucht zu beweisen, dass aus diesen ein Theil des Monodromieaxioms folgt, sondern er wendet Ueberlegungen an, deren Anwendbarkeit erst aus den Helmholtzschen Axiomen bewiesen werden müsste, bei ihm aber auch nicht mit einem Worte bewiesen wird.

In der That, Herr Klein spricht von Drehungen um eine Axe und sein Verfahren besteht darin, dass er sich die Axe um einen

---

*) Herr Klein führt hier die Liesche Note an: Bemerkungen zu v. Helmholtz's Arbeit über die Thatsachen, welche der Geometrie zu Grunde liegen (Leipz. Ber. 1886). In dieser Note theilt jedoch Lie blos Resultate mit, ohne die Beweise auszuführen. Den ausführlichen Beweis für die Ueberflüssigkeit des *wirklichen* Monodromieaxioms veröffentlichte Lie erst 1890 in den Leipziger Berichten, die betreffende Abhandlung lag aber Herrn Klein noch nicht vor, als er seine Arbeit schrieb.

ihrer Punkte soweit gedreht denkt, bis sie in umgekehrter Richtung in ihre ursprüngliche Lage fällt. Nun aber kann man, wenn man blos die Helmholtzschen Axiome voraussetzt, unter Drehungen um eine Axe nur die Bewegungen verstehen, die nach Festhaltung zweier Punkte P_1 und P_2 noch möglich sind; ob bei diesen Bewegungen ausser P_1 und P_2 noch andre Punkte in Ruhe bleiben, darüber weiss man vorläufig noch gar nichts, unter der Axe der betreffenden Drehungen könnte man daher nur den Inbegriff der beiden Punkte: P_1 und P_2 verstehen. Dass man aber auf eine solche Axe die Kleinschen Betrachtungen nicht anwenden kann, liegt, wie uns scheint, auf der Hand.

Es ist überhaupt sicher, dass man, um zu beweisen, dass das Monodromieaxiom aus den übrigen Axiomen des Herrn v. Helmholtz folgt, ganz andre Hülfsmittel anwenden muss, als die Herren v. Helmholtz und Klein benutzt haben. Dass die Gruppentheorie zur Erledigung der Frage führt, haben wir gesehen.

Herr Lindemann erwähnt in seinen Vorlesungen*) über Geometrie ebenfalls die aus dem Jahre 1886 stammende Liesche Note, es sind ihm aber dabei eine Reihe Missverständnisse untergelaufen, nicht blos gegenüber Lie selbst, sondern auch Herrn v. Helmholtz gegenüber.

Wenn Herr Lindemann anführt, dass Herr v. Helmholtz sich ebenso wie er auf projective Gruppen beschränke, so thut er Herrn v. Helmholtz Unrecht. In seiner Abhandlung in den Göttinger Nachrichten von 1868 denkt Herr v. Helmholtz gar nicht daran, zu verlangen, dass bei den Bewegungen jede Gerade wieder in eine Gerade übergehe, in seinen Axiomen kommt ja weder das Wort Gerade noch ein Begriff dieser Art vor. Andrerseits bezeichnet Herr v. Helmholtz in seinen populären Vorträgen allerdings die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten als eine *Geradeste, aber er braucht diese Benennung eben im Gegensatze zu dem Worte Gerade.*

Ferner irrt sich Herr Lindemann, wenn er behauptet, unter diesen Umständen werde Lies Bedenken hinfällig, dass es nicht ohne Weiteres erlaubt sei, die unendlich kleinen Bewegungen durch lineare Functionen darzustellen. Denn selbst wenn Herr v. Helmholtz blos projective Transformationen in Betracht zöge, was er aber, wie gesagt, nicht thut, selbst wenn das der Fall wäre, so wäre es doch nicht von vornherein erlaubt anzunehmen, dass unter den infinitesimalen Transformationen, die den Punkt: $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ invariant lassen,

*) s. Bd. II, Thl. 1, S. 546 Anm.

keine auftrete, die blos Glieder von zweiter Ordnung in: $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ enthielte. Eine andre Sache ist es, dass in Folge der Fehler, die Herr v. Helmholtz begangen hat, seine Resultate eigentlich nur für *lineare*, also nicht einmal für projective Gruppen bewiesen sind.

Ein Missverständniss ist es endlich, wenn Herr Lindemann angiebt, Lie halte es für wahrscheinlich, dass die Forderung, der Kreis solle eine geschlossene Linie sein, sich aus den übrigen Helmholtzschen Axiomen als Folgerung ergebe, und wenn er hinzufügt, dass diese Vermuthung für die parabolische Geometrie unzutreffend sei. Lie hat stets betont, dass in der Ebene, wenn man die an und für sich betrachtet, die Forderung: der Kreis solle eine geschlossene Curve sein, nicht aus den übrigen Helmholtzschen Axiomen folgt; dagegen hat er nicht blos behauptet, sondern bewiesen, dass die Sache anders liegt, wenn man die Ebene als einen Theil des dreifach ausgedehnten Raumes ansieht: in diesem Falle ist das Monodromieaxiom überflüssig, wenn man das Helmholtzsche Axiom der freien Beweglichkeit des Raumes in geeigneter Weise deutet*).

Wir benutzen diese Gelegenheit, um auch eine Stelle in dem ersten Bande des Lindemannschen Werkes zu berichtigen; wir meinen die Stelle auf S. 1023 ff., wo Herr Lindemann den Versuch macht, die von Lie geschaffene Theorie der Berührungstransformationen für den Fall zu entwickeln, dass man die Clebschschen Connexcoordinaten zu Grunde legt. Obwohl die Lösung dieser Aufgabe aus den damals von Lie schon längst gegebenen Formeln für homogene Berührungstransformationen unmittelbar abgelesen werden kann, sind doch nicht blos die Lindemannschen Entwicklungen sondern auch seine Kriterien unrichtig.

Wir wollen uns begnügen, die richtigen Kriterien abzuleiten und zwar gleich für den Raum von beliebig vielen Dimensionen.

Es seien $x_1 \ldots x_{n+1}$ homogene Punktcoordinaten im Raume von n Dimensionen und $u_1 \ldots u_{n+1}$ seien homogene Coordinaten der ebenen $(n-1)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten dieses Raumes; besteht dann zwischen den x und den u die Gleichung:

$$(1) \qquad \sum_1^{n+1} {}_\nu \, u_\nu x_\nu = 0,$$

so sind: $x_1 \ldots x_{n+1}$, $u_1 \ldots u_{n+1}$ die homogenen Coordinaten der M_{n-1}-elemente oder, wie wir früher sagten, der Elemente des R_n (s. S. 480 u. Abschn. II, S. 103).

Die Berührungstransformationen des R_n lassen sich nun, was jedoch eines Beweises bedarf, ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit definiren als diejenigen Transformationen von der Form:

*) In den vorstehenden Auseinandersetzungen sind übrigens die Missverständnisse, die Herr Lindemann in wenig Zeilen begangen hat, noch nicht erschöpft; es ist aber unnöthig, weiter darauf einzugehen.

$$(2)\qquad \begin{cases} x_\nu' = F_\nu(x_1 \ldots x_{n+1},\quad u_1 \ldots u_{n+1}) \\ u_\nu' = \Phi_\nu(x_1 \ldots x_{n+1},\quad u_1 \ldots u_{n+1}) \end{cases} \qquad (\nu = 1 \ldots n+1),$$

die so beschaffen sind, dass die Gleichungen:

$$(3)\qquad \begin{cases} \sum_1^{n+1\,\nu} \Phi_\nu F_\nu = \sum_1^{n+1\,\nu} u_\nu x_\nu \\ \sum_1^{n+1\,\nu} \Phi_\nu\, dF_\nu = \sum_1^{n+1\,\nu} u_\nu dx_\nu \\ \sum_1^{n+1\,\nu} F_\nu\, d\Phi_\nu = \sum_1^{n+1\,\nu} x_\nu du_\nu \end{cases}$$

identisch erfüllt sind. Die charakteristischen Eigenschaften dieser Transformationen kann man aber auf Grund von Abschn. II, S. 135 ff. ohne Weiteres angeben.

In der That, dort ist gezeigt, dass die Gleichung:

$$(4)\qquad \sum_1^{n+1\,\nu} \Phi_\nu\, dF_\nu = \sum_1^{n+1\,\nu} u_\nu dx_\nu$$

dann und nur dann identisch besteht, wenn die F_ν homogen von nullter Ordnung und die Φ_ν homogen von erster Ordnung in den u sind und wenn ausserdem die Gleichungen:

$$(5)\qquad \begin{cases} (F_\mu F_\nu)_{x,\,u} = (\Phi_\mu \Phi_\nu)_{x,\,u} = (\Phi_\mu F_\nu)_{x,\,u} = 0 \\ (\Phi_\mu F_\mu)_{x,\,u} = 1 \end{cases} \qquad (\mu, \nu = 1 \ldots n+1;\ \mu \neq \nu)$$

identisch erfüllt sind; zugleich ist bewiesen, dass dann die $2n+2$ Functionen: $F_1 \ldots F_{n+1}$, $\Phi_1 \ldots \Phi_{n+1}$ immer von einander unabhängig sind. Der Ausdruck $(F\Phi)_{x,\,u}$ hat dabei die Bedeutung:

$$(F\Phi)_{x,\,u} = \sum_1^{n+1\,\nu} \left\{ \frac{\partial F}{\partial u_\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x_\nu} - \frac{\partial F}{\partial x_\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial u_\nu} \right\}.$$

Soll andrerseits die Gleichung:

$$(4')\qquad \sum_1^{n+1\,\nu} F_\nu\, d\Phi_\nu = \sum_1^{n+1\,\nu} x_\nu\, du_\nu$$

identisch bestehen, so ist aus demselben Grunde offenbar nothwendig und hinreichend, dass die Gleichungen (5) erfüllt sind und dass die F_ν homogen von erster und die Φ_ν homogen von nullter Ordnung in den x sind. Demnach sind die Gleichungen (5) und

$$(6)\qquad \begin{cases} \sum_1^{n+1} x_\tau \frac{\partial F_\nu}{\partial x_\tau} = F_\nu, & \sum_1^{n+1} x_\tau \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\tau} = 0 \\ \sum_1^{n+1} u_\tau \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial u_\tau} = \Phi_\nu, & \sum_1^{n+1} u_\tau \frac{\partial F_\nu}{\partial u_\tau} = 0 \end{cases} \qquad (\nu = 1 \ldots n+1)$$

zusammen die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für das identische Bestehen der Gleichungen (4) und (4′).

Aber die Gleichungen (5) und (6) sind zugleich auch die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für das identische Bestehen der Gleichungen (3). Sollen nämlich die Gleichungen (3) erfüllt sein, so ist jedenfalls nothwendig, dass (4) und (4′) identisch befriedigt sind, das aber tritt, wie wir soeben sahen, dann und nur dann ein, wenn die F_ν und Φ_ν den Bedingungen (5) und (6) genügen. Ist diese Forderung erfüllt, so sind die Gleichungen (4) und (4′) Identitäten, es besteht also zugleich auch eine Identität von der Form:

$$\sum_1^{n+1} \Phi_\nu F_\nu = \sum_1^{n+1} u_\nu x_\nu + C,$$

das ist aber wegen der Homogeneitätsbedingungen (6) dann und nur dann möglich, wenn C verschwindet. Unter den gemachten Voraussetzungen sind also alle drei Gleichungen (3) identisch erfüllt.

Wir sehen hieraus, dass das Bestehen der Gleichungen (5) *und* (6) *nothwendig und hinreichend ist, damit die Gleichungen* (2) *eine Berührungstransformation des R_n darstellen.*

§ 106.

Herr Killing hat eine ganze Reihe von Arbeiten über die Grundlagen der Geometrie veröffentlicht, von denen aber nur zwei einen gruppentheoretischen Charakter tragen, nämlich das schon erwähnte Braunsberger Programm von 1884 und eine 1892 erschienene Abhandlung im Crelleschen Journal (Bd. 109, S. 121—186).

Das Programm von 1884 lassen wir hier bei Seite, da die darin abgeleiteten Ergebnisse über die Grundlagen der Geometrie sich auf die Ebene beschränken, wir werden aber später aus andern Gründen auf dieses Programm zurückkommen.

Was nun die Abhandlung im Crelleschen Journal angeht, so können wir natürlich nicht der ganzen langen Abhandlung von Anfang bis zu Ende nachgehen, sondern wir müssen uns begnügen, einige Stellen auszuwählen, die ganz besonders die Kritik herausfordern.

Nachdem Herr Killing gewisse Axiome aufgestellt hat, die sich auf endlich von einander entfernte Punkte beziehen, versucht er in § 10 seiner Arbeit (S. 159 ff.) die Existenz eines quadratischen Bogen-

elementes zu beweisen. Er verfällt aber dabei nicht blos in denselben Fehler wie Herr v. Helmholtz, sondern begeht noch andre wesentliche Fehler.

Die Betrachtungen auf S. 161 erscheinen uns unverständlich.

Auf S. 162 wird ohne Weiteres aus dem Verhalten unendlich benachbarter Punkte auf das endlich von einander entfernter Punkte geschlossen. Herr Killing betrachtet alle Transformationen einer Gruppe, die einen bestimmten Punkt P invariant lassen, und nimmt an, dass die dem Punkte P unendlich benachbarten Punkte: $dx_1 \dots dx_n$ derart transformirt werden, dass ein linearer Ausdruck:

$$c_1 dx_1 + \cdots + c_n dx_n$$

invariant bleibt. Er schliesst daraus, dass dann mit dem Punkte P zugleich ein $(n-1)$-dimensionales Gebiet durch P in Ruhe bleibt. Dieser Schluss ist aber offenbar ganz unzulässig, denn unter den gemachten Voraussetzungen ist es zwar sicher, dass die betreffende Gruppe einen Pfaffschen Ausdruck:

$$\sum_1^n \alpha_\nu (x_1 \dots x_n)\, dx_\nu$$

invariant lässt, aber dieser Ausdruck bestimmt nur dann eine $(n-1)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit durch P, die gleichzeitig mit P in Ruhe bleibt, wenn er, gleich Null gesetzt, eine integrable Pfaffsche Gleichung liefert.

Auf S. 163 werden mit den infinitesimalen Transformationen der dort betrachteten linearen homogenen Gruppe Operationen vorgenommen, die einfach unerlaubt sind. Kein Wunder daher, dass Herr Killing auf S. 166 zu einem ganz falschen Satze über lineare homogene Gruppen gelangt. Dass dieser Satz falsch ist, zeigt schon die lineare homogene Gruppe:

$$\begin{aligned} &x_4 p_1 + 2x_1 p_2 + 3x_2 p_3 \\ &x_1 p_1 - x_2 p_2 - 3x_3 p_3 + 3x_4 p_4 \\ &2x_2 p_1 + x_3 p_2 + 3x_1 p_4 \end{aligned}$$

in den vier Veränderlichen $x_1 \dots x_4$ (vgl. S. 187 d. Abschn.). Diese Gruppe lässt nämlich kein „ebenes Gebilde“ in Ruhe, sie ist auch nicht transitiv und doch zerlegt sie den Raum nicht „in quadratische Gebilde, von denen ein jedes in sich bewegt wird“.

In § 11 und 12 seiner Arbeit geht Herr Killing davon aus, dass das Quadrat des Bogenelements ein Differentialausdruck zweiten Grades ist, dessen Determinante nicht verschwindet, und fragt — so können wir es ausdrücken — unter welchen Bedingungen dieses Bogen-

element bei einer $\frac{1}{2}n(n+1)$-gliedrigen Gruppe invariant bleibt, die die Linienelemente durch jeden festgehaltenen reellen Punkt von allgemeiner Lage $\frac{1}{2}n(n-1)$-gliedrig transformirt.

Er giebt drei Lösungen für diese Aufgabe. Die erste beruht auf einer Verbindung der Untersuchungen der Herren Christoffel und Lipschitz mit der Lieschen Theorie der Definitionsgleichungen einer Gruppe. Die dritte Lösung ist nur eine Umgestaltung der Lösung, die Lie bereits 1885 in Bd. X seines norwegischen Archivs veröffentlicht hat (vgl. S. 325) und doch wird dieser Umstand gar nicht einmal erwähnt. Die zweite Lösung endlich beruht zwar zum Theil auf Killings eignen Untersuchungen über die Zusammensetzung der Gruppen, dagegen in noch höherem Masse auf Lies Theorien*).

Die vorstehenden Bemerkungen, die sich noch beträchtlich vermehren liessen, zeigen zur Genüge, dass die Killingsche Arbeit keinen Fortschritt in den Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie bezeichnet; es ist das um so mehr zu verwundern, als Herrn Killing bei der Abfassung seiner Arbeit die ganze Theorie der Transformationsgruppen zu Gebote stand. Dass Herr Killing es nicht für nöthig gehalten hat, Lies zwei, bereits 1890 erschienene, grosse Arbeiten über die Grundlagen der Geometrie anzuführen, sei nur nebenbei erwähnt.

An dieser Stelle mag noch mit ein paar Worten Grassmanns gedacht werden.

In einem Anhange zu dem 1878 erschienenen Neudrucke seiner Ausdehnungslehre von 1844 spricht Grassmann über die Grundlagen der Geometrie und macht dabei einige Bemerkungen, die gegen Riemann und Herrn v. Helmholtz gerichtet sind. Diese Bemerkungen, die übrigens während Grassmanns letzter Krankheit und kurz vor seinem Tode geschrieben sind, zeigen aber nur, dass dieser hervorragende Geometer nicht mehr dazu gekommen ist, die Riemannschen und die Helmholtzschen Untersuchungen genauer zu studiren und die darin enthaltenen Leistungen zu würdigen. Besonders merkwürdig ist, dass Grassmann dabei anscheinend übersehen hat, dass er selbst schon in seiner Ausdehnungslehre von 1862 Nichteuklidische Geometrie im Raume von beliebig vielen Dimensionen getrieben hat; denn der Begriff des Normalsystems, den Grassmann auf S. 112 ff. dieser Ausdehnungslehre einführt, kommt einfach darauf hinaus, dass jedesmal, wenn in einem Raume von n Dimensionen die Euklidische Geometrie

*) Erwähnt sei beiläufig, dass Herr Killing die Begriffe *systatisch* und *imprimitiv* sowie *asystatisch* und *primitiv* verwechselt.

gilt, in dem Bündel der ∞^{n-1} Geraden durch einen Punkt dieses Raumes die von Riemann entdeckte *Nichteuklidische* Geometrie gültig ist.

Da Grassmann 1862 die Riemannsche Probevorlesung noch nicht kennen konnte, ist diese Thatsache immerhin bemerkenswerth, und da sie jedenfalls nicht allgemein bekannt ist, ist es vielleicht ganz gut, einmal darauf hinzuweisen.

Schlussbemerkungen zu Abtheilung V.

Wir wollen diese Abtheilung beschliessen, indem wir uns noch kurz über die Tragweite der darin ausgeführten Untersuchungen Rechenschaft geben.

Die Grundlagen der Geometrie sind ein Gebiet, dessen Bearbeitung schwierig und, sagen wir es offen, ziemlich undankbar ist; giebt es doch unter den vielen, die sich damit beschäftigt haben, nur wenige die von allen ihren Nachfolgern anerkannt worden sind, und keinen, der ganz unangefochten geblieben wäre. Wenn sich Lie trotzdem nicht damit begnügt hat, über diesen Gegenstand nachzudenken — welcher Mathematiker thäte das nicht auch wenigstens gelegentlich — wenn er sogar eine ganze Reihe von grösseren und kleineren Arbeiten darüber veröffentlicht hat, so wurde er dazu durch mehrere Gründe bestimmt.

Die ursprüngliche Veranlassung war die Thatsache, dass in Riemanns Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie ein bestimmtes mathematisches Problem auftritt, bei dessen Behandlung die *ganze Analysis* verwerthet werden kann. Dieses Riemannsche Problem ist dasselbe, das wir bisher gewöhnlich als das Riemann-Helmholtzsche Problem bezeichnet haben. Dazu kam aber die Bemerkung, dass alle Mathematiker, die bisher dieses Problem behandelt hatten, in eine Reihe von groben Fehlern verfallen waren, die daher stammten, dass die betreffenden Verfasser entweder gar keine gruppentheoretischen Begriffe besassen oder doch nur ganz mangelhafte. Es erschien daher wünschenswerth, zu zeigen, erstens dass eine Reihe von Fehlern vorlagen, und zweitens, dass durch die Gruppentheorie eine einwandfreie Behandlung des von Riemann angeregten Problems ermöglicht wird. Auf diese Weise konnte zugleich an einem für jedermann interessanten Beispiele die Leistungsfähigkeit der Gruppentheorie deutlich gemacht werden.

Es handelte sich also einmal darum, die früheren Arbeiten über den Gegenstand zu kritisiren, und andrerseits darum, eine wirkliche Erledigung jenes Problems zu liefern. Der zweite Theil dieser Auf-

gabe war wesentlich leichter als der erste. Da nämlich die Verfasser der bewussten Arbeiten entweder gar keine gruppentheoretischen Kenntnisse besassen oder, wenn sie deren besassen, nur sehr ungenügende, so sind ihre Auseinandersetzungen häufig unklar. Schon um ihre Axiome und Hypothesen zu deuten, ist man oft selbst genöthigt, Hypothesen zu machen und nach und nach verschiedene Hypothesen zu versuchen. Es ist daher kein Wunder, wenn Lie im Laufe der Zeit namentlich über die Helmholtzsche Arbeit verschiedene Auffassungen ausgesprochen hat; sogar in der hier gegebenen Darstellung kommt es vor, dass nicht überall dieselbe Auffassung consequent durchgeführt worden ist. Soweit wir bemerkt haben, dass hierdurch Versehen verursacht worden sind, haben wir bereits darauf aufmerksam gemacht.

Wenn aber auch unsre Auseinandersetzungen in der soeben genannten Richtung und wohl auch in andern Beziehungen nicht vollkommen sind, so glauben wir doch, dass sie seit Riemanns Arbeit das Beste sind, was über das von Riemann angeregte Problem geschrieben worden ist.

Welchen Nutzen hat nun aber die Geometrie von unsrer Erledigung des Riemannschen Problems? Wir wollen versuchen, diese Frage wenigstens andeutungsweise zu beantworten.

Die Geometrie soll in ihren verschiedenen Stufen soweit möglich rein geometrisch begründet werden; das ist eine Forderung, die gewiss jeder unterschreiben wird.

Für die erste Stufe der Geometrie sind erstens gewisse Grundbegriffe erforderlich, wie Raum, Punkt, Curve und Fläche, zweitens aber gewisse Axiome, zum Beispiel über die Eigenschaften der geraden Linie, die Existenz der Kugel und so weiter. Jede andre denkbare Stufe ist charakterisirt durch Einführung besondrer Axiome, eine z. B. durch das Parallelenaxiom, eine andre durch das Cantorsche Axiom. Auf dieses Axiom lassen sich die geometrischen Grössenbegriffe: Flächenraum, Bogenlänge u. s. w. rationell begründen, während Euklid dazu faktisch besondrer Axiome bedarf.

Die grosse Frage ist jetzt, welche Axiome auf jeder einzelnen Stufe nicht blos hinreichend, sondern auch nothwendig, also mit andern Worten unentbehrlich sind. Durch die Beantwortung dieser Frage wäre *das ganze Problem der Grundlagen der Geometrie erledigt.* Allein es giebt kaum eine strenge Methode zu ihrer Beantwortung.

Riemann hat, *wenn auch wohl unbewusst,* einen Weg vorgezeichnet, auf dem man wenigstens etwas erreichen kann. Riemann beschränkt sich ja auf die Betrachtung einer Zahlenmannigfaltigkeit und

versucht solche Axiome aufzustellen, die zur Begründung der Geometrie dieser Zahlenmannigfaltigkeit ausreichen. Hieraus ergiebt sich, dass man zur Erledigung des Problems über die Grundlagen der Geometrie den folgenden Weg einschlagen kann:

Es sei Z das Axiom, das aussagt, dass der R_3 eine Zahlenmannigfaltigkeit ist. Ferner seien A die Axiome, die bei Voraussetzung des Axioms Z noch nothwendig und hinreichend sind, um die Geometrie des R_3 zu begründen. Ein derartiges System A von Axiomen, das nichts überflüssiges enthält, haben wir in Kapitel 23 aufgestellt.

Da Z und A zusammengenommen keine überflüssigen Bestandtheile enthalten, werden die Axiome A für sich genommen sicher keine entbehrlichen Bestandtheile enthalten. Man muss daher versuchen unter Beibehaltung der Axiome A solche weitere möglichst einfache Axiome hinzuzufügen, dass diese zusammen mit den Axiomen A zum Aufbau der Geometrie genügen.

Hierin besteht der Nutzen, den die Erledigung des von Riemann aufgestellten Problems für die Grundlagen der Geometrie hat; in der Eröffnung des Weges, der zu diesem Ergebnisse führt, besteht zugleich im Wesentlichen das Verdienst, das sich Riemann um die Grundlagen der Geometrie erworben hat. Im übrigen liegt der Werth der Riemannschen Arbeit mehr auf rein analytischem Gebiete.

Man würde nun ungefähr folgenden Weg zu gehen haben:

Zunächst stellt man gewisse *Grundbegriffe* auf, wie Raum, Punkt, Curve, Fläche, dazu den Begriff der Bewegung, der allerdings streng genommen nicht nothwendig ist, der aber, wie schon Herr de Tilly mit Recht hervorgehoben hat, die Sprache ausserordentlich erleichtert.

Als erstes *Axiom* wäre das folgende aufzustellen: *Wird ein Punkt P festgehalten, so kann jeder andre Punkt noch eine Fläche beschreiben, die nicht durch den festen Punkt P hindurchgeht.* Hierin liegt, dass getrennte Punkte bei allen Bewegungen auch getrennt bleiben.

Man darf wohl behaupten, dass die hier eingeführten Begriffe irreducibel, also wirkliche Grundbegriffe sind, und dass ebenso das aufgestellte Axiom irreducibel ist.

Als nächstes Axiom wäre wohl aufzustellen: *Werden zwei verschiedene Punkte P_1 und P_2 festgehalten, so giebt es unendlich viele Punkte, die gleichzeitig in Ruhe bleiben, und diese Punkte bilden eine einzige durch P_1 und P_2 gehende Linie.*

Gewiss genügen diese Axiome noch nicht, nicht einmal für die erste Stufe der Geometrie; aber wir wollen uns auf Weiteres nicht einlassen.

Schliesslich noch eine kurze Andeutung darüber, wie man vom gruppentheoretischen Standpunkte aus am einfachsten die Trennung zwischen der Euklidischen und den beiden Nichteuklidischen Geometrieen des R_n bewirkt. Die Gruppe der Euklidischen Bewegungen, wir meinen natürlich wie in den letzten Kapiteln immer die reelle Gruppe, enthält eine invariante reelle Untergruppe. Unter den beiden Gruppen von Nichteuklidischen Bewegungen giebt es keine, die eine reelle invariante Untergruppe enthält. Was die Unterscheidung zwischen den beiden Gruppen von Nichteuklidischen Bewegungen angeht, so beschränken wir uns hier auf den R_3. Die beiden Gruppen haben in diesem Falle reelle viergliedrige Untergruppen, die aber im Falle der Lobatschewskischen Geometrie integrabel, im Falle der Riemannschen nicht integrabel sind.

Auf S. 426 berührten wir bereits die Frage, ob die dortigen Gruppen: [1], [2], [4] durch Punkttransformationen des R_3 in projective Gruppen dieses Raumes überführbar seien; wir zeigten aber damals nur, dass diese Frage jedenfalls bei der Gruppe [4] mit Nein zu beantworten ist. Jetzt wollen wir die Frage von Neuem in Angriff nehmen und vollständig erledigen.

Soll eine Gruppe von Punkttransformationen des R_3 mit einer projectiven Gruppe dieses Raumes ähnlich sein, so ist nach S. 224 f. nothwendig, aber im Allgemeinen noch nicht hinreichend, dass sie eine Schaar von ∞^4 Curven invariant lässt, die durch zwei gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung von der Form:

$$(A) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \varphi\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right), \quad \frac{d^2z}{dx^2} = \chi\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right)$$

definirt ist. Wir stellen uns zunächst die allgemeinere Aufgabe, für jede der Gruppen [1], [2], [4] alle derartigen Schaaren von Curven zu bestimmen, die bei ihr invariant bleiben. Die Grössen x, y, z betrachten wir dabei als *complexe* Veränderliche.

Wir schicken die Bemerkung voraus, dass bei jeder der Gruppen [1], [2], [4] auf S. 426 die ∞^2 Linienelemente durch jeden festgehaltenen Punkt von allgemeiner Lage transitiv transformirt werden.

In der That, der Coordinatenanfang: $x = y = z = 0$ ist bei jeder unsrer drei Gruppen ein Punkt von allgemeiner Lage. Wählen wir nun $x' : y' : z'$ zu homogenen Coordinaten der ∞^2 Linienelemente durch den Coordinatenanfang, so bestimmen die drei linearen homogenen Gruppen:

$$(B) \qquad \begin{cases} x'r', \; y'r, \; y'q' - cx'p' \\ x'r', \; y'r', \; x'p' + y'q' - cx'q' \\ x'q' + y'r', \; 2x'p' + y'q' \end{cases}$$

wie diese Linienelemente bei den Gruppen [1], [2], [4] nach Festhaltung des Coordinatenanfangs transformirt werden (vgl. Abschn. I, S. 603). Dass aber jede der drei Gruppen (B) die ∞^2 Linienelemente: $x' : y' : z'$ transitiv transformirt, davon überzeugt man sich leicht; denn fügt man die infinitesimale Transformation: $x'p' + y'q' + z'r'$ hinzu (s. Abschn. I, S. 580), so erhält man aus jeder der Gruppen (B) eine transitive Gruppe in den Ver-

änderlichen: x', y', z', demnach hat keine der Gruppen (B) eine Invariante, die in x', y', z' homogen von nullter Ordnung wäre.

Nunmehr wollen wir untersuchen, welche unter den Gruppen [1], [2], [4] auf S. 426 eine Schaar von ∞^4 Curven invariant lassen, die durch zwei Differentialgleichungen von der Form (A) definirt ist.

Es sei G eine beliebige unsrer drei Gruppen und S sei eine derartige bei G invariante Schaar von ∞^4 Curven. Durch jeden Punkt P von allgemeiner Lage gehen dann ∞^2 verschiedene Curven der Schaar S. Diese ∞^2 Curven sind so beschaffen, dass durch jeden Punkt P' von allgemeiner Lage in einer gewissen Umgebung von P eine und nur eine geht; ebenso geht im Allgemeinen durch jedes der ∞^2 Linienelemente von P eine und nur eine. Halten wir daher den Punkt P und ein beliebiges durch ihn gehendes Linienelement L von allgemeiner Lage fest, so bleibt zugleich die durch beide bestimmte Curve C der Schaar S in Ruhe. Halten wir andrerseits ausser P noch einen beliebigen Punkt P' von allgemeiner Lage auf der eben definirten Curve C fest, so bleibt C ebenfalls in Ruhe.

Da bei G die ∞^2 Linienelemente durch den festgehaltenen Punkt P transitiv transformirt werden und da G selbst transitiv ist, so enthält die grösste Untergruppe g von G, die P und das Linienelement L in Ruhe lässt, gerade einen Parameter. Da andrerseits nach Festhaltung von P der Punkt P' noch ∞^2 verschiedene Lagen annehmen kann, so enthält auch die grösste Untergruppe g' von G, die die beiden Punkte P und P' in Ruhe lässt, blos einen Parameter. Nun aber ist die eingliedrige Gruppe g offenbar zugleich die grösste in G enthaltene Untergruppe, bei der der Punkt P und die Curve C in Ruhe bleibt; bedenken wir daher, dass bei der eingliedrigen Gruppe g' ebenfalls der Punkt P und die Curve C ihre Lage behalten, so erkennen wir, dass g' mit g zusammenfällt. Hierin liegt, dass bei g auch der Punkt P' invariant bleibt, und, da P' ein Punkt von allgemeiner Lage auf C war, so muss dasselbe überhaupt von allen Punkten der Curve C gelten.

Wenn also eine der Gruppen [1], [2], [4] *eine Schaar S von ∞^4 Curven invariant lässt, die durch zwei Differentialgleichungen von der Form (A) definirt wird, so ist die Gruppe so beschaffen, dass stets, wenn man einen Punkt P von allgemeiner Lage und ein durch P gehendes Linienelement L von allgemeiner Lage festhält, zugleich alle Punkte auf der durch P und L bestimmten Curve der Schaar S in Ruhe bleiben.*

Nunmehr lässt sich zunächst leicht beweisen, dass die Gruppe [4], S. 426 keine Curvenschaar von der hier verlangten Beschaffenheit invariant lässt.

In der That, bei der Gruppe [4] werden die ∞^2 Linienelemente durch jeden festgehaltenen Punkt P von allgemeiner Lage zwar transitiv, aber blos zweigliedrig transformirt. Hält man daher ausser P noch ein hindurchgehendes Linienelement L von allgemeiner Lage fest, so bleibt überhaupt jedes durch P gehende Linienelement in Ruhe. Liesse nun die Gruppe [4] eine Schaar S von der hier verlangten Beschaffenheit invariant, so bliebe bei Festhaltung von P und L nicht blos jede der ∞^2 durch P gehenden Curven von S in Ruhe, sondern es müssten auch, nach dem Obigen, auf jeder dieser Curven alle Punkte in Ruhe bleiben; da aber im Allgemeinen durch jeden Punkt des Raumes eine dieser Curven ginge, würde hieraus folgen, dass nach Festhaltung von P und L überhaupt jeder

Punkt des Raumes seine Lage behielte. Das ist ein Widerspruch, denn die Gruppe [4] enthält eine eingliedrige Untergruppe, bei der P und zugleich alle ∞^2 Linienelemente durch P invariant bleiben, sie enthält ja in der Umgebung jedes Punktes x_0, y_0, z_0 von allgemeiner Lage eine infinitesimale Transformation von zweiter Ordnung in: $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ (s. S. 426).

Aber auch von den beiden Gruppen [1] und [2] lässt keine eine Curvenschaar von der hier verlangten Beschaffenheit invariant.

Betrachten wir zunächst die Gruppe [1]. Wir halten den Coordinatenanfang fest, der ja ein Punkt von allgemeiner Lage ist, und ausserdem ein beliebiges Linienelement: $x_0' : y_0' : z_0'$ von allgemeiner Lage durch den Coordinatenanfang; die dann noch übrig bleibenden Transformationen von [1] bilden eine eingliedrige Gruppe, die von der infinitesimalen Transformation:

$$(C) \qquad cy_0'x^2p - x_0'y^2q + 2c(y_0'x - x_0'y)r \quad (c \neq 0)$$

erzeugt ist. Bliebe nun bei der Gruppe [1] eine Schaar S von der verlangten Beschaffenheit in Ruhe, so müsste es bei der eingliedrigen Gruppe (C) eine invariante Curve geben, die durch den Coordinatenanfang und durch das Linienelement: $x_0' : y_0' : z_0'$ ginge und deren Punkte sämmtlich in Ruhe blieben. Nun aber sind alle bei der eingliedrigen Gruppe (C) invarianten Punkte durch die Gleichungen:

$$cy_0'x^2 = 0, \quad x_0'y^2 = 0, \quad c(y_0'x - x_0'y) = 0$$

definirt (s. Abschn. I, S. 116 f.); diese Gleichungen jedoch sind, solange: $x_0' : y_0' : z_0'$ ein Linienelement von allgemeiner Lage ist, nur für die Punkte der Geraden: $x = y = 0$ erfüllt und diese Gerade geht nicht durch das betreffende Linienelement. Demnach kann bei [1] keine Curvenschaar S von der verlangten Beschaffenheit invariant bleiben.

Bei der Gruppe [2] gestaltet sich die Sache ähnlich. Der Coordinatenanfang und das Linienelement: $x_0' : y_0' : z_0'$ bleiben nämlich hier bei der eingliedrigen Gruppe:

$$(D) \qquad \begin{cases} x_0'x^2p + \{2x_0'xy - (y_0' + cx_0')x^2\}q + \\ \qquad + 2\{x_0'(y + cx) - (y_0' + cx_0')x\}r \end{cases}$$

invariant. Alle Punkte aber, die bei dieser eingliedrigen Gruppe ihre Lage behalten, sind durch die Gleichungen:

$$x_0'x^2 = 0, \quad 2x_0'xy - (y_0' + cx_0')x^2 = 0$$
$$x_0'(y + cx) - (y_0' + cx_0')x = 0$$

definirt, oder da: $x_0' : y_0' : z_0'$ ein Linienelement von allgemeiner Lage sein soll, durch die Gleichungen: $x = y = 0$. Demnach giebt es keine durch den Coordinatenanfang und durch das Linienelement: $x_0' : y_0' : z_0'$ gehende Curve, deren Punkte bei der eingliedrigen Gruppe (D) sämmtlich in Ruhe bleiben, und daraus folgt wieder, dass auch die Gruppe [2] keine

Schaar von ∞^4 Curven von der hier verlangten Beschaffenheit invariant lässt *).

Damit ist die Aufgabe, die wir uns auf S. 538 gestellt hatten, erledigt; es ist bewiesen, dass keine der Gruppen: [1], [2], [4] auf S. 426 eine Schaar von ∞^4 Curven invariant lässt, die durch zwei Differentialgleichungen von der Form (A) definirt ist. Offenbar folgt hieraus zugleich, dass keine dieser Gruppen durch eine Punkttransformation des R_3 in eine projective Gruppe übergeführt werden kann.

Was wir über die Gruppen auf S. 426 gefunden haben, überträgt sich natürlich sofort auf die Gruppen: 6, 7, 8, 9, 11 auf S. 434, die ja mit den Gruppen: [1], [2], [4] auf S. 426 ähnlich sind. Es ergiebt sich daher, dass keine der Gruppen: 6, 7, 8, 9, 11 eine Schaar von ∞^4 Curven invariant lässt, die zwei Differentialgleichungen von der Form (A) erfüllt, und dass keine dieser Gruppen durch eine Punkttransformation des R_3 mit einer projectiven Gruppe dieses Raumes ähnlich ist. Nun kann nach Theor. 19, S. 292 keine der projectiven Gruppen: 1 . . . 5 auf S. 433 durch eine nichtprojective Transformation wieder in eine projective Gruppe übergeführt werden. Andrerseits kommt, wie man sich leicht überzeugt, der projectiven Gruppe 10 auf S. 434 dieselbe Eigenschaft zu. Demnach ergiebt sich aus dem Theoreme 37, S. 433 noch der Satz:

Ist eine reelle projective Gruppe des Raumes x, y, z so beschaffen, dass ihr gegenüber zwei Punkte eine und nur eine Invariante und mehr als zwei Punkte keine wesentliche Invariante haben, so ist sie sechsgliedrig und durch eine reelle projective Transformation des Raumes x, y, z überführbar entweder in eine der Gruppen: 1 . . . 5 auf S. 433 oder in die Gruppe 10 auf S. 434.

Wir sahen vorhin, dass keine der Gruppen: 6, 7, 8, 9, 11 auf S. 434 eine Schaar von ∞^4 Curven invariant lässt, die zwei Differentialgleichungen von der Form (A) erfüllt. Hieraus folgt nach S. 539, dass keine der genannten Gruppen so beschaffen ist, dass bei Festhaltung zweier beliebiger Punkte P_1 und P_2 alle Punkte einer continuirlichen Curve zwischen P_1 und P_2 in Ruhe bleiben. Man kann sich davon auch direct überzeugen. Hält man nämlich bei einer der Gruppen: 6, 7, 8, 9, 11 den Coordinatenanfang fest und ausserdem einen beliebigen Punkt: x_0, y_0, z_0, der dem Coordinatenanfange gegenüber von allgemeiner Lage ist, so findet man jedesmal, dass zugleich alle Punkte der beiden Geraden: $x = y = 0$ und: $x = x_0, y = y_0$ in Ruhe bleiben, sonst aber keine Punkte weiter. Es bleiben also zwar unendlich viele Punkte fest, aber die bilden keine continuirliche Curve zwischen dem Coordinatenanfang und dem Punkte: x_0, y_0, z_0.

Hierin liegt, dass die Gruppen: 6, 7, 8, 9, 11 *Euklids Geradenaxiom* nicht erfüllen, denn dieses Axiom verlangt, dass es zwischen je zwei Punkten P_1 und P_2 eine aber auch nur eine continuirliche Curve gebe, deren Punkte bei Festhaltung von P_1 und P_2 sämmtlich in Ruhe bleiben.

*) Es hat grosses Interesse, alle continuirlichen Gruppen des R_3 zu bestimmen, die eine Schaar von ∞^4 Curven von der hier betrachteten Beschaffenheit invariant lassen. Hier erwähnen wir nur, dass diese Gruppen, wie man sich leicht überzeugt, alle endlich sind.

Man überzeugt sich schliesslich leicht, dass auch die Gruppe 10 auf S. 434 das Axiom der Geraden nicht erfüllt. Hält man nämlich bei dieser Gruppe den Coordinatenanfang und einen beliebigen andern Punkt: x_0, y_0, z_0 von allgemeiner Lage fest, so bleiben überhaupt alle Punkte der Ebene: $y_0 x - x_0 y = 0$ in Ruhe, es ist also hier die Forderung nicht erfüllt, dass es zwischen den beiden festgehaltenen Punkten nur *eine* Curve gebe, deren Punkte sämmtlich in Ruhe bleiben.

Man sieht hieraus, dass die Gruppen 1 . . . 5 auf S. 433 die einzigen reellen Gruppen des R_3 sind, bei denen zwei Punkte eine und nur eine und mehr als zwei Punkte keine wesentliche Invariante haben und bei denen ausserdem das Axiom der Geraden erfüllt ist. *Durch das Axiom der Geraden werden also unter den Gruppen des Theorems 37 alle die ausgezeichnet, zu denen ein quadratisches Bogenelement gehört.*

Schliesslich noch zwei Bemerkungen, von denen die eine zur Berichtigung, die andre zur Vervollständigung des Früheren dienen soll.

Auf S. 426 ist gesagt, dass der Parameter c beide Male wesentlich ist und nicht fortgeschafft werden kann. Diese Behauptung ist jedoch nur für die Gruppe [1] richtig; bei der Gruppe [2] dagegen kann der Parameter c doch fortgeschafft werden.

In der That, ist $c \neq 0$, so kann man durch die Transformation:

$$x_1 = cx, \quad y_1 = y, \quad z_1 = \frac{z}{c}$$

stets erreichen, dass $c = 1$ wird. Statt der einen Gruppe [2] mit dem willkürlichen Parameter c muss man daher in die Tabelle auf S. 426 die beiden Gruppen:

[2′] $\boxed{p,\ q,\ xq + r,\ x^2q + 2xr,\ xp + yq,\ x^2p + 2xyq + 2yr}$

[2″] $\boxed{\begin{array}{c} p,\ q,\ xq + r,\ x^2q + 2xr,\ xp + yq + r \\ x^2p + 2xyq + 2(x + y)r \end{array}}$

einsetzen, die beide keinen Parameter mehr enthalten. Dieselben beiden Gruppen sind natürlich in der Tabelle auf S. 434 an Stelle der Gruppe 9 einzusetzen *).

Wir erwähnten auf S. 460, dass die Gruppe 7 auf S. 434 eine merkwürdige Eigenschaft besitzt: Hält man nämlich bei dieser Gruppe einen Punkt P fest, so werden die ∞^2 reellen Punkte jeder Pseudokugel mit dem Mittelpunkte P durch eine dreigliedrige reelle Gruppe transformirt, die mit der Gruppe der Euklidischen Bewegungen der Ebene ähnlich ist; dagegen

*) Das stimmt mit den Angaben von Lie in seiner ersten kurzen Arbeit über den Gegenstand (Leipz. Ber. 1886, S. 341).

werden die ∞^2 reellen Linienelemente durch P durch eine projective Gruppe transformirt, die mit der Gruppe der Euklidischen Bewegungen der Ebene dualistisch ist.

Wir wollen jetzt noch hinzufügen, dass sich die Gruppen 6, 8 und 9 auf S. 434 genau ebenso verhalten: Hält man bei einer solchen Gruppe einen Punkt P fest, so werden die ∞^2 reellen Punkte jeder Pseudokugel mit dem Mittelpunkte P durch eine dreigliedrige reelle Gruppe g transformirt, die ∞^2 reellen Linienelemente durch P werden durch eine dreigliedrige reelle projective Gruppe $\mathfrak{g}$ transformirt, und diese beiden Gruppen g und $\mathfrak{g}$ sind durch eine reelle Berührungstransformation der Ebene mit einander ähnlich, nicht aber durch eine Punkttransformation.

Diese merkwürdige Eigenschaft der genannten Gruppen hat zur Folge, dass stets, wenn man den Punkt P und ausserdem noch einen andern Punkt P' von allgemeiner Lage festhält, zugleich in jedem der beiden Punkte P und P' ein Flächenelement von allgemeiner Lage in Ruhe bleibt.

Abtheilung VI.

Allgemeine Betrachtungen über endliche continuirliche Gruppen.

Die gegenwärtige Abtheilung bildet den Schluss des dritten Abschnitts und damit den Schluss des ganzen Werkes über *endliche* continuirliche Transformationsgruppen; sie enthält eine Reihe von allgemeinen Untersuchungen, die ihrem Charakter nach den Untersuchungen des ersten Abschnitts am nächsten stehen.

In Kapitel 25 beschäftigen wir uns von Neuem mit den Sätzen, die die Grundlage der ganzen Gruppentheorie bilden. Jetzt aber, wo wir mit den Begriffen: infinitesimale Transformation, eingliedrige Gruppe, Schaar von infinitesimalen Transformationen, Schaar von eingliedrigen Gruppen und andern vollkommen vertraut sind, können wir diese Sätze von einem höheren Standpunkte aus betrachten. Wir sprechen deshalb jetzt eingehend über den begrifflichen Inhalt dieser Sätze und namentlich über den begrifflichen Inhalt der Beweise, die wir früher für sie gegeben haben. Dadurch erhalten wir erst den richtigen Einblick in das Wesen der betreffenden Sätze und ihrer Beweise, zugleich aber auch bemerkenswerthe neue Ergebnisse.

Wir könnten übrigens noch weiter gehen. Die eben erwähnten Begriffe: infinitesimale Transformation u. s. w., die wir im Folgenden als bekannt voraussetzen, besitzen nämlich einen durchaus elementaren Charakter, während wir sie in Abschnitt I als Ausflüsse aus sehr allgemeinen Betrachtungen gewonnen haben; es wäre daher leicht, auch diese Begriffe selbständig von Neuem zu entwickeln und so die Betrachtungen des Kapitels 25 ganz unabhängig von allem Früheren zu machen. Wir halten es jedoch für überflüssig, das auszuführen.

In Abschnitt I haben wir gesehen, dass jede r-gliedrige Gruppe durch Einführung neuer Parameter auf eine gewisse kanonische Form gebracht werden kann; waren die endlichen Gleichungen der Gruppe vorgelegt, so waren die betreffenden neuen Parameter durch gewisse gewöhnliche Differentialgleichungen definirt (s. Abschn. I, Kap. 4 und S. 171). In Kapitel 26 zeigen wir nun, dass diese Differentialglei-

chungen immer integrirt werden können und dass zu ihrer Lösung ausser Differentiationen und Eliminationen im ungünstigsten Falle nur noch eine gewisse Anzahl von einander unabhängiger Quadraturen erforderlich ist. Hieraus ziehen wir wichtige Schlüsse.

Das Kapitel 27 liefert die Bestimmung aller r-gliedrigen transitiven Gruppen von gegebener Zusammensetzung; es schliesst sich als Fortsetzung an die Entwicklungen von Kapitel 22 des Abschnitts I an.

Bereits in Abschnitt I haben wir uns in mehreren Kapiteln mit der Theorie der Zusammensetzung der endlichen continuirlichen Gruppen beschäftigt, wir nennen nur die Kapitel über die adjungirte Gruppe, über Zusammensetzung und Isomorphismus, über die Aehnlichkeit r-gliedriger Gruppen und über die Bestimmung aller r-gliedrigen Gruppen von gegebener Zusammensetzung (Abschn. I, Kap. 16, 17, 19 und 22). Jetzt widmen wir dieser ausserordentlich wichtigen Theorie ein neues Kapitel, das achtundzwanzigste. Während wir uns in Abschnitt I auf die Sätze über Zusammensetzung beschränkten, die zur Begründung der allgemeinen Theorie der endlichen continuirlichen Gruppen erforderlich sind, behandeln wir in Kap. 28 die Theorie der Zusammensetzung mehr um ihrer selbst willen. Jedoch beschränken wir uns fast ganz auf solche Sätze, die Lie schon im Jahre 1884 besass und damals bereits veröffentlicht hatte. Auf die Untersuchungen, die seit 1886 von andrer Seite über den Gegenstand ausgeführt worden sind, kommen wir erst in dem Schlusskapitel zu sprechen.

In Kapitel 29 endlich geben wir einen kurzen kritischen Ueberblick über die neueren Arbeiten auf dem Gebiete der endlichen continuirlichen Transformationsgruppen.

Kapitel 25.

Die Fundamentalsätze der Gruppentheorie.

Wünscht man einen Ueberblick über die Sätze zu haben, auf denen die ganze Theorie der endlichen continuirlichen Gruppen aufgebaut ist, so unterscheidet man am Besten drei Sätze, die füglich als *die drei Fundamentalsätze der Gruppentheorie* bezeichnet werden können.

Jeder dieser drei Fundamentalsätze ist ein Doppelsatz, das heisst er besteht eigentlich aus zwei Sätzen, von denen aber jedesmal der eine die Umkehrung des andern ist.

Der *erste Fundamentalsatz* sagt aus, dass jede r-gliedrige Gruppe gewissen Differentialgleichungen von ganz besonderer Beschaffenheit,

nämlich den sogenannten grundlegenden Differentialgleichungen genügt und dass umgekehrt jede Schaar von ∞^r Transformationen, die derartige Differentialgleichungen erfüllt und ausserdem noch die identische Transformation enthält, eine r-gliedrige Gruppe bildet.

Der *zweite Fundamentalsatz* sagt aus, dass jede r-gliedrige Gruppe mit paarweise inversen Transformationen von r unabhängigen infinitesimalen Transformationen: $X_1 f \ldots X_r f$ erzeugt ist, die paarweise in Beziehungen von der Form:

$$(A) \qquad (X_i X_k) = \sum_1^r {}_s c_{iks} X_s f \quad (i, k = 1 \ldots r)$$

stehen, und dass umgekehrt r unabhängige infinitesimale Transformationen, die in diesen Beziehungen stehen, stets eine r-gliedrige Gruppe mit paarweise inversen Transformationen erzeugen.

Der *dritte Fundamentalsatz* endlich sagt aus, dass die r^3 Constanten c_{iks}, die in den Gleichungen (A) auftreten, gewisse Relationen erfüllen und dass umgekehrt zu jedem gegebenen System von r^3 Constanten c_{iks}, das die betreffenden Relationen erfüllt, r unabhängige infinitesimale Transformationen: $X_1 f \ldots . X_r f$ gefunden werden können, die gerade in den Beziehungen (A) stehen.

Keiner dieser drei Fundamentalsätze ist entbehrlich, wenn man ein vollständiges Gebäude der Gruppentheorie errichten will; fragt man dagegen, welcher unter ihnen am häufigsten benutzt wird, so muss man sagen, dass der zweite Fundamentalsatz bei allen gruppentheoretischen Untersuchungen ohne Vergleich die häufigste Anwendung findet. Wir bezeichnen deshalb diesen zweiten Satz wohl auch als den *Hauptsatz* der ganzen Gruppentheorie.

Wir wollen jetzt die drei *Fundamentalsätze* der Reihe nach etwas eingehender besprechen; es kommt uns dabei hauptsächlich darauf an, den begrifflichen Inhalt dieser Sätze und der früher für sie gelieferten Beweise möglichst durchsichtig zu machen. Wir bemerken jedoch gleich hier, dass wir dabei alle Fragen über die Bereiche, innerhalb deren die auftretenden Functionen definirt sind, bei Seite lassen und betreffs dieser Fragen auf die Entwicklungen des Abschnitts I verweisen.

§ 107.

Die Gleichungen:

$$(1) \qquad x_i' = f_i(x_1 \ldots x_n;\ a_1 \ldots a_r) \quad (i = 1 \ldots n)$$

mit den r wesentlichen Parametern: $a_1 \ldots a_r$ mögen eine beliebige Schaar von ∞^r verschiedenen Transformationen darstellen, also vor-

läufig noch nicht gerade eine r-gliedrige Gruppe; die Transformation (1) dieser Schaar möge der Kürze wegen mit $S_{(a)}$ bezeichnet werden.

Ist nun $S_{(a+\delta a)}$ eine beliebige, in der Schaar (1) enthaltene Transformation, die der Transformation $S_{(a)}$ unendlich benachbart ist, so kann man $S_{(a+\delta a)}$ auf zwei verschiedene Weisen aus der Transformation $S_{(a)}$ und aus einer infinitesimalen Transformation zusammensetzen, nämlich entweder, indem man zuerst die Transformation $S_{(a)}$ ausführt und dann die infinitesimale Transformation: $S_{(a)}^{-1} S_{(a+\delta a)}$ oder indem man zuerst die infinitesimale Transformation: $S_{(a+\delta a)} S_{(a)}^{-1}$ und dann die Transformation $S_{(a)}$ ausführt.

Durch die beiden unendlich benachbarten Transformationen: $S_{(a)}$ und $S_{(a+\delta a)}$ der Schaar (1) *sind demnach zwei infinitesimale Transformationen: $S_{(a)}^{-1} S_{(a+\delta a)}$ und: $S_{(a+\delta a)} S_{(a)}^{-1}$ definirt.* Die Identität:

$$S_{(a)}^{-1} \cdot S_{(a+\delta a)} S_{(a)}^{-1} \cdot S_{(a)} = S_{(a)}^{-1} S_{(a+\delta a)}$$

zeigt jedoch, dass diese beiden infinitesimalen Transformationen in einer sehr einfachen Beziehung zu einander stehen: *die Transformation: $S_{(a)}^{-1} S_{(a+\delta a)}$ wird nämlich erhalten, wenn man in die Transformation: $S_{(a+\delta a)} S_{(a)}^{-1}$ vermöge der Transformation $S_{(a)}$ neue Veränderliche einführt.*

Setzt man voraus, dass sich durch Auflösung der Gleichungen (1) nach $x_1 \ldots x_n$ ergiebt:

$$(1') \qquad x_i = F_i(x_1' \ldots x_n';\ a_1 \ldots a_r) \quad (i = 1 \ldots n),$$

so kann man die besprochenen infinitesimalen Transformationen wirklich hinschreiben. Man findet für die infinitesimale Transformation: $S_{(a)}^{-1} S_{(a+\delta a)}$ die Gleichungen:

$$x_i' = f_i(F_1(x, a) \ldots F_n(x, a);\ a_1 + \delta a_1, \ldots, a_r + \delta a_r),$$

die wegen der Identitäten:

$$f_i(F_1(x, a) \ldots F_n(x, a);\ a_1 \ldots a_r) \equiv x_i$$

die Gestalt:

$$(2) \qquad x_i' = x_i + \sum_1^r \delta a_k \left[\frac{\partial f_i(\mathfrak{x}, a)}{\partial a_k}\right]_{\mathfrak{x} = F(x, a)} \quad (i = 1 \ldots n)$$

annehmen. Für die infinitesimale Transformation: $S_{(a+\delta a)} S_{(a)}^{-1}$ findet man ebenso die Gleichungen:

$$x_i' = F_i(f_1(x, a + \delta a) \ldots f_n(x, a + \delta a);\ a_1 \ldots a_r),$$

aus denen durch Entwicklung nach den unendlich kleinen Grössen: $\delta a_1 \ldots \delta a_r$ die Gleichungen:

$$x_i' = x_i + \sum_1^r \delta a_k \sum_1^n \frac{\partial f_\nu(x, a)}{\partial a_k} \left[\frac{\partial F_i(\mathfrak{x}, a)}{\partial \mathfrak{x}_\nu}\right]_{\mathfrak{x} = f(x, a)} \quad (i = 1 \ldots n)$$

hervorgehen. Diese Gleichungen kann man aber sehr wesentlich vereinfachen. Aus der Identität:

$$F_i(f_1(x, a) \dots f_n(x, a);\ a_1 \dots a_r) \equiv x_i$$

ergiebt sich nämlich durch Differentiation nach a_k:

$$\sum_1^n \left[\frac{\partial F_i(\xi, a)}{\partial \xi_\nu}\right]_{\xi = f(x, a)} \frac{\partial f_\nu(x, a)}{\partial a_k} + \left[\frac{\partial F_i(\xi, a)}{\partial a_k}\right]_{\xi = f(x, a)} \equiv 0,$$

also bekommt die infinitesimale Transformation: $S_{(a+\delta a)} S_{(a)}^{-1}$ die einfache Form:

$$(3) \qquad x_i' = x_i - \sum_1^r \delta a_k \left[\frac{\partial F_i(\xi, a)}{\partial a_k}\right]_{\xi = f(x, a)} \qquad (i = 1 \dots n).$$

Noch schneller hätte man zu dieser Form gelangen können, wenn man beachtet hätte, dass

$$S_{(a+\delta a)} S_{(a)}^{-1} = \left((S_{(a)}^{-1})^{-1} S_{(a+\delta a)}^{-1}\right)^{-1},$$

eine Gleichung, die in Formeln gekleidet unmittelbar zu den Gleichungen (3) führt.

Ertheilt man den a bestimmte Werthe, lässt aber die δa willkürlich, so stellen die Gleichungen (2) und (3) zwei Schaaren von infinitesimalen Transformationen dar, die der Transformation: $x_i' = f_i(x, a)$ durch die Gleichungen (1) zugeordnet sind. Es ist leicht zu sehen, dass beide Schaaren im Allgemeinen aus je ∞^{r-1} verschiedenen infinitesimalen Transformationen bestehen.

In der That, die infinitesimalen Transformationen (2) sind sämmtlich aus den r infinitesimalen Transformationen:

$$Z_k f = \sum_1^n \left[\frac{\partial f_i(\xi, a)}{\partial a_k}\right]_{\xi = F(x, a)} \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1 \dots r)$$

linear abgeleitet. Nun aber sind unter den gemachten Voraussetzungen die r Parameter $a_1 \dots a_r$ in den Gleichungen (1) wesentlich, was nach Abschn. I, S. 13 dann und nur dann eintritt, wenn es nicht möglich ist, r solche nicht sämmtlich verschwindende Functionen: $\chi_1 \dots \chi_r$ von den a allein anzugeben, dass die n Gleichungen:

$$\sum_1^r \chi_k(a_1 \dots a_r) \frac{\partial f_i(\xi, a)}{\partial a_k} = 0 \qquad (i = 1 \dots n)$$

identisch bestehen. Demnach können auch die infinitesimalen Transformationen: $Z_1 f \dots Z_r f$ keine Relation von der Form:

$$\sum_1^r {}_k \chi_k(a_1 \ldots a_r) Z_k f = 0$$

befriedigen, ohne dass $\chi_1 \ldots \chi_r$ alle verschwinden. Hierin liegt, dass die r infinitesimalen Transformationen: $Z_1 f \ldots Z_r f$ für allgemeine Werthe der a von einander unabhängig sind, und das kommt wieder darauf hinaus, dass die Schaar (2) für jedes Werthsystem: $a_1 \ldots a_r$ von allgemeiner Lage aus ∞^{r-1} verschiedenen infinitesimalen Transformationen besteht. Für die Schaar (3) gilt natürlich dasselbe, denn aus ihr wird ja die Schaar (2) erhalten, wenn man vermöge der Transformation $S_{(a)}$ neue Veränderliche einführt.

Wir sehen also, dass die Schaar der ∞^r *Transformationen* (1) *jeder ihrer Transformationen* $S_{(a)}$ *zwei Schaaren* (2) *und* (3) *von je* ∞^{r-1} *infinitesimalen Transformationen zuordnet. Diese beiden Schaaren sind so beschaffen, dass man jede der Transformation* $S_{(a)}$ *unendlich benachbarte Transformation* $S_{(a+\delta a)}$ *der Schaar* (1) *erhält, indem man entweder zuerst* $S_{(a)}$ *und dann eine geeignete infinitesimale Transformation der Schaar* (2) *ausführt, oder indem man zuerst eine geeignete infinitesimale Transformation der Schaar* (3) *und dann die Transformation* $S_{(a)}$ *ausführt.*

Besonders erwähnt sei noch ein Umstand, der aus den soeben angestellten Betrachtungen folgt: es ergiebt sich nämlich, dass umgekehrt, wenn die Schaar (2) für allgemeine Werthe der a r unabhängige infinitesimale Transformationen enthält und also aus ∞^{r-1} verschiedenen infinitesimalen Transformationen besteht, zugleich die Schaar (1) aus ∞^r verschiedenen endlichen Transformationen besteht. *Demnach deckt sich die Forderung, dass die Schaar* (2) *für allgemeine Werthe von* $a_1 \ldots a_r$ *gerade* r *unabhängige infinitesimale Transformationen enthalte, mit der Forderung, dass die* r *Parameter* $a_1 \ldots a_r$ *in den Gleichungen* (1) *wesentlich seien.*

§ 108.

Nunmehr wollen wir insbesondere voraussetzen, dass die ∞^r Transformationen (1) eine r-gliedrige Gruppen bilden, dass also die Gleichungen, die sich aus (1) und:

$$(4) \qquad x_i'' = f_i(x_1' \ldots x_n';\ b_1 \ldots b_r) \quad (i = 1 \ldots n)$$

durch Fortschaffung der x' ergeben, nämlich die Gleichungen:

$$(5) \qquad x_i'' = f_i(f_1(x, a) \ldots f_n(x, a);\ b_1 \ldots b_r) \quad (i = 1 \ldots n)$$

die Form:

$$(5') \qquad x_i'' = f_i(x_1 \ldots x_n;\ c_1 \ldots c_r) \quad (i = 1 \ldots n)$$

erhalten können, wo die c gewisse Functionen:

$$c_k = \varphi_k(a_1 \ldots a_r;\ b_1 \ldots b_r) \quad (k = 1 \ldots r) \tag{6}$$

der a und b allein sind. Diese Voraussetzung kann offenbar kürzer durch die symbolische Gleichung:

$$S_{(a)}\, S_{(b)} = S_{(c)} \tag{7}$$

ausgedrückt werden.

Ertheilen wir den b feste Werthe, während wir die a willkürlich lassen, so bestimmt die linke Seite der Gleichung (7) augenscheinlich eine Schaar von ∞^r Transformationen; von der rechten Seite muss dasselbe gelten, folglich sind die c_k unabhängige Functionen von $a_1 \ldots a_r$. Genau so ergiebt sich, dass die c_k auch unabhängige Functionen von $b_1 \ldots b_r$ sind: kurz, die Gleichungen (6) sind sowohl nach den a als nach den b auflösbar, ein Ergebniss, dass wir in Abschnitt I (auf S. 17 f.) rein analytisch, aber deshalb auch auf ziemlich umständliche Weise abgeleitet haben.

Aus der Gleichung (7) folgt ohne Weiteres die nachstehende:

$$S_{(a+\delta a)}\, S_{(b+\delta b)} = S_{(c+\delta c)},$$

wo die δc aus den Gleichungen (6) durch Differentiation gefunden werden. Da die Gleichungen (6) sowohl nach $a_1 \ldots a_r$ als nach $b_1 \ldots b_r$ auflösbar sind, so können wir die δa und die δb stets so bestimmen, dass die δc alle verschwinden; die betreffenden Werthe der δa und δb sind dann durch die Gleichungen:

$$\sum_1^r{}_j \left\{ \frac{\partial \varphi_k(a,b)}{\partial a_j}\, \delta a_j + \frac{\partial \varphi_k(a,b)}{\partial b_j}\, \delta b_j \right\} = 0 \quad (k = 1 \ldots r) \tag{8}$$

definirt, und wir haben, sobald diese Gleichungen erfüllt sind:

$$S_{(a+\delta a)}\, S_{(b+\delta b)} = S_{(c)} = S_{(a)}\, S_{(b)}. \tag{9}$$

Nun aber können wir nach § 107 die Transformation $S_{(a+\delta a)}$ erhalten, indem wir zuerst die Transformation $S_{(a)}$ und dann die der Schaar (2) angehörige infinitesimale Transformation: $S_{(a)}^{-1} S_{(a+\delta a)}$ ausführen, und ebenso können wir $S_{(b+\delta b)}$ erhalten, wenn wir zuerst die infinitesimale Transformation: $S_{(b+\delta b)} S_{(b)}^{-1}$ und dann die Transformation: $S_{(b)}$ ausführen. Demnach können wir die Gleichung (9) auch schreiben:

$$S_{(a)} \,.\, S_{(a)}^{-1} S_{(a+\delta a)} \,.\, S_{(b+\delta b)} S_{(b)}^{-1} \,.\, S_b = S_{(a)} \,.\, S_{(b)},$$

und hieraus ergiebt sich:

$$S_{(a)}^{-1} S_{(a+\delta a)} \,.\, S_{(b+\delta b)} S_{(b)}^{-1} = 1,$$

das heisst gleich der identischen Transformation. *Die beiden infinitesimalen Transformationen:* $S_{(a)}^{-1} S_{(a+\delta a)}$ *und* $S_{(b+\delta b)} S_{(b)}^{-1}$ *sind also unter*

den gemachten Voraussetzungen zu einander invers; da überdies die zu $S_{(b+\delta b)} S_{(b)}^{-1}$ inverse Transformation offenbar die Form hat: $S_{(b-\delta b)} S_{(b)}^{-1}$, so bekommen wir schliesslich:

$$S_{(a)}^{-1} S_{(a+\delta a)} = S_{(b-\delta b)} S_{(b)}^{-1}. \tag{10}$$

Die Gleichung (10) ist eine Folge der Gleichung (7), sie enthält aber die Grössen: $c_1 \ldots c_r$ nicht mehr. Da nun die a und b an und für sich durch gar keine Relation verknüpft sind, so muss die Gleichung (10) bei beliebiger Wahl von $a_1 \ldots a_r$ und $b_1 \ldots b_r$ gültig sein für alle Werthe der δa_k und δb_k, die den Gleichungen (8) genügen. Die Gleichungen (8) lassen sich aber sowohl nach den δa_k als nach den δb_k auflösen und daher entweder in der Form:

$$\delta b_j = \sum_1^r {}_k \Psi_{jk}(a_1 \ldots a_r;\ b_1 \ldots b_r)\, \delta a_k \quad (j = 1 \ldots r) \tag{8'}$$

oder in der Form:

$$\delta a_j = \sum_1^r {}_k A_{kj}(a_1 \ldots a_r;\ b_1 \ldots b_r)\, \delta b_k \quad (j = 1 \ldots r) \tag{8''}$$

schreiben (vgl. Abschn. I, S. 29 und 30); aus ihnen ergiebt sich mithin weder zwischen $\delta b_1 \ldots \delta b_r$ allein eine Relation, noch eine zwischen $\delta a_1 \ldots \delta a_r$ allein. Denken wir uns daher für $a_1 \ldots a_r$ und $b_1 \ldots b_r$ zwei beliebig aber fest gewählte Werthsysteme von allgemeiner Lage eingesetzt und die δa und δb den Gleichungen (8) unterworfen, sonst jedoch ganz willkürlich, so stellt die linke Seite von (10) die erste der beiden Schaaren von je ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen dar, die nach § 107 der Transformation $S_{(a)}$ zugeordnet sind; die rechte Seite von (10) dagegen stellt die zweite der beiden Schaaren von je ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen dar, die der Transformation $S_{(b)}$ zugeordnet sind, denn es liegt auf der Hand, dass die Schaar der ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen $S_{(b-\delta b)} S_{(b)}^{-1}$ mit der Schaar: $S_{(b+\delta b)} S_{(b)}^{-1}$ identisch ist. Demnach sagt die Gleichung (10) aus, dass die erste der zwei $S_{(a)}$ zugeordneten Schaaren von ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen mit der zweiten der zwei $S_{(b)}$ zugeordneten Schaaren zusammenfällt.

Halten wir jetzt blos $b_1 \ldots b_r$ fest, während wir $a_1 \ldots a_r$ sich ändern lassen, so ergiebt sich aus (10), dass die Schaar der ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen: $S_{(a)}^{-1} S_{(a+\delta a)}$ stets dieselbe bleibt, wie sich auch $a_1 \ldots a_r$ ändern mögen. Genau in entsprechender Weise erkennt man, dass auch die Schaar der ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen: $S_{(b-\delta b)} S_{(b)}^{-1}$ sich nicht mit $b_1 \ldots b_r$ ändert. Da nun wegen der Gleichung (10) die beiden Schaaren: $S_{(a)}^{-1} S_{(a+\delta a)}$ und $S_{(b-\delta b)} S_{(b)}^{-1}$

zusammenfallen, so liegt hierin zugleich, dass die beiden Schaaren von ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen, die durch die beiden Ausdrücke: $S_{(a)}^{-1} S_{(a+\delta a)}$ und $S_{(a+\delta a)} S_{(a)}^{-1}$ dargestellt werden, mit einander identisch sind und sich beide nicht mit $a_1 \ldots a_r$ ändern*).

Wir sehen hieraus, dass alle die Schaaren von ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen, die die Schaar (1) den ∞^r ihr angehörigen Transformationen zuordnet, mit einander identisch sind, sobald die Schaar (1) eine r-gliedrige Gruppe bildet. Mit andern Worten:

Zu jeder r-gliedrigen Gruppe (1) *von ∞^r Punkttransformationen gehört eine ganz bestimmte Schaar von ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen. Diese Schaar besteht aus allen infinitesimalen Transformationen, die aus r gewissen, von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen linear ableitbar sind, und sie ist so beschaffen, dass man aus jeder Transformation $S_{(a)}$ der Gruppe* (1) *jede unendlich benachbarte Transformation $S_{(a+\delta a)}$ der Gruppe erhalten kann, indem man entweder zuerst die Transformation $S_{(a)}$ ausführt und dann eine geeignete infinitesimale Transformation der bewussten Schaar, oder indem man zuerst eine geeignete infinitesimale Transformation dieser Schaar ausführt und dann die Transformation $S_{(a)}$.*

Wir wollen jetzt zusehen, was für analytische Ergebnisse aus den vorhin angestellten begrifflichen Ueberlegungen folgen.

Die infinitesimale Transformation: $S_{(a)}^{-1} S_{(a+\delta a)}$ wird nach S. 547 durch die Gleichungen:

$$(2) \qquad x_i' = x_i + \sum_1^r{}_k \delta a_k \left[\frac{\partial f_i(\xi, a)}{\partial a_k}\right]_{\xi = F(x, a)} \qquad (i = 1 \ldots n)$$

dargestellt und die infinitesimale Transformation: $S_{(b-\delta b)} S_{(b)}^{-1}$ nach S. 548 durch die Gleichungen:

*) Wenn wir uns auch hier auf die Untersuchung der Bereiche, innerhalb deren die auftretenden Functionen definirt sind, nicht einlassen, so können wir doch eine Bemerkung nicht unterdrücken. Aus den vorstehenden Betrachtungen ergiebt sich nämlich, dass die in Abschn. I auf S. 15 f. gemachten Voraussetzungen durch allgemeinere ersetzt werden können. Man braucht nicht zu verlangen, dass es innerhalb der dort definirten Bereiche (x) und (a) zwei kleinere Bereiche $((x))$ und $((a))$ gebe, die so beschaffen sind, dass jedesmal, wenn die a und b innerhalb $((a))$ und die x innerhalb $((x))$ liegen, zugleich die x' in den Bereich (x) und die c in den Bereich (a) fallen; es genügt vielmehr, anzunehmen, dass es in dem Bereiche (x) einen kleineren Bereich $((x))$ und in dem Bereiche (a) zwei kleinere Bereiche $((a))$ und $((b))$ gebe, die so beschaffen sind, dass jedesmal, wenn die x in $((x))$, die a in $((a))$ und die b in $((b))$ liegen, die x' dem Bereiche (x) und die c dem Bereiche (a) angehören.

$$(3') \qquad x_i' = x_i + \sum_1^r{}^k \delta b_k \left[\frac{\partial F_i(\mathfrak{x}, b)}{\partial b_k}\right]_{\mathfrak{x} = f(x, b)} \qquad (i = 1 \ldots n).$$

Unterwirft man insbesondere die δa und δb den Gleichungen (8), so gilt die Gleichung (10), vermöge (8) wird also:

$$\sum_1^r{}^k \delta a_k \left[\frac{\partial f_i(\mathfrak{x}, a)}{\partial a_k}\right]_{\mathfrak{x} = F(x, a)} = \sum_1^r{}^k \delta b_k \left[\frac{\partial F_i(\mathfrak{x}, b)}{\partial b_k}\right]_{\mathfrak{x} = f(x, b)}$$

für alle Werthe der x, a und b. Drücken wir daher mit Hülfe der Gleichungen (8′), die ja mit (8) äquivalent sind, die δb durch die δa aus und berücksichtigen wir, dass zwischen $\delta a_1 \ldots \delta a_r$ allein keine Relation besteht, so ergiebt sich:

$$(11) \qquad \left[\frac{\partial f_i(\mathfrak{x}, a)}{\partial a_k}\right]_{\mathfrak{x} = F(x, a)} \equiv \sum_1^r{}^j \Psi_{jk}(a, b) \left[\frac{\partial F_i(\mathfrak{x}, b)}{\partial b_j}\right]_{\mathfrak{x} = f(x, b)}$$
$$(i = 1 \ldots n; \quad k = 1 \ldots r).$$

In derselben Weise ergeben sich durch Benutzung der Gleichungen (8″) die mit (11) äquivalenten Identitäten:

$$(12) \qquad \left[\frac{\partial F_i(\mathfrak{x}, b)}{\partial b_k}\right]_{\mathfrak{x} = f(x, b)} \equiv \sum_1^r A_{kj}(a, b) \left[\frac{\partial f_i(\mathfrak{x}, a)}{\partial a_j}\right]_{\mathfrak{x} = F(x, a)}$$
$$(i = 1 \ldots n; \quad k = 1 \ldots r).$$

Hier haben, wie schon oben angedeutet, die Ψ und die A dieselbe Bedeutung wie auf S. 29 f. von Abschnitt I. Andrerseits ist nach der auf S. 28 daselbst angewandten Bezeichnung:

$$(13) \qquad \left[\frac{\partial F_i(\mathfrak{x}, b)}{\partial b_k}\right]_{\mathfrak{x} = f(x, b)} = \Phi_{ki}(x_1 \ldots x_n;\ b_1 \ldots b_r);$$

allerdings wurden damals die Φ auf andre Weise gebildet, man überzeugt sich aber leicht, dass die linke Seite von (13) mit der damals gebildeten Function: $\Phi_{ki}(x, b)$ übereinstimmt.

Da die Identitäten (11) und (12) für alle Werthe der x, der a und der b gültig sind, so bleiben sie auch dann noch erfüllt, wenn man für $b_1 \ldots b_r$ irgend ein festes Werthsystem: $\omega_1 \ldots \omega_r$ von allgemeiner Lage einsetzt. Thut man das und wendet man dieselben Abkürzungen an wie auf S. 31 von Abschn. I, so erhält man aus (11) und (12) die folgenden neuen Identitäten:

$$(11') \qquad \left[\frac{\partial f_i(\mathfrak{x}, a)}{\partial a_k}\right]_{\mathfrak{x} = F(x, a)} \equiv \sum_1^r{}^j \psi_{jk}(a)\, \xi_{ji}(x)$$

$$(12') \qquad \xi_{ki}(x) \equiv \sum_1^r{}^j \alpha_{kj}(a) \left[\frac{\partial f_i(\mathfrak{x}, a)}{\partial a_j}\right]_{\mathfrak{x} = F(x, a)},$$

die natürlich auch mit einander äquivalent sind. Aus (11′) und (12) ergiebt sich schliesslich noch die Identität:

$$(12'') \qquad \left[\frac{\partial F_i(\mathfrak{x}, b)}{\partial b_k}\right]_{\mathfrak{x}=f(x,b)} = \sum_1^r \left\{ \sum_1^r A_{kj}(a, b)\, \psi_{\tau j}(a) \right\} \xi_{\tau i}(x).$$

Hiermit ist das Ergebniss, zu dem wir vorhin durch begriffliche Ueberlegungen gelangt sind, analytisch ausgedrückt. Da nämlich unter den gemachten Voraussetzungen die Determinante der $\psi_{jk}(a)$ einen endlichen von Null verschiedenen Werth hat, so zeigen die Identitäten (11′) unmittelbar, dass die ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen: $S_{(a)}^{-1} S_{(a+\delta a)}$, die durch die Gleichungen (2) auf S. 552 dargestellt werden, aus den r infinitesimalen Transformationen:

$$X_k f = \sum_1^n \xi_{ki}(x_1 \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1 \ldots r)$$

linear abgeleitet sind. Ebenso zeigen die Identitäten (12″), dass von den ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen: $S_{(b+\delta b)} S_{(b)}^{-1}$ dasselbe gilt. Hierin aber liegt, dass die r infinitesimalen Transformationen: $X_1 f \ldots X_r f$ von einander unabhängig sind und dass die Schaar von ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen, die durch den Ausdruck:

$$(14) \qquad \sum_1^r \lambda_k X_k f$$

mit den r Parametern $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ dargestellt wird, eben die Schaar von ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen ist, die im Sinne von S. 552 zu der Gruppe (1) gehört.

Macht man in den Identitäten (11′) und (12′) die Substitution: $x = f(\mathfrak{x}, a)$ und schreibt man dann x' für x und x für $\mathfrak{x}$, so erhält man neue Identitäten, die aussagen, dass die beiden mit einander äquivalenten Systeme von Differentialgleichungen:

$$(15) \qquad \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_1^r \psi_{jk}(a)\, \xi_{ji}(x') \qquad (i = 1 \ldots n;\ k = 1 \ldots r)$$

und:

$$(16) \qquad \xi_{ki}(x') = \sum_1^r \alpha_{kj}(a) \frac{\partial x_i'}{\partial a_j} \qquad (i = 1 \ldots n;\ k = 1 \ldots r)$$

bei der Substitution: $x_i' = f_i(x, a)$ identisch erfüllt werden. Damit sind wir wieder zu den grundlegenden Differentialgleichungen des Theorems 3 auf S. 33 von Abschnitt I gelangt. Aber diese Differentialgleichungen erscheinen uns jetzt in einem andern Lichte. Da sie

nämlich mit den Identitäten (11′) gleichbedeutend sind, so sagen sie einfach aus, dass man aus einer beliebig gewählten Transformation $S_{(a)}$ der Gruppe (1) jede unendlich benachbarte Transformation $S_{(a+\delta a)}$ der Gruppe erhalten kann, indem man zuerst $S_{(a)}$ und dann eine geeignete infinitesimale Transformation der Schaar (14) ausführt. Die betreffende infinitesimale Transformation ist übrigens auch leicht angebbar, sie wird ja durch den Ausdruck: $S_{(a)}^{-1} S_{(a+\delta a)}$ dargestellt und besitzt daher die Form:

$$(17) \qquad x_i' = x_i + \sum_1^r{}_k \delta a_k \sum_1^r{}_j \psi_{jk}(a)\, \xi_{ji}(x) \quad (i = 1 \ldots n).$$

Man beachte übrigens, dass die eben ausgesprochene Deutung der grundlegenden Differentialgleichungen nicht davon abhängig ist, dass die Schaar (1), die unsre Differentialgleichungen erfüllt, eine Gruppe bildet. Hat man nämlich irgend eine Schaar (1) von ∞^r Transformationen, die den Differentialgleichungen (15) oder den äquivalenten (16) genügt, so bestehen für diese Schaar die Identitäten (11′) und es lässt sich demnach jede Transformation $S_{(a+\delta a)}$ der Schaar dadurch herstellen, dass man zuerst die Transformation $S_{(a)}$ und sodann eine geeignete infinitesimale Transformation der Schaar (14) ausführt.

Wir kommen im nächsten Paragraphen hierauf zurück.

Aus den Identitäten (12″) ergiebt sich ein System von Differentialgleichungen, das ein Seitenstück zu dem Systeme (15) bildet. Die Ableitung dieses Systems ist fast genau so wie auf S. 40 f. von Abschnitt I. Wie dort beweist man, dass der Ausdruck:

$$\sum_1^r{}_j A_{kj}(a, b)\, \psi_{\tau j}(a)$$

von $a_1 \ldots a_r$ frei ist und durch eine Function: $\vartheta_{\tau k}(b)$ von den b allein ersetzt werden kann. Sodann findet man leicht, dass die Differentialgleichungen:

$$(18) \qquad \frac{\partial x_i}{\partial a_k} = \sum_1^r{}_j \vartheta_{jk}(a)\, \xi_{ji}(x) \quad (i = 1 \ldots n;\ k = 1 \ldots r)$$

bei der Substitution: $x_i = F_i(x', a)$ identisch erfüllt werden, dass also $x_1 \ldots x_n$, wenn man sie sich aus den Gleichungen: $x_i' = f_i(x, a)$ als Functionen der x' und der a bestimmt denkt, den Differentialgleichungen (18) genügen.

Da die Differentialgleichungen (18) mit den Identitäten (12″) gleichbedeutend sind, so sagen sie offenbar aus, dass jede Transformation $S_{(a+\delta a)}$ der Gruppe (1) dadurch erhalten werden kann, dass

man zuerst eine geeignete infinitesimale Transformation der Schaar (14) und dann die Transformation $S_{(a)}$ ausführt. Die betreffende infinitesimale Transformation wird durch den Ausdruck: $S_{(a+\delta a)} S_{(a)}^{-1}$ dargestellt und lautet daher:

$$(19) \qquad x_i' = x_i - \sum_1^r{}_k \delta a_k \sum_1^r{}_j \vartheta_{jk}(a)\, \xi_{ji}(x) \quad (i = 1 \ldots n)$$

(vgl. S. 548 und S. 554 Gl. (12″)).

Auch hier ist zu bemerken, dass diese Deutung der Differentialgleichungen (18) nicht daran hängt, dass die Schaar (1) eine Gruppe bildet; denn wenn für irgend eine Schaar (1) von ∞^r Transformationen die Differentialgleichungen (18) erfüllt sind, so hat das immer den Sinn, dass die Transformation $S_{(a+\delta a)}$ der Schaar (1) in der eben beschriebenen Weise erhalten werden kann, mag nun die Schaar (1) eine Gruppe bilden oder nicht.

Wir sahen auf S. 547, dass die beiden infinitesimalen Transformationen: $S_{(a)}^{-1} S_{(a+\delta a)}$ und $S_{(a+\delta a)} S_{(a)}^{-1}$ in der einfachen Beziehung stehen:

$$S_{(a)}^{-1} \cdot S_{(a+\delta a)} S_{(a)}^{-1} \cdot S_{(a)} = S_{(a)}^{-1} S_{(a+\delta a)},$$

dass also die erste erhalten wird, wenn man in die zweite vermöge der Transformation $S_{(a)}$ neue Veränderliche einführt. Ertheilen wir den a feste Werthe, während wir die δa willkürlich lassen, so stellen die beiden Ausdrücke: $S_{(a)}^{-1} S_{(a+\delta a)}$ und $S_{(a+\delta a)} S_{(a)}^{-1}$ zwei Schaaren von je ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen dar und diese beiden Schaaren sind unter den Voraussetzungen des gegenwärtigen Paragraphen mit einander und mit der Schaar (14) identisch (s. S. 551 f. und S. 554). Demnach ergiebt sich, dass *die Schaar der* ∞^{r-1} *infinitesimalen Transformationen* (14) *bei jeder Transformation* $S_{(a)}$ *unsrer Gruppe invariant bleibt.*

Um dieses Ergebniss analytisch auszudrücken, erinnern wir daran, dass die infinitesimale Transformation $S_{(a)}^{-1} S_{(a+\delta a)}$ durch die Gleichungen (17) und die infinitesimale Transformation $S_{(a+\delta a)} S_{(a)}^{-1}$ durch die Gleichungen (19) dargestellt wird. Setzen wir daher: $\delta a_k = u_k \delta t$, wo $u_1 \ldots u_r$ endliche Grössen sind, so wird das Symbol der infinitesimalen Transformation: $S_{(a)}^{-1} S_{(a+\delta a)}$ sein:

$$(20) \qquad \sum_1^r{}_k u_k \sum_1^r{}_j \psi_{jk}(a)\, X_j f$$

und das Symbol von $S_{(a+\delta a)} S_{(a)}^{-1}$:

$$(21) \qquad -\sum_1^r{}_k u_k \sum_1^r{}_j \vartheta_{jk}(a)\, X_j f.$$

Wegen der oben geschilderten Beziehung zwischen beiden infinitesimalen Transformationen muss nun der Ausdruck (21) bei der Transformation $S_{(a)}$ die Form (20) erhalten und zwar muss das bei beliebigen Werthen von $u_1 \ldots u_r$ gelten. Führen wir demnach die Abkürzung ein:

$$\sum_1^n{}_i \xi_{ki}(x_1' \ldots x_n') \frac{\partial f}{\partial x_i'} = X_k' f,$$

so ergiebt sich, dass vermöge der Gleichungen:

$$(1) \qquad x_i' = f_i(x_1 \ldots x_n;\ a_1 \ldots a_r) \quad (i = 1 \ldots n)$$

unsrer Gruppe die Relationen:

$$(22) \qquad \sum_1^r{}_j \vartheta_{jk}(a)\, X_j f + \sum_1^r{}_j \psi_{jk}(a)\, X_j' f = 0 \quad (k = 1 \ldots r)$$

bestehen, unter f eine beliebige Function von $x_1 \ldots x_n$ verstanden. Es sind das dieselben Gleichungen, die wir in Abschnitt I auf S. 44 abgeleitet haben.

Das Bestehen der Gleichungen (22) ist eine Folge der Differentialgleichungen (15) und (18) und ausserdem der Identität:

$$S_{(a)}^{-1} \cdot S_{(a+\delta a)} S_{(a)}^{-1} \cdot S_{(a)} = S_{(a)}^{-1} S_{(a+\delta a)},$$

die für jede Schaar (1) von ∞^r Transformationen gültig ist. Demnach ist das Bestehen der Gleichungen (22) nicht daran geknüpft, dass die Schaar (1) eine Gruppe bildet, sondern nur daran, dass für diese Schaar die Differentialgleichungen (15) und (18) erfüllt sind. Das gleichzeitige Erfülltsein der Differentialgleichungen (15) und (18) sagt eben aus, dass die Schaar der ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen (14) bei jeder Transformation der Schaar (1) invariant bleibt, mag nun die Schaar (1) eine Gruppe bilden oder nicht.

Durch das Vorstehende sind alle Ergebnisse des 2. Kapitels von Abschnitt I wieder gewonnen, soweit sie sich nicht auf die Gültigkeitsbereiche der auftretenden Functionen beziehen. Dass unsre jetzige Ableitung dieser Ergebnisse grössere Durchsichtigksit besitzt, liegt auf der Hand; aber dieser Vorzug ist nur erreicht durch die Benutzung einer Reihe von gruppentheoretischen Begriffen, die wir damals nicht als bekannt voraussetzen konnten.

§ 109.

Wie in Abschn. I, Kap. 4 auf S. 67 ff. betrachten wir jetzt zunächst eine beliebige Schaar:

$$x_i' = f_i(x_1 \dots x_n;\ a_1 \dots a_r) \qquad (i = 1 \dots n) \tag{1}$$

von ∞^r Transformationen und setzen nur voraus, dass diese Schaar Differentialgleichungen von der Form:

$$\frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_1^r{}_j \psi_{jk}(a)\, \xi_{ji}(x') \qquad (i = 1 \dots n;\ k = 1 \dots r) \tag{15}$$

erfüllt.

Unter diesen Voraussetzungen lässt sich nach S. 554 f. jede Transformation $S_{(a+\delta a)}$ der Schaar (1), die der Transformation: $S_{(a)}$ unendlich benachbart ist, dadurch herstellen, dass man zuerst die Transformation $S_{(a)}$ und sodann eine geeignete infinitesimale Transformation der Schaar:

$$\sum_1^r{}_k \lambda_k X_k f \tag{14}$$

ausführt, nämlich die infinitesimale Transformation:

$$x_i' = x_i + \sum_1^r{}_k \delta a_k \sum_1^r{}_j \psi_{jk}(a)\, \xi_{ji}(x) \qquad (i = 1 \dots n). \tag{17}$$

Hierin liegt nach S. 549 zugleich, dass die r infinitesimalen Transformationen:

$$\sum_1^r{}_j \psi_{jk}(a)\, X_j f \qquad (k = 1 \dots r)$$

für allgemeine Werthe der a von einander unabhängig sind, es verschwindet also erstens die Determinante der $\psi_{jk}(a)$ nicht identisch und zweitens sind: $X_1 f \dots X_r f$ nothwendig unabhängige infinitesimale Transformationen. Die Gleichungen (15) lassen sich in Folge dessen für allgemeine Werthe der a auflösen und auf die Form (16) bringen.

Denken wir uns jetzt zuerst die Transformation: $S_{(a)}$ ausgeführt und dann die infinitesimale Transformation (14), so müssen wir eine $S_{(a)}$ unendlich benachbarte Transformation $S_{(a+\delta a)}$ erhalten. Diese Transformation $S_{(a+\delta a)}$ ist leicht angebbar. Die infinitesimale Transformation (14) lautet nämlich ausführlich geschrieben:

$$x_i' = x_i + \delta t \sum_1^r{}_j \lambda_j \xi_{ji}(x) \qquad (i = 1 \dots n) \tag{14'}$$

und daraus ergeben sich durch Vergleichung mit (17) wegen der Unabhängigkeit von $X_1 f \dots X_r f$ die Gleichungen:

$$(23) \qquad \sum_1^r{}_k \psi_{jk}(a)\,\delta a_k = \lambda_j\,\delta t \qquad (j = 1 \ldots r)$$

zur Bestimmung von $\delta a_1 \ldots \delta a_r$. Nehmen wir daher an, dass $a_1 \ldots a_r$ ein Werthsystem von allgemeiner Lage ist, für das die Determinante der $\psi_{jk}(a)$ einen endlichen von Null verschiedenen Werth besitzt, und berücksichtigen wir, dass die Gleichungen (15) für allgemeine Werthe der a die Form (16) erhalten können, so bekommen wir für $\delta a_1 \ldots \delta a_r$ die Ausdrücke:

$$(24) \qquad \delta a_k = \delta t \sum_1^r{}_j \lambda_j\, \alpha_{jk}(a) \qquad (k = 1 \ldots r).$$

Wenn wir also zuerst die Transformation $S_{(a)}$ ausführen, in der $a_1 \ldots a_r$ ein Werthsystem von allgemeiner Lage bedeutet, und dann die infinitesimale Transformation (14), so bekommen wir die $S_{(a)}$ unendlich benachbarte Transformationen $S_{(a+\delta a)}$, in der $\delta a_1 \ldots \delta a_r$ durch die Gleichungen (24) bestimmt sind.

Die Gleichungen (24) können als ein simultanes System von gewöhnlichen Differentialgleichungen aufgefasst werden, welches $a_1 \ldots a_r$ als Functionen von t bestimmt. Integriren wir dieses simultane System unter Zugrundelegung der Anfangsbedingungen: $a_k = a_k{}^0$ für $t = 0$, wo $a_1{}^0 \ldots a_r{}^0$ ein Werthsystem von allgemeiner Lage bedeutet, so erhalten wir:

$$(25) \qquad a_k = a_k{}^0 + \frac{t}{1} \sum_1^r{}_j \lambda_j\, \alpha_{jk}(a^0) + \cdots \qquad (k = 1 \ldots r)$$

oder da $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ und t auf den rechten Seiten nur in den Verbindungen: $\lambda_1 t, \ldots, \lambda_r t$ vorkommen:

$$(25') \qquad a_k = \chi_k(\lambda_1 t, \ldots, \lambda_r t;\ a_1{}^0 \ldots a_r{}^0) \qquad (k = 1 \ldots r).$$

Denken wir uns hier $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ und $a_1{}^0 \ldots a_r{}^0$ fest gewählt, dagegen t als willkürlichen Parameter, so bestimmen die Gleichungen (25′) innerhalb der Schaar (1) eine Schaar von ∞^1 Transformationen, und diese Schaar ist offenbar so beschaffen, dass jedesmal, wenn man zuerst die Transformation mit dem Parameter t und dann die infinitesimale Transformation (14) ausführt, man die der Schaar angehörige Transformation mit dem Parameter $t + \delta t$ erhält.

Nun enthält die durch (25′) bestimmte Schaar von ∞^1 Transformationen insbesondere die Transformation:

$$(26) \qquad x_i' = f_i(x_1 \ldots x_n;\ a_1{}^0 \ldots a_r{}^0) \qquad (i = 1 \ldots n),$$

nämlich für $t = 0$. Denkt man sich daher zuerst die Transformation (26) ausgeführt und dann die infinitesimale Transformation (14′)

unendlich oft nach einander, so erhält man stets eine von den ∞^1 Transformationen der durch (25′) bestimmten Schaar. Aber wenn man die infinitesimale Transformation (14′) unendlich oft nach einander ausführt, bekommt man stets eine endliche Transformation der von ihr erzeugten eingliedrigen Gruppe, demnach ist zu vermuthen, dass man auch, wenn man zuerst die Transformation (26) ausführt und dann irgend eine Transformation der von der infinitesimalen Transformation (14) erzeugten eingliedrigen Gruppe, stets eine Transformation der durch (25′) definirten Schaar erhält.

Um den soeben durchgeführten Betrachtungen eine schärfere Fassung zu geben, denken wir uns zuerst die Transformation (26) ausgeführt und dann irgend eine Transformation:

$$x_i'' = V_i(x_1' \dots x_n';\ \lambda_1 t, \dots, \lambda_r t) \quad (i = 1 \dots n) \tag{27}$$

der von (14) erzeugten eingliedrigen Gruppe. Wir werden zeigen, dass die so entstehende Transformation:

$$x_i'' = V_i(f_1(x, a^0) \dots f_n(x, a^0);\ \lambda_1 t, \dots, \lambda_r t) \quad (i = 1 \dots n) \tag{28}$$

mit der Transformation:

$$y_i = f_i(x_1 \dots x_n;\ a_1 \dots a_r) \quad (i = 1 \dots n) \tag{29}$$

zusammenfällt, vorausgesetzt, dass man sich $a_1 \dots a_r$ durch die Gleichungen (25′) bestimmt denkt.

In der That, die x_i'' in den Gleichungen (28) sind vollständig definirt durch die Differentialgleichungen:

$$\frac{dx_i''}{dt} = \sum_1^r{}_k \lambda_k \xi_{ki}(x'') \quad (i = 1 \dots n) \tag{30}$$

zusammen mit den Anfangsbedingungen:

$$[x_i'']_{t=0} = f_i(x_1 \dots x_n;\ a_1^0 \dots a_r^0) \quad (i = 1 \dots n). \tag{31}$$

Andrerseits erfüllen die y_i in den Gleichungen (29) als Functionen von $a_1 \dots a_r$ betrachtet die Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial y_i}{\partial a_k} = \sum_1^r{}_j \psi_{jk}(a)\, \xi_{ji}(y) \quad (k = 1 \dots r;\ i = 1 \dots n)$$

und die Anfangsbedingungen:

$$[y_i]_{a=a^0} = f_i(x_1 \dots x_n;\ a_1^0 \dots a_r^0) \quad (i = 1 \dots n).$$

Drücken wir aber $a_1 \dots a_r$ vermöge (25′) durch t aus, so werden die y_i Functionen von t und erfüllen als solche die Differentialgleichungen:

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_1^r{}_k \frac{\partial y_i}{\partial a_k} \frac{da_k}{dt} = \sum_{kj}^{1 \dots r} \psi_{jk}(a)\, \xi_{ji}(x') \frac{da_k}{dt},$$

die wegen (24) und wegen der Beziehungen zwischen den ψ und den α die einfache Form:

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_1^r{}_k \lambda_k \xi_{ki}(y) \quad (i = 1 \ldots n)$$

annehmen. Bedenkt man überdies, dass man für $t = 0$ erhält: $a_k = a_k^0$ und also: $y_i = f_i(x, a^0)$, so erkennt man sofort, dass $y_i = x_i''$ ist, dass also die beiden Transformationen (28) und (29) wirklich mit einander zusammenfallen, wenn man in (29) für $a_1 \ldots a_r$ die aus (25′) folgenden Werthe einsetzt.

Wir führten vorhin zuerst die Transformation (26) der Schaar (1) aus und sodann die endliche Transformation (27) der von der infinitesimalen Transformation (14) erzeugten eingliedrigen Gruppe. Wir haben gesehen, dass die so entstehende Transformation wieder der Schaar (1) angehört, und dass ihre Parameter $a_1 \ldots a_r$ durch die Gleichungen (25′) bestimmt sind. Lassen wir nun $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ und t sich ändern, so ändern sich auch die Werthe von $a_1 \ldots a_r$, die sich aus den Gleichungen (25′) ergeben. Man kann sogar durch geeignete Wahl von $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ und t erreichen, dass $a_1 \ldots a_r$ jedes beliebige Werthsystem wird, das in einer gewissen Umgebung von $a_1^0 \ldots a_r^0$ liegt; denn die Gleichungen (25), die ja mit (25′) äquivalent sind, lassen sich, da die Determinante der $\alpha_{jk}(a^0)$ unter den gemachten Voraussetzungen nicht verschwindet, nach $\lambda_1 t, \ldots, \lambda_r t$ auflösen und ergeben für: $\lambda_1 t, \ldots, \lambda_r t$ gewöhnliche Potenzreihen von: $a_1 - a_1^0, \ldots, a_r - a_r^0$, die jedenfalls in einer gewissen Umgebung von $a_1^0 \ldots a_r^0$ unbedingt convergiren. Demnach gelangen wir zu dem Satz:

Wenn eine Schaar (1) *von* ∞^r *verschiedenen Transformationen Differentialgleichungen von der Form* (15) *erfüllt, so besitzt sie die folgende Eigenschaft: Führt man zuerst eine beliebige, der Schaar* (1) *angehörige Transformation* (26) *aus, für deren Parameter* $a_1^0 \ldots a_r^0$ *die Determinante der* $\psi_{jk}(a)$ *einen endlichen von Null verschiedenen Werth hat, und führt man sodann eine beliebige endliche Transformation der eingliedrigen Gruppe aus, die von einer infinitesimalen Transformation von der Form:*

$$(14) \qquad \sum_1^r{}_k \lambda_k X_k f$$

erzeugt wird, so gehört die entstehende Transformation stets wieder der Schaar (1) *an. Insbesondere kann man die betreffende eingliedrige Gruppe und ihre endliche Transformation stets so wählen, dass man auf die angegebene Weise jede beliebige Transformation der Schaar* (1) *erhält, deren Parameter* $a_1 \ldots a_r$ *in einer gewissen Umgebung von* $a_1^0 \ldots a_r^0$ *liegen.*

Der vorstehende Satz ist im Wesentlichen mit dem Theorem 9 auf S. 72 von Abschnitt I identisch und auch sein Beweis unterscheidet sich von unserm damaligen Beweise dieses Theorems fast gar nicht. Trotzdem haben wir es vorgezogen, den Satz hier noch einmal zu beweisen, weil es uns nämlich darauf ankam, zu zeigen, dass das in Abschnitt I benutzte Beweisverfahren nur scheinbar auf einem Kunstgriffe (s. Abschn. I, S. 69) beruht. In der That entwickelt sich bei der jetzt gegebenen Darstellung Alles naturgemäss und ohne dass von einem Kunstgriffe die Rede sein könnte.

Aus dem soeben bewiesenen Satze lassen sich bemerkenswerthe Folgerungen ziehen.

Zunächst ist klar, dass die in dem Satze ausgesprochenen Eigenschaften insbesondere jeder solchen Schaar (1) zukommen, die eine r-gliedrige Gruppe bildet, denn in diesem Falle bestehen ja eben nach § 108 Differentialgleichungen von der Form (15).

Aber der Satz leistet noch mehr; er zeigt nämlich unter gewissen Umständen unmittelbar, dass eine Schaar (1), die Differentialgleichungen von der Form (15) befriedigt, eine r-gliedrige Gruppe bildet.

In der That, es sei (1) eine Schaar von ∞^r Transformationen, die Differentialgleichungen von der Form (15) erfüllt, es möge aber ausserdem noch vorausgesetzt werden, dass die Schaar (1) die identische Transformation enthält, und zwar mögen die Parameter: $\bar{a}_1 \dots \bar{a}_r$ der identischen Transformation so beschaffen sein, dass die Determinante der $\psi_{jk}(a)$ für: $a = \bar{a}$ einen endlichen von Null verschiedenen Werth besitzt.

Wenden wir nun den oben bewiesenen Satz auf die Transformation: $x_i' = f_i(x, \bar{a})$ an, die unter den gemachten Voraussetzungen mit der identischen Transformation zusammenfällt, so ergiebt sich unmittelbar, dass die Schaar der ∞^r Transformationen (1) mit der Schaar der Transformationen zusammenfällt, die von den ∞^{r-1}-eingliedrigen Gruppen mit den infinitesimalen Transformationen:

$$\sum_1^r{}_k \lambda_k X_k f \tag{14}$$

gebildet wird; jedenfalls stimmen beide Schaaren von Transformationen in einer gewissen Umgebung der identischen Transformation mit einander überein. Wenden wir jetzt den Satz noch einmal an und zwar auf eine Transformation: $x_i' = f_i(x, a)$, deren Parameter $a_1 \dots a_r$ in einer gewissen Umgebung von $\bar{a}_1 \dots \bar{a}_r$ liegen, so ergiebt sich bei Berücksichtigung des eben Gesagten Folgendes: Führt man zuerst die

Transformation: $x_i' = f_i(x, a)$ aus und dann eine beliebige andre Transformation: $x_i' = f_i(x, b)$ der Schaar (1), wo die Parameter $b_1 \ldots b_r$ ebenfalls in einer gewissen Umgebung von $\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_r$ liegen, so erhält man stets eine der Schaar (1) angehörige Transformation. Mit andern Worten: die Schaar (1) bildet unter den gemachten Voraussetzungen eine r-gliedrige Gruppe.

Wir können hinzufügen, dass diese Gruppe aus paarweise inversen Transformationen besteht. Es folgt das unmittelbar daraus, dass die Schaar (1) jedenfalls in einer gewissen Umgebung der identischen Transformation mit der Schaar der ∞^{r-1} eingliedrigen Gruppen (14) zusammenfällt und dass die Transformationen jeder dieser eingliedrigen Gruppen in jeder Umgebung der identischen Transformation paarweise zu einander invers sind.

Ein Theil der im vorigen und im gegenwärtigen Paragraphen gewonnenen Ergebnisse bildet den Inhalt des Satzes, den wir als den ersten Fundamentalsatz der Gruppentheorie bezeichnen (s. S. 545). Wir wollen zum Schluss diesen Satz ausdrücklich formuliren:

Erster Fundamentalsatz. *Bildet die Schaar der ∞^r Transformationen:*

$$x_i' = f_i(x_1 \ldots x_n;\ a_1 \ldots a_r) \quad (i = 1 \ldots n) \tag{1}$$

eine r-gliedrige Gruppe, so befriedigen die x_i', als Functionen der a betrachtet, gewisse Differentialgleichungen von der Form:

$$\frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_1^r{}_j \psi_{jk}(a_1 \ldots a_r)\, \xi_{ji}(x_1' \ldots x_n') \quad (i = 1 \ldots n;\ k = 1 \ldots r), \tag{15}$$

wo die Determinante der ψ_{jk} nicht identisch verschwindet und wo die $\xi_{ji}(x')$ solche Functionen ihrer Argumente sind, dass die r Ausdrücke:

$$X_k f = \sum_1^n{}_i \xi_{ki}(x_1 \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \ldots r)$$

ebensoviele unabhängige infinitesimale Transformationen darstellen.

Erfüllt umgekehrt eine Schaar (1) von ∞^r Transformationen Differentialgleichungen von der Form (15) und enthält sie die identische Transformation, aber derart, dass die Determinante der $\psi_{jk}(a)$ für die Parameter der identischen Transformation einen endlichen von Null verschiedenen Werth besitzt, so bildet die betreffende Schaar (1) eine r-gliedrige Gruppe mit paarweise inversen Transformationen und fällt zusammen mit dem Inbegriff aller Transformationen der eingliedrigen Gruppen, die von den ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen:

$$(14) \qquad \sum_1^r{}_k \lambda_k X_k f$$

erzeugt werden. Mit andern Worten: die Schaar (1) *bildet unter diesen Voraussetzungen eine r-gliedrige Gruppe, die von den r unabhängigen infinitesimalen Transformationen:* $X_1 f \ldots X_r f$ *erzeugt ist.*

In Abschnitt I ist blos der erste Theil dieses Satzes ausdrücklich ausgesprochen, nämlich in dem Theoreme 3 auf S. 33 f. Der zweite Theil ergiebt sich zwar unmittelbar als Folge des allgemeinen Theorems 9 auf S. 72 ebd., aber er wird erst in Kap. 9 auf S. 153 f. aus diesem Theoreme abgeleitet, um zum Beweise des Theorems 23 zu dienen; deshalb wird er auch da nicht als besonderer Satz aufgestellt. Jedenfalls würden die Entwicklungen des Kapitels 9 an Durchsichtigkeit gewonnen haben, wenn dieser zweite Theil schon in Kapitel 4 abgeleitet und als Satz formulirt worden wäre.

Herr Schur hat für den ersten Fundamentalsatz einen analytisch sehr eleganten Beweis geliefert, der die Einführung der Parameter $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ vermeidet (s. mathematische Annalen Bd. 35, S. 163—173 u. Bd. 38, S. 265). Aber sein Beweis erfordert grössere Hülfsmittel als der unsrige, denn er stützt sich nicht blos auf die Integrationstheorie der Systeme von Differentialgleichungen von der Form (15), während wir diese Integrationstheorie gar nicht nöthig haben, sondern er benutzt auch explicite den hier noch nicht nothwendigen Begriff Parametergruppe. Dazu kommt, dass bei uns der ganze erste Fundamentalsatz als specieller Fall viel umfassenderer Sätze hervortritt.

Wir wollen hier gleich noch erwähnen, dass Herr Schur sich von vornherein auf solche r-gliedrige Gruppen:

$$x_i' = f_i(x_1 \ldots x_n;\ a_1 \ldots a_r) \qquad (i = 1 \ldots n)$$

beschränkt, in denen die identische Transformation enthalten ist, und zwar setzt er (explicite) nur voraus, dass sich die Functionen $f_1 \ldots f_n$ in der Umgebung der Parameter der identischen Transformation regulär verhalten.

Wir leugnen nicht, dass dieser Standpunkt, den Herr Schur eingenommen hat, ein gewisses Interesse darbietet, wir halten ihn jedoch nicht für den besten, denn wenn man einmal einen praktischen Standpunkt einnimmt und von vornherein das Vorhandensein der identischen Transformation annimmt, thut man am Besten, gleich noch vorauszusetzen, dass die Transformationen der Gruppe paarweise zu einander invers sind. Bei allen Anwendungen ist ja diese Voraussetzung erfüllt. Will man dagegen einen philosophischen Standpunkt einnehmen, so erscheint es uns richtiger, sich gleich auf den allgemeinsten Standpunkt zu stellen und auch von der Forderung, dass die identische Transformation vorhanden sei, abzusehen, mit andern Worten: so zu verfahren, wie wir es in Abschnitt I und im Vorhergehenden gethan haben. Denn die Voraussetzung, dass die identische Transformation vorhanden sei, bringt verhältnissmässig wenig Vereinfachungen mit sich und die Schwierigkeiten sind durchaus nicht grösser, wenn man auch auf diese Voraussetzung verzichtet.

Bevor wir weitergehen, wollen wir noch ein paar Bemerkungen hinzufügen, die uns später von Nutzen sein werden.

Es sei (1) eine Schaar von ∞^r Transformationen, die Differentialgleichungen von der Form (15) erfüllt, und $\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_r$ sei irgend ein Werthsystem von allgemeiner Lage, für das die Determinante der $\psi_{jk}(a)$ einen endlichen von Null verschiedenen Werth hat. Bezeichnen wir nun, wie bisher immer, die Transformation (1) mit $S_{(a)}$, so stellt der Ausdruck: $S_{(\bar{a})}^{-1} S_{(a)}$ offenbar wiederum eine Schaar von ∞^r verschiedenen Transformationen dar. Die Gleichungen dieser neuen Schaar lauten ausführlich geschrieben so:

$$(1'') \qquad x_i' = f_i(F_1(x, \bar{a}) \ldots F_n(x, \bar{a});\ a_1 \ldots a_r) \quad (i = 1 \ldots n).$$

Da nun die x_i' in den Gleichungen (1), als Functionen der a betrachtet, Differentialgleichungen von der Form (15) erfüllen, so ist klar, dass auch die x_i' in den Gleichungen (1'') als Functionen der a angesehen diesen Differentialgleichungen genügen. Bedenken wir überdies, dass die Schaar der ∞^r Transformationen (1'') die identische Transformation enthält, nämlich für: $a = \bar{a}$, und dass für diese Parameterwerthe die Determinante der $\psi_{jk}(a)$ einen endlichen von Null verschiedenen Werth besitzt, so erkennen wir sofort, dass auf die Schaar (1'') der zweite Theil des ersten Fundamentalsatzes anwendbar ist. Wir gelangen somit zu dem

Satz 1. *Genügt eine Schaar:*

$$(1) \qquad x_i' = f_i(x_1 \ldots x_n;\ a_1 \ldots a_r) \quad (i = 1 \ldots n)$$

oder $S_{(a)}$ von ∞^r Transformationen Differentialgleichungen von der Form:

$$(15) \qquad \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_1^r{}_j \psi_{jk}(a)\, \xi_{ji}(x') \quad (i = 1 \ldots n;\ k = 1 \ldots r)$$

und ist $\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_r$ ein Werthsystem, für das die Determinante der $\psi_{jk}(a)$ einen endlichen von Null verschiedenen Werth besitzt, so bildet die Schaar der ∞^r Transformationen: $S_{(\bar{a})}^{-1} S_{(a)}$ eine r-gliedrige Gruppe, die aus paarweise inversen Transformationen besteht und die von den r unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

$$X_k f = \sum_1^n{}_i \xi_{ki}(x_1 \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \ldots r)$$

erzeugt ist.

Dieser Satz ist besonders dann von Wichtigkeit, wenn eine Schaar (1) von ∞^r Transformationen vorgelegt ist, die eine Gruppe mit paarweise inversen Transformationen bildet. Jede solche Schaar erfüllt nämlich Differentialgleichungen von der Form (15) und enthält über-

dies die identische Transformation; aber es ist nicht nöthig, dass die Determinante der $\psi_{jk}(a)$ für die Parameter der identischen Transformation einen endlichen von Null verschiedenen Werth annimmt, der erste Fundamentalsatz ist daher auf eine solche Schaar nicht ohne Weiteres anwendbar. Da hilft nun der Satz 1 aus.

In der That, da die Schaar (1) eine Gruppe mit paarweise inversen Transformationen bildet, so enthält sie auch jede Transformation von der Form: $S_{(\bar{a})}^{-1} S_{(a)}$, unter $\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_r$ irgend ein bestimmtes Werthsystem verstanden, für das die Determinante der $\psi_{jk}(a)$ einen endlichen von Null verschiedenen Werth hat. Aber der Ausdruck: $S_{(\bar{a})}^{-1} S_{(a)}$ stellt seinerseits eine Schaar von ∞^r verschiedenen Transformationen dar. Diese Schaar ist in der Gruppe (1) enthalten, sie ist daher offenbar mit der Gruppe (1) identisch. Mit Berücksichtigung von Satz 1 erhalten wir daher den

Satz 2. *Jede r-gliedrige Gruppe:*

$$(1) \qquad x_i' = f_i(x_1 \ldots x_n;\ a_1 \ldots a_r) \quad (i = 1 \ldots n),$$

deren Transformationen paarweise zu einander invers sind, ist von r unabhängigen infinitesimalen Transformationen: $X_1 f \ldots X_r f$ erzeugt, das heisst sie besteht aus den eingliedrigen Gruppen, die von den ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen: $\Sigma \lambda_k X_k f$ erzeugt werden. Man findet die betreffenden infinitesimalen Transformationen, wenn man die Differentialgleichungen:

$$(15) \qquad \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_1^r{}^j \psi_{jk}(a)\, \xi_{ji}(x') \quad (i = 1 \ldots n;\ k = 1 \ldots r)$$

aufstellt, denen die Gruppe (1) *nach dem ersten Fundamentalsatze genügt; dann ist nämlich einfach:*

$$X_k f = \sum_1^n{}^i \xi_{ki}(x_1 \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \ldots r).$$

Man vergleiche hierzu Abschn. I S. 165 ff., wo wir den vorstehenden Satz auf einem directen Wege abgeleitet haben.

§ 110.

Die Betrachtungen der §§ 108 und 109 sind einer wesentlichen Verallgemeinerung fähig, die wir jetzt kurz auseinandersetzen wollen.

Wir denken uns zwei beliebige Schaaren von je ∞^r Transformationen gegeben, etwa die Schaar:

$$(1) \qquad x_i' = f_i(x_1 \ldots x_n;\ a_1 \ldots a_r) \quad (i = 1 \ldots n)$$

und die Schaar:

$$(32) \qquad \mathfrak{x}_i' = \mathfrak{f}_i(\mathfrak{x}_1 \dots \mathfrak{x}_n;\ b_1 \dots b_r) \quad (i = 1 \dots n).$$

Führen wir zuerst die Transformation (1) aus und dann die Transformation (32), so erhalten wir eine Transformation:

$$(33) \qquad x_i'' = \mathfrak{f}_i(f_1(x, a) \dots f_n(x, a);\ b_1 \dots b_r) \quad (i = 1 \dots n)$$

mit formell $2r$ willkürlichen Parametern. Die Gleichungen (33) stellen daher eine Schaar von höchstens ∞^{2r} verschiedenen Transformationen dar; andrerseits ist klar, dass diese Schaar mindestens ∞^r verschiedene Transformationen enthält.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, zu entscheiden, unter welchen Bedingungen die Schaar (33) *wiederum blos aus ∞^r verschiedenen Transformationen besteht.*

Soll die Schaar (33) blos aus ∞^r verschiedenen Transformationen bestehen, so muss sie die Form:

$$(34) \qquad x_i'' = g_i(x_1 \dots x_n;\ c_1 \dots c_r) \quad (i = 1 \dots n)$$

erhalten können, wo $c_1 \dots c_r$ gewisse Functionen der a und der b allein sind:

$$(35) \qquad c_k = \varphi_k(a_1 \dots a_r;\ b_1 \dots b_r) \quad (k = 1 \dots r).$$

Genau wie auf S. 550 sieht man zugleich ein, dass diese Functionen $\varphi_1 \dots \varphi_r$ sowohl in Bezug auf $a_1 \dots a_r$ als in Bezug auf $b_1 \dots b_r$ von einander unabhängig sind.

Um jetzt die Betrachtungen des § 108 anwenden zu können, führen wir für die Transformationen (1), (32), (34) der Reihe nach die Abkürzungen: $S_{(a)}$, $T_{(b)}$, $U_{(c)}$ ein, so dass sich unsre Forderung, die Schaar (33) solle die Form (34) erhalten können, durch die symbolische Gleichung:

$$(36) \qquad S_{(a)} T_{(b)} = U_{(c)}$$

ausdrückt. Wie auf S. 550 wählen wir nunmehr die unendlich kleinen Grössen: $\delta a_1 \dots \delta a_r$ und $\delta b_1 \dots \delta b_r$ so, dass sich aus (35) ergiebt: $\delta c_k = 0$, dann bekommen wir aus (36):

$$S_{(a+\delta a)} T_{(b+\delta b)} = U_{(c)} = S_{(a)} T_{(b)}$$

oder:

$$(37) \qquad S_{(a)}^{-1} S_{(a+\delta a)} \cdot T_{(b+\delta b)} T_{(b)}^{-1} = 1,$$

wofür wir offenbar auch schreiben können:

$$(37') \qquad S_{(a)}^{-1} S_{(a+\delta a)} = \left(T_{(b+\delta b)} T_{(b)}^{-1}\right)^{-1} = T_{(b-\delta b)} T_{(b)}^{-1}.$$

Hier sind die δa und δb durch die Gleichungen:

$$(38) \qquad \sum_1^r{}_j \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial a_j} \delta a_j + \frac{\partial \varphi_k}{\partial b_j} \delta b_j \right) = 0 \quad (k = 1 \dots r)$$

gebunden, sonst aber ganz willkürlich; da überdies die Gleichungen (38) unter den gemachten Voraussetzungen sowohl nach den δa als nach den δb auflösbar sind, so können in (37′) nach Belieben entweder die δa oder die δb willkürlich gewählt werden.

Nach S. 548 f. stellt der Ausdruck: $S_{(a)}^{-1} S_{(a+\delta a)}$ bei fest gewählten a und bei willkürlichen δa im Allgemeinen eine Schaar von ∞^{r-1} verschiedenen infinitesimalen Transformationen dar, die alle aus r von einander unabhängigen unter ihnen linear ableitbar sind. Andrerseits gilt von dem Ausdrucke: $T_{(b-\delta b)} T_{(b)}^{-1}$ entsprechendes. Da nun zwischen $a_1 \ldots a_r$ und $b_1 \ldots b_r$ allein keine Relation besteht, so können wir in (37′) für die a und die b irgend zwei feste Werthsysteme von allgemeiner Lage einsetzen. Denken wir uns dann die δa und δb, abgesehen davon, dass sie den Gleichungen (38) genügen müssen, ganz willkürlich, so stellt in (37′) jeder der beiden Ausdrücke: $S_{(a)}^{-1} S_{(a+\delta a)}$ und $T_{(b-\delta b)} T_{(b)}^{-1}$ eine Schaar von ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen dar, die die eben beschriebene Beschaffenheit hat; die Gleichung (37′) selbst aber bedeutet einfach, dass diese beiden Schaaren von infinitesimalen Transformationen zusammenfallen. Berücksichtigen wir ferner, dass die Schaar der ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen: $S_{(a)}^{-1} S_{(a+\delta a)}$ von $b_1 \ldots b_r$ gar nicht abhängt, so ergiebt sich, dass diese Schaar stets dieselbe ist, welche Werthe auch $a_1 \ldots a_r$ haben mögen. Aus demselben Grunde ist endlich auch die Schaar der ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen: $T_{(b-\delta b)} T_{(b)}^{-1}$ stets dieselbe, welche Werthe auch $b_1 \ldots b_r$ haben mögen.

Demnach sagt die Gleichung (37′) aus, dass alle die unendlich vielen Schaaren von je ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen, die durch die Ausdrücke: $S_{(a)}^{-1} S_{(a+\delta a)}$ und: $T_{(b-\delta b)} T_{(b)}^{-1}$ dargestellt werden, mit einander identisch sind. Wir können daher alle diese Schaaren in einfacher Weise ausdrücken, wenn wir irgend eine unter ihnen auswählen, etwa wie auf S. 553, indem wir in $T_{(b-\delta b)} T_{(b)}^{-1}$ für $b_1 \ldots b_r$ ein bestimmtes Werthsystem: $\omega_1 \ldots \omega_r$ von allgemeiner Lage einsetzen.

Wir wollen wie auf S. 553 annehmen, dass die infinitesimale Transformation: $T_{(b-\delta b)} T_{(b)}^{-1}$ für: $b_k = \omega_k$ die Form:

$$x_i' = x_i + \sum_1^r{}_k \, \delta b_k \, \xi_{ki}(x_1 \ldots x_n) \quad (i = 1 \ldots n)$$

erhält, wo die r Ausdrücke:

$$X_k f = \sum_1^n{}_i \, \xi_{ki}(x_1 \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \ldots r)$$

sicher ebensoviele von einander unabhängige infinitesimale Transformationen darstellen. Dann fällt die Schaar der ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen: $S_{(a)}^{-1} S_{(a+\delta a)}$ für alle Werthe von $a_1 \ldots a_r$ mit der Schaar:

$$\sum_1^r{}_k \lambda_k X_k f \tag{39}$$

zusammen und dasselbe gilt von der Schaar der ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen: $T_{(b+\delta b)} T_{(b)}^{-1}$ für alle Werthe von $b_1 \ldots b_r$; unter $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ verstehen wir dabei wie früher r willkürliche Parameter.

Erinnern wir uns jetzt an die auf S. 547 ff. entwickelte Bedeutung der infinitesimalen Transformationen: $S_{(a)}^{-1} S_{(a+\delta a)}$ und $T_{(b+\delta b)} T_{(b)}^{-1}$, so ergiebt sich Folgendes: *Führt man zuerst die Transformation $S_{(a)}$ der Schaar* (1) *aus und dann eine beliebige infinitesimale Transformation der Schaar* (39), *so erhält man stets eine zu $S_{(a)}$ unendlich benachbarte Transformation der Schaar* (1) *und zwar kann man in dieser Weise bei geeigneter Wahl der infinitesimalen Transformation* (39) *jede Transformation von der Form $S_{(a+\delta a)}$ erhalten. Führt man andrerseits zuerst eine beliebige infinitesimale Transformation der Schaar* (39) *aus und dann die Transformation $T_{(b)}$ der Schaar* (32), *so erhält man stets eine zu $T_{(b)}$ unendlich benachbarte Transformation der Schaar* (32) *und zwar kann man in dieser Weise jede Transformation von der Form $T_{(b+\delta b)}$ erhalten, wenn man nur die infinitesimale Transformation* (39) *passend wählt.*

Nach S. 552 ff. kann dieses Ergebniss auch analytisch ausgedrückt werden, es kommt nämlich einfach darauf hinaus, dass in den Gleichungen (1) die x_i' als Functionen der x und a betrachtet Differentialgleichungen von der Form:

$$\frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_1^r{}_j \psi_{jk}(a)\, \xi_{ji}(x') \qquad (k = 1 \ldots r;\ i = 1 \ldots n) \tag{40}$$

befriedigen, während in (32) die $\mathfrak{x}$ als Functionen der $\mathfrak{x}'$ und der b angesehen Differentialgleichungen von der Form:

$$\frac{\partial \mathfrak{x}_i}{\partial b_k} = \sum_1^r{}_j \vartheta_{jk}(b)\, \xi_{ji}(\mathfrak{x}) \qquad (k = 1 \ldots r;\ i = 1 \ldots n) \tag{41}$$

erfüllen.

Es sei jetzt $a_1^0 \ldots a_r^0$ irgend ein Werthsystem von allgemeiner Lage, also eines, für das die Determinante der $\psi_{jk}(a)$, die ja sicher nicht identisch verschwindet, einen endlichen von Null verschiedenen Werth besitzt. Der Ausdruck: $S_{(a^0)}^{-1} S_{(a)}$ stellt dann eine Schaar von ∞^r Transformationen dar, die nach Satz 1, S. 565 eine r-gliedrige Gruppe mit paarweise inversen Transformationen bildet und zwar eine Gruppe,

die von den r unabhängigen infinitesimalen Transformationen: $X_1 f \ldots X_r f$ erzeugt ist.

Hiermit ist bewiesen, dass die Schaar der Transformationen (1) in einer gewissen Umgebung von $a_1^0 \ldots a_r^0$ mit der Schaar von Transformationen übereinstimmt, die man erhält, wenn man zuerst die Transformation $S_{(a^0)}$ und dann die allgemeine Transformation der von $X_1 f \ldots X_r f$ erzeugten r-gliedrigen Gruppe ausführt. In ähnlicher Weise ergiebt sich, dass die Schaar (32) jedenfalls in einer gewissen Umgebung von $b_1^0 \ldots b_r^0$ mit der Schaar von Transformationen zusammenfällt, die entsteht, wenn man zuerst die allgemeine Transformation der von $X_1 f \ldots X_r f$ erzeugten Gruppe ausführt und dann die Transformation $T_{(b^0)}$. Wir brauchen auf den Beweis hierfür nicht näher einzugehen und erwähnen nur, dass er durch Benutzung der Differentialgleichungen (41) sehr leicht zu erbringen ist, aus diesen ergiebt sich nämlich sofort, dass die ∞^r Transformationen:

$$(T_{(b_0)}^{-1})^{-1} T_{(b)}^{-1} = (T_{(b)} T_{(b_0)}^{-1})^{-1}$$

eine r-gliedrige von $X_1 f \ldots X_r f$ erzeugte Gruppe mit paarweise inversen Transformationen bilden.

Durch das Vorstehende ist gezeigt, dass zwei Schaaren (1) und (32) von je ∞^r Transformationen, die die auf S. 567 verlangte Beschaffenheit haben, eine sehr einfache Form erhalten können. Bezeichnen wir nämlich die allgemeine Transformation:

$$x_i' = x_i + \sum_1^r k \lambda_k \xi_{ki}(x) + \cdots \quad (i = 1 \ldots n) \tag{42}$$

der von $X_1 f \ldots X_r f$ erzeugten Gruppe mit $E_{(\lambda)}$, so kann die Schaar (1) die Form: $S_{(a^0)} E_{(\lambda)}$ und die Schaar (32) die Form: $E_{(\mu)} T_{(b^0)}$ erhalten.

Aber unsre Betrachtungen liefern noch mehr. Sind nämlich S und T irgend zwei beliebige Transformationen und ist $E_{(\lambda)}$ die allgemeine Transformation der von $X_1 f \ldots X_r f$ erzeugten Gruppe, so stehen die beiden Schaaren von je ∞^r Transformationen, die durch die Ausdrücke: $S E_{(\lambda)}$ und $E_{(\mu)} T$ dargestellt werden, genau in der auf S. 567 verlangten Beziehung. Denn führt man zuerst die Transformation: $S E_{(\lambda)}$ aus und dann die Transformation $E_{(\mu)} T$, so erhält man die Transformation:

$$S E_{(\lambda)} \cdot E_{(\mu)} T,$$

die aber hängt wiederum nur von r wesentlichen Parametern ab, weil ja die Transformation: $E_{(\lambda)} E_{(\mu)}$ der von $X_1 f \ldots X_r f$ erzeugten Gruppe

angehört und also in der Form $E_{(\nu)}$ darstellbar ist, wo $\nu_1 \dots \nu_r$ Functionen von $\lambda_1 \dots \lambda_r$, $\mu_1 \dots \mu_r$ allein sind.

Demnach gilt das

Theorem 45. *Sollen zwei Schaaren:*

$$x_i' = f_i(x_1 \dots x_n;\ a_1 \dots a_r) \quad (i = 1 \dots n) \tag{1}$$

und:

$$\mathfrak{x}_i' = \mathfrak{f}_i(\mathfrak{x}_1 \dots \mathfrak{x}_n;\ b_1 \dots b_r) \quad (i = 1 \dots n) \tag{32}$$

von je ∞^r Transformationen so beschaffen sein, dass man, wenn man zuerst die allgemeine Transformation der ersten und dann die allgemeine Transformation der zweiten ausführt, wieder nur eine Schaar von gerade ∞^r Transformationen erhält, so ist nothwendig und hinreichend, dass es eine gewisse r-gliedrige Gruppe mit paarweise inversen Transformationen giebt, die von r unabhängigen infinitesimalen Transformationen: $X_1 f \dots X_r f$ erzeugt ist und die zu den beiden Schaaren (1) *und* (32) *in der folgenden Beziehung steht: Bedeutet S eine beliebige aber allgemein gelegene Transformation der Schaar* (1), *T eine beliebige aber allgemein gelegene Transformation der Schaar* (32), *versteht man endlich unter $E_{(\lambda)}$ die allgemeine Transformation der bewussten r-gliedrigen Gruppe, so ist die Schaar der ∞^r Transformationen* (1) *in der Form: $SE_{(\lambda)}$ und die Schaar der ∞^r Transformationen* (32) *in der Form: $E_{(\lambda)}T$ darstellbar.*

Wir wollen jetzt insbesondre annehmen, dass die Schaar (32) mit mit der Schaar (1) zusammenfällt. Aus unserm Theoreme 45 ergiebt sich dann, dass die Schaar (1) sowohl in der Form: $SE_{(\lambda)}$ als in der Form: $E_{(\lambda)}S$ darstellbar ist, unter S eine beliebige aber allgemein gelegene Transformation der Schaar (1) verstanden. Es muss daher bei beliebig gewählten $\lambda_1 \dots \lambda_r$ stets möglich sein, die r Parameter $\mu_1 \dots \mu_r$ so zu bestimmen, dass die Gleichung:

$$E_{(\lambda)}S = SE_{(\mu)}$$

erfüllt ist. Diese Gleichung aber lässt sich in der Form:

$$S^{-1}E_{(\lambda)}S = E_{(\mu)} \tag{43}$$

schreiben und zeigt, dass die r-gliedrige Gruppe $E_{(\lambda)}$ bei der Transformation S invariant bleibt.

Ist nun umgekehrt $E_{(\lambda)}$ eine beliebige r-gliedrige Gruppe, die von r unabhängigen infinitesimalen Transformationen: $X_1 f \dots X_r f$ erzeugt ist, und S eine beliebige Transformation, bei der die Gruppe

$E_{(\lambda)}$ invariant bleibt, so besteht eine Gleichung von der Form (43), in der $\mu_1 \ldots \mu_r$ gewisse Functionen von $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ sind. Demnach wird:

$$\begin{aligned} SE_{(\lambda)}SE_{(\nu)} &= S^2 . S^{-1}E_{(\lambda)}S . E_{(\nu)} \\ &= S^2 . E_{(\mu)}E_{(\nu)} \\ &= S^2 . E_{(\varrho)}, \end{aligned}$$

wo die r Parameter $\varrho_1 \ldots \varrho_r$ gewisse Functionen von $\mu_1 \ldots \mu_r$ und $\nu_1 \ldots \nu_r$ sind. Demnach hat die Schaar der ∞^r Transformationen: $SE_{(\lambda)}$ die Eigenschaft, dass die Schaar: $SE_{(\lambda)} . SE_{(\nu)}$, die formell $2r$ Parameter enthält, wiederum nur aus ∞^r verschiedenen Transformationen besteht.

Damit sind wir zu dem Theoreme gelangt:

Theorem 46. *Soll eine Schaar:*

$$(1) \qquad x_i' = f_i(x_1 \ldots x_n;\ a_1 \ldots a_r) \quad (i = 1 \ldots n)$$

von ∞^r Transformationen so beschaffen sein, dass die allgemeinste Transformation, die man durch Nacheinanderausführung zweier beliebiger Transformationen der Schaar erhält, nur von r wesentlichen Parametern abhängt, so ist nothwendig und hinreichend, dass es eine r-gliedrige Gruppe mit paarweise inversen Transformationen giebt, die von r unabhängigen infinitesimalen Transformationen: $X_1 f \ldots X_r f$ erzeugt ist und die zu der Schaar (1) *in der folgenden Beziehung steht: Ist S eine beliebige aber allgemein gelegene Transformation der Schaar* (1) *und ist $E_{(\lambda)}$ die allgemeine Transformation der bewussten r-gliedrigen Gruppe, so ist die Schaar der ∞^r Transformationen* (1) *in der Form: $SE_{(\lambda)}$ darstellbar und ausserdem bleibt die Gruppe der ∞^r Transformationen $E_{(\lambda)}$ bei der Transformation S invariant.*

Das eben abgeleitete Theorem führt zur Beantwortung einer sehr allgemeinen Frage, nämlich der Frage nach den Bedingungen, unter denen eine Schaar:

$$(1) \qquad x_i' = f_i(x_1 \ldots x_n;\ a_1 \ldots a_r) \quad (i = 1 \ldots n)$$

von ∞^r Transformationen die Eigenschaft besitzt, dass je m Transformationen der Schaar nach einander ausgeführt stets wieder eine der Schaar angehörige Transformation liefern, während je 2, oder je 3, ... oder je $m - 1$ Transformationen der Schaar, nach einander ausgeführt, niemals eine der Schaar angehörige Transformation ergeben.

Soll die Schaar (1) die angegebene Eigenschaft besitzen, so muss sie jedenfalls so beschaffen sein, dass die allgemeinste Transformation,

die man durch Nacheinanderausführung je zweier Transformationen der Schaar erhält, nur von r wesentlichen Parametern abhängt; denn hinge diese Transformation von $r+1$ oder noch mehr wesentlichen Parametern ab, so hinge auch die allgemeinste Transformation, die man durch Nacheinanderausführung von je m Transformationen der Schaar (1) erhielte, mindestens von $r+1$ wesentlichen Parametern ab und könnte daher der Schaar (1) nicht angehören. Demnach fällt die Schaar (1) unter das Theorem 46, das heisst, sie hat die Form: $SE_{(\lambda)}$, wo S und $E_{(\lambda)}$ die in dem Theoreme angegebene Bedeutung haben, wo also insbesondere eine Relation von der Form:

$$S^{-1}E_{(\lambda)}S = E_{(\mu)}$$

besteht.

Führen wir zwei beliebige Transformationen: $SE_{(\lambda)}$ und $SE_{(\nu)}$ der Schaar (1) nach einander aus, so erhalten wir die Transformation: $SE_{(\lambda)} . SE_{(\nu)}$, die nach S. 572 die Form: $S^2E_{(\varrho)}$ bekommen kann. Führen wir daher k beliebige Transformationen der Schaar (1) nach einander aus, so bekommen wir eine Transformation, die sich auf die Form:

$$S^kE_{(\sigma)}$$

bringen lässt. Nun aber soll diese Transformation für $k = m$ stets wieder der Schaar (1) angehören, während sie der Schaar (1) nicht angehören darf, wenn k einen der Werthe: $2, 3, \ldots, m-1$ besitzt. Demnach muss für $k = m$ eine Gleichung von der Form:

$$S^kE_{(\sigma)} = SE_{(\tau)}$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, eine Gleichung von der Form:

$$S^{k-1} = E_{(\tau)}E_{(\sigma)}^{-1} = E_{(\pi)}$$

bestehen, während für $k = 2, 3, \ldots, m-1$ keine Gleichung von dieser Form bestehen darf. Mit andern Worten: die Transformation S muss ausser der in Theorem 46 angegebenen Eigenschaft auch noch die besitzen, dass S^{m-1} der r-gliedrigen Gruppe $E_{(\lambda)}$ angehört, während von den Transformationen: $S, S^2 \ldots S^{m-2}$ keine in dieser Gruppe enthalten ist.

Die eben gefundene Bedingung für die Transformation S ist nothwendig, damit unsre Schaar (1) die auf S. 572 verlangte Eigenschaft besitzt, sie ist aber offenbar auch hinreichend, es ergiebt sich also das

Theorem 47. *Soll eine Schaar*

$$x_i' = f_i(x_1 \ldots x_n;\ a_1 \ldots a_r) \quad (i = 1 \ldots n) \tag{1}$$

von ∞^r Transformationen so beschaffen sein, dass je m Transformationen der Schaar nach einander ausgeführt stets wieder eine der Schaar angehörige Transformation liefern, während

man keine der Schaar (1) *angehörige Transformation erhält, wenn man je* 2, *oder je* 3, ... *oder je* $m-1$ *Transformationen der Schaar nach einander ausführt, so ist nothwendig und hinreichend, dass es eine r-gliedrige Gruppe mit paarweise inversen Transformationen giebt, die von r unabhängigen infinitesimalen Transformationen:* $X_1 f \ldots X_r f$ *erzeugt ist und die zu der Schaar* (1) *in der folgenden Beziehung steht: Ist S eine beliebige aber allgemein gelegene Transformation der Schaar* (1) *und ist* $E_{(\lambda)}$ *die allgemeine Transformation der bewussten r-gliedrigen Gruppe, so ist erstens die Schaar der* ∞^r *Transformationen* (1) *in der Form:* $SE_{(\lambda)}$ *darstellbar, zweitens lässt die Transformation S die r-gliedrige Gruppe* $E_{(\lambda)}$ *invariant und drittens gehört die Transformation* S^{m-1} *der Gruppe* $E_{(\lambda)}$ *an, während dies bei den Transformationen:* $S^2, S^3, \ldots S^{m-1}$ *nicht der Fall ist**).

Wählt man $m = 2$, so liefert dieses Theorem offenbar die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Schaar (1) eine r-gliedrige Gruppe bildet. Es ergiebt sich in diesem Falle, dass die Transformation S und demnach überhaupt jede Transformation der Schaar (1) in der von $X_1 f \ldots X_r f$ erzeugten Gruppe enthalten ist. Mit andern Worten: *Wenn eine Schaar* (1) *von* ∞^r *verschiedenen Transformationen eine Gruppe bildet, so gehören alle ihre Transformationen einer gewissen r-gliedrigen Gruppe an, die von r unabhängigen infinitesimalen Transformationen:* $X_1 f \ldots X_r f$ *erzeugt ist und aus paarweise zu einander inversen Transformationen besteht.*

Schon im ersten Abschnitt, auf S. 163, stellten wir einen Satz auf, der mit dem eben gefundenen fast identisch ist, wenn er auch in der Fassung von ihm abweicht. Der Unterschied zwischen den damaligen Betrachtungen und den jetzigen besteht darin, dass wir jetzt mit dem allgemeinen Begriffe: *Schaar von Transformationen* operiren und nicht wie damals darauf Rücksicht nehmen, dass in den Gleichungen:

$$(1) \qquad x_i' = f_i(x_1 \ldots x_n;\ a_1 \ldots a_r) \qquad (i = 1 \ldots n)$$

einer Schaar von ∞^r Transformationen durch Einführung neuer Parameter $\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_r$ an Stelle der a gewisse Transformationen verloren

---

*) Herr Dr. Waelsch, der im Winterhalbjahr 1892—93 an Lies gruppentheoretischen Vorlesungen theilnahm, stellte für $m > 2$ die Frage, die in dem Theoreme 47 ihre allgemeine Erledigung gefunden hat. Die übrigen in diesem Kapitel entwickelten Betrachtungen rühren dagegen aus viel älterer Zeit her.

gehen können. Wird nämlich der Uebergang von den a zu den $\bar{a}$ durch Gleichungen von der Form:

$$a_k = \Pi_k(\bar{a}_1 \dots \bar{a}_r) \quad (k = 1 \dots r)$$

bestimmt, so ist es denkbar, dass $a_1 \dots a_r$ stets innerhalb gewisser natürlicher Gränzen bleiben, welche Werthe auch $\bar{a}_1 \dots \bar{a}_r$ annehmen mögen.

Das Theorem 46 führt insbesondere in sehr einfacher Weise zu dem grössten Theile der Ergebnisse des Kapitels 18 von Abschnitt I. Wir begnügen uns jedoch mit einigen Andeutungen.

Sollen m verschiedene Schaaren:

$$(44) \qquad \left\{ x_i' = f_i^{(k)}(x_1 \dots x_n;\ a_1 \dots a_r) \quad (i = 1 \dots n) \right. \quad \left(k = 1 \dots m \right)$$

von je ∞^r Transformationen zusammengenommen eine Gruppe bilden, so muss jede einzelne dieser Schaaren die in Theorem 46 angegebenen Eigenschaften besitzen, die m Schaaren müssen daher in der Form:

$$(45) \qquad S_k E_{(\lambda)} \quad (k = 1 \dots m)$$

darstellbar sein, wo $E_{(\lambda)}$ die allgemeine Transformation einer gewissen Gruppe bedeutet, die von r unabhängigen infinitesimalen Transformationen erzeugt ist, während $S_1 \dots S_m$ ganz bestimmte Transformationen sind, die alle diese r-gliedrige Gruppe invariant lassen. Das genügt aber noch nicht, es muss nämlich ausserdem noch jede der m^2 Transformationen: $S_i S_k$ einer der Schaaren (45) angehören, oder was auf dasselbe hinauskommt, es muss zu jeder der Transformationen $S_i S_k$ ein solches S_j $(j = 1 \dots m)$ angebbar sein, dass die Transformation: $S_i S_k S_j^{-1}$ der r-gliedrigen Gruppe der $E_{(\lambda)}$ angehört. Stets dann aber auch nur dann, wenn diese Bedingungen erfüllt sind, bilden die m Schaaren (44) zusammen eine Gruppe. Dies ist im Wesentlichen der Inhalt des Theor. 59, S. 321 von Abschn. I, nur sind wir jetzt noch etwas weiter gegangen als damals, wir haben nämlich nicht vorausgesetzt, dass die Transformationen der Gruppe (44) paarweise zu einander invers sind.

§ 111.

Wir wenden uns jetzt zur Besprechung des zweiten Fundamentalsatzes.

Bei der Ableitung des ersten Fundamentalsatzes stiessen wir bereits auf r-gliedrige Gruppen, die von infinitesimalen Transformationen erzeugt sind; wir fanden sogar, dass die Untersuchung jeder r-gliedrigen Gruppe im Wesentlichen darauf hinauskommt, eine r-glied-

rige von r unabhängigen infinitesimalen Transformationen erzeugte Gruppe zu untersuchen. Demnach ist es naturgemäss, jetzt nach den Bedingungen zu fragen, die nothwendig und hinreichend sind, damit r unabhängige infinitesimale Transformationen eine r-gliedrige Gruppe erzeugen. Diese Bedingungen bilden den Inhalt des zweiten Fundamentalsatzes.

Zu den nothwendigen Bedingungen kann man auf verschiedenen Wegen gelangen. Der nächstliegende unter diesen dürfte der sein, den Lie bei seinen allerersten Untersuchungen über vollständige Systeme und über Gruppen eingeschlagen hat. Wir wollen daher die Gedanken, von denen Lie damals geleitet worden ist, kurz wiedergeben.

Enthält eine endliche oder unendliche continuirliche Gruppe, deren Transformationen paarweise invers sind, die beiden infinitesimalen Transformationen: Xf und Yf, oder ausführlich geschrieben:

$$x_i' = x_i + \xi_i(x_1 \dots x_n)\,\delta t \quad (i = 1 \dots n) \tag{46}$$

und:

$$x_i' = x_i + \eta_i(x_1 \dots x_n)\,\delta\tau \quad (i = 1 \dots n), \tag{47}$$

so enthält sie auch die infinitesimale Transformation, die durch Nacheinanderausführung dieser beiden entsteht. Bei der Ausrechnung findet man, dass diese infinitesimale Transformation die Form hat:

$$x_i'' = x_i + \xi_i(x)\,\delta t + \eta_i(x)\,\delta\tau \quad (i = 1 \dots n).$$

Da nun das Verhältniss der beiden unendlich kleinen Grössen δt und $\delta\tau$ jeden beliebigen Werth annehmen kann, so lässt sich dieses Ergebniss auch so fassen:

Enthält eine endliche oder unendliche continuirliche Gruppe mit paarweise inversen Transformationen die beiden infinitesimalen Transformationen Xf und Yf, so enthält sie auch jede aus ihnen linear ableitbare infinitesimale Transformation: $aXf + bYf$.

Mit den beiden infinitesimalen Transformationen Xf und Yf enthält aber die Gruppe zugleich die von ihnen erzeugten eingliedrigen Gruppen, sie enthält also, wenn man nicht blos die unendlich kleinen Grössen erster, sondern auch die von zweiter Ordnung mitnimmt, die beiden Transformationen:

$$x_i' = x_i + \xi_i(x)\,\delta t + X\xi_i \frac{\delta t^2}{1 \cdot 2} \quad (i = 1 \dots n) \tag{46'}$$

und:

$$x_i' = x_i + \eta_i(x)\,\delta\tau + Y\eta_i \frac{\delta\tau^2}{1 \cdot 2} \quad (i = 1 \dots n), \tag{47'}$$

die wir kurz S und T nennen wollen. Dann aber enthält sie auch noch die Transformation ST, die offenbar bis auf unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung genau die Form hat:

$$(48)\qquad \begin{cases} x_i' = x_i + \xi_i(x)\,\delta t + \eta_i(x)\,\delta\tau + \\ \qquad + X\xi_i \frac{\delta t^2}{1\,.\,2} + X\eta_i\,\delta t\,\delta\tau + Y\eta_i \frac{\delta\tau^2}{1\,.\,2} \end{cases}$$

und ebenso die Transformation: TS, die durch die Gleichungen:

$$(49)\qquad \begin{cases} \bar{x}_i = x_i + \eta_i(x)\,\delta\tau + \xi_i(x)\,\delta t + \\ \qquad + Y\eta_i \frac{\delta\tau^2}{1\,.\,2} + Y\xi_i\,\delta\tau\,\delta t + X\xi_i \frac{\delta t^2}{1\,.\,2} \end{cases}$$

dargestellt wird.

Durch Vergleichung von (48) und (49) ergiebt sich sofort die einfache Relation:

$$(50)\qquad x_i' - \bar{x}_i = (X\eta_i - Y\xi_i)\,\delta t\,\delta\tau \quad (i = 1 \ldots n),$$

die nach verschiedenen Richtungen hin beachtenswerth ist. Erstens zeigt sie nämlich, dass die beiden Transformationen S und T bei Vernachlässigung aller unendlich kleinen Grössen dritter und höherer Ordnung stets dann aber auch nur dann vertauschbar sind, wenn die n Gleichungen: $X\eta_i - Y\xi_i = 0$ identisch bestehen, wenn also der Ausdruck: (XY) verschwindet. Auf diese Weise gelangt man also ohne Weiteres zu dem Kriterium für die Vertauschbarkeit der beiden infinitesimalen Transformationen: Xf und Yf (s. Abschn. I, S. 259). Zweitens aber zeigt die Gleichung (50), dass unsre Gruppe mit Xf und Yf zugleich stets auch noch eine gewisse dritte infinitesimale Transformation enthält.

In der That, der Punkt x_i' ist aus dem Punkte x_i durch die Transformation ST entstanden und der Punkt $\bar{x}_i$ aus x_i durch die Transformation: TS; als Gruppe mit paarweise inversen Transformationen muss nun unsre Gruppe auch die Transformation: $(TS)^{-1} = S^{-1}T^{-1}$ enthalten, die den Punkt $\bar{x}_i$ in den Punkt x_i überführt, und demnach auch die Transformation: $S^{-1}T^{-1}ST$, die dem Punkte $\bar{x}_i$ die neue Lage x_i' ertheilt. Diese Transformation: $S^{-1}T^{-1}ST$ wird aber, wie aus (50) unmittelbar hervorgeht, bei Vernachlässigung aller unendlich kleinen Grössen dritter und höherer Ordnung durch die Gleichungen:

$$(51)\qquad x_i' = x_i + (X\eta_i - Y\xi_i)\,\delta t\,\delta\tau \quad (i = 1 \ldots n)$$

dargestellt, sie ist demnach nichts andres als die infinitesimale Transformation mit dem Symbole: (XY). Also:

Enthält eine endliche oder unendliche continuirliche Gruppe mit paarweise inversen Transformationen die beiden infinitesimalen Trans-

formationen: Xf und Yf, so enthält sie stets auch die infinitesimale Transformation: (XY).

Beschränken wir uns nun auf endliche continuirliche Gruppen und nehmen wir an, dass alle infinitesimalen Transformationen einer solchen Gruppe aus den r von einander unabhängigen: $X_1 f \ldots X_r f$ linear ableitbar sind, so ergiebt sich, dass auch alle infinitesimalen Transformationen: $(X_i X_k)$ aus $X_1 f \ldots X_r f$ linear ableitbar sind; das heisst, es müssen Relationen von der Form:

$$(52) \qquad (X_i X_k) = \sum_1^r{}_s c_{iks} X_s f \quad (i, k = 1 \ldots r)$$

bestehen, wo die c_{iks} Constanten sind.

Das Bestehen der Relationen (52) ist demnach jedenfalls nothwendig, wenn es eine endliche continuirliche Gruppe geben soll, der die infinitesimalen Transformationen: $X_1 f \ldots X_r f$ angehören und deren infinitesimale Transformationen sämmtlich aus $X_1 f \ldots X_r f$ linear ableitbar sind.

In dieser oder doch in ganz ähnlicher Weise ist Lie seinerzeit auf die Relationen (52) geführt worden*). Freilich können die eben angestellten Betrachtungen nicht eigentlich als ausgeführte Beweise gelten, sie müssten vielmehr noch nach verschiedenen Richtungen hin vervollständigt werden, um als solche gelten zu können; sie sind aber jedenfalls der naturgemässe Weg, um zu den Relationen (52) zu gelangen, und führen mit Nothwendigkeit darauf, dass man die Tragweite dieser Relationen näher untersucht.

§ 112.

Will man infinitesimale Betrachtungen vermeiden, so geht man am Besten von den grundlegenden Differentialgleichungen aus.

Wir wissen, dass jede Schaar:

$$(1) \qquad x_i' = f_i(x_1 \ldots x_n;\ a_1 \ldots a_r) \quad (i = 1 \ldots n)$$

von ∞^r Transformationen, die eine Gruppe bildet, Differentialgleichungen von der Form:

$$(15) \qquad \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_1^r{}_j \psi_{jk}(a)\, \xi_{ji}(x') \quad (i = 1 \ldots n;\ k = 1 \ldots r)$$

befriedigt, wo die Determinante der $\psi_{jk}(a)$ nicht identisch verschwindet und wo die r infinitesimalen Transformationen:

---

*) Vgl. den Schluss von Lies erster Abhandlung über unendliche continuirliche Gruppen, Ges. d. W. zu Kristiania 1883.

$$X_k f = \sum_1^n{}_i \xi_{ki}(x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \dots r)$$

von einander unabhängig sind. Wir wissen ferner, dass unter diesen Voraussetzungen die r infinitesimalen Transformationen: $X_1 f \dots X_r f$ eine r-gliedrige Gruppe mit paarweise inversen Transformationen erzeugen, die zu der Gruppe (1) in sehr naher Beziehung steht und sogar unter Umständen mit ihr zusammenfällt.

Es ist daher ganz naturgemäss zu fragen, welchen Bedingungen die infinitesimalen Transformationen: $X_1 f \dots X_r f$ genügen. Der zunächst sich darbietende Weg, um zur Beantwortung dieser Frage zu gelangen, ist der, dass man die Integrabilitätsbedingungen der Differentialgleichungen (15) bildet*). Wir wollen jetzt diese Integrabilitätsbedingungen aufstellen, machen aber vorher noch darauf aufmerksam, dass sie selbstverständlich davon unabhängig sind, dass die Schaar (1) eine Gruppe bildet; sie bleiben dieselben, auch wenn die Schaar (1), die den Differentialgleichungen (15) genügt, keine Gruppe bildet. Deshalb werden wir vorläufig ganz von der Forderung absehen, dass die Schaar (1) eine Gruppe bilden soll.

Wir können zunächst die $n \,.\, r$ Gleichungen (15) durch blos r Gleichungen ersetzen. Ist nämlich $f(x_1' \dots x_n') = f'$ eine beliebige Function von $x_1' \dots x_n'$ allein und setzen wir entsprechend unsern sonstigen Bezeichnungen:

$$\sum_1^n{}_i \xi_{ki}(x_1' \dots x_n') \frac{\partial f'}{\partial x_i'} = X_k' f',$$

so ergeben sich aus (15) offenbar die n Gleichungen:

$$\frac{\partial f'}{\partial a_k} = \sum_1^r{}_j \psi_{jk}(a) X_j' f' \quad (k = 1 \dots r), \tag{53}$$

die ihrerseits, so lange f' eine unbestimmte Function seiner Argumente ist, die Gleichungen (15) vollständig ersetzen.

Die Integrabilitätsbedingungen der Gleichungen (53) haben nun die Form:

$$\frac{\partial}{\partial a_\tau} \sum_1^r{}_j \psi_{jk}(a) X_j' f' = \frac{\partial}{\partial a_k} \sum_1^r{}_j \psi_{j\tau}(a) X_j' f'.$$

Führen wir die Differentiationen aus und berücksichtigen wir, dass die

*) Lie hat diesen Weg bereits 1879 in Bd. 16 der Math. Ann. eingeschlagen (auf S. 461 f.).

Gleichungen (53) für jede Function f' gültig sind, also auch dann, wenn man $X_\tau' f'$ an Stelle von f' einsetzt, so erhalten wir:

$$\sum_j^{1\ldots r}\left\{\frac{\partial\psi_{jk}(a)}{\partial a_\tau}-\frac{\partial\psi_{j\tau}(a)}{\partial a_k}\right\}X_j' f'=\sum_{j\pi}^{1\ldots r}\left\{\psi_{j\tau}\psi_{\pi k}X_\pi' X_j' f'-\psi_{jk}\psi_{\pi\tau}X_\pi' X_j' f'\right\}$$

$$=\sum_{j\pi}^{1\ldots r}\psi_{j\tau}\psi_{\pi k}(X_\pi' X_j' f'-X_j' X_\pi' f').$$

Auf der rechten Seite kommt hier der Ausdruck: $X_\pi' X_j' f'-X_j' X_\pi' f'$ zweimal vor, einmal multiplicirt mit: $\psi_{j\tau}\psi_{\pi k}$, das andre Mal mit dem Factor: $-\psi_{\pi\tau}\psi_{jk}$, folglich können wir die letzte Gleichung auch so schreiben:

$$(54)\qquad\begin{cases}\sum_1^{r-1}\sum_{j+1}^{r}{}^{\pi}(\psi_{j\tau}\psi_{\pi k}-\psi_{\pi\tau}\psi_{jk})(X_\pi' X_j' f'-X_j' X_\pi' f')=\\ \qquad=\sum_1^r{}^{j}\left\{\frac{\partial\psi_{jk}}{\partial a_\tau}-\frac{\partial\psi_{j\tau}}{\partial a_k}\right\}X_j' f'.\end{cases}$$

Da überdies die Determinante der r^2 Functionen ψ_{jk} nicht verschwindet und mithin auch die Determinante der Ausdrücke: $\psi_{j\tau}\psi_{\pi k}-\psi_{\pi\tau}\psi_{jk}$ einen von Null verschiedenen Werth hat, so können wir die Gleichungen (54) auflösen und bekommen:

$$X_\pi' X_j' f'-X_j' X_\pi' f'=\sum_1^r{}^{s}\chi_{\pi js}(a_1\ldots a_r)X_s' f'.$$

Da zwischen den x' und den a allein keine Relation besteht, müssen diese Gleichungen für alle Werthe der x' und der a identisch erfüllt sein, ihre rechten Seiten müssen also ebenso wie die linken Functionen von $x_1'\ldots x_n'$ allein sein; das aber ist wegen der Unabhängigkeit der infinitesimalen Transformationen: $X_1' f'\ldots X_r' f'$ nur dann möglich, wenn die $\chi_{\pi js}$ blose Constanten sind. Lassen wir schliesslich die Striche weg und bedenken wir, dass: $X_\pi X_j f-X_j X_\pi f=(X_\pi X_j)$ ist, so gelangen wir wieder zu den oben auf anderm Wege gefundenen Relationen:

$$(52)\qquad (X_i X_k)=\sum_1^r{}^{s}c_{iks}X_s f\quad{}^{(i,\,k=1\ldots r)},$$

in denen die c_{iks} numerische Constanten bedeuten.

Befriedigt also eine Schaar (1) *vvn* ∞^r *Transformationen Differentialgleichungen von der Form* (15), *so stehen die r unabhängigen infinitesimalen Transformationen:* $X_1 f\ldots X_r f$ *paarweise in Beziehungen von der Form* (52).

Es ist das ein Theil von dem Inhalte des Theorems 21 auf S. 149

von Abschn. I. Zu dem übrigen Inhalte dieses Theorems führt die hier befolgte Methode nicht direct, sie liefert aber dafür noch gewisse bemerkenswerthe Beziehungen zwischen den ψ_{jk}. In der That, wenn man in den ersten Gleichungen auf S. 580 für: $X_\pi' X_j' f' - X_j' X_\pi' f'$ seinen Werth: $\Sigma c_{\pi j s} X_s' f'$ einsetzt und wenn man ausserdem beachtet, dass $X_1' f' \ldots X_r' f'$ unabhängige infinitesimale Transformationen sind, so erhält man die Differentialgleichungen:

$$(55) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \psi_{sk}}{\partial a_\tau} - \dfrac{\partial \psi_{s\tau}}{\partial a_k} = \sum_{j\pi}^{1 \ldots r} c_{\pi j s} \psi_{\pi k} \psi_{j\tau} \\ (s, k, \tau = 1 \ldots r), \end{cases}$$

die natürlich von den ψ_{jk} identisch befriedigt werden müssen*).

Besonders elegant ist die Methode, die wir in Abschnitt I auf S. 146—149 benutzt haben, um zu den Gleichungen (52) zu gelangen, vor der eben entwickelten hat sie überdies den Vorzug, dass sie sich nicht auf die Integrationstheorie der Systeme von Differentialgleichungen von der Form (15) stützt, sondern auf die einfachere Theorie der vollständigen Systeme. Wir wollen wenigstens ihren Gedankengang noch einmal zusammenfassen.

Zunächst wird das System (15) durch das äquivalente System:

$$(16) \qquad \xi_{ki}(x') = \sum_1^r{}_j \alpha_{kj}(a) \frac{\partial x_i'}{\partial a_j} \qquad (i = 1 \ldots n;\ k = 1 \ldots r)$$

ersetzt. Denkt man sich ferner die Gleichungen (1) nach den x aufgelöst: $x_i = F_i(x', a)$, so ergiebt sich aus (16) unmittelbar, dass $F_1 \ldots F_n$ als Functionen der x' und der a betrachtet gemeinsame Lösungen der r linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$(56) \qquad X_k' F + A_k F = 0 \qquad (k = 1 \ldots r)$$

sind, wo $X_k' F$ die auf S. 557 angegebene Bedeutung hat, während:

$$A_k F = \sum_1^r{}_j \alpha_{kj}(a_1 \ldots a_r) \frac{\partial F}{\partial a_j} \qquad (k = 1 \ldots r)$$

ist. Da die Determinante der α_{kj} nicht verschwindet, so sind die r Gleichungen (56) von einander unabhängig, da sie überdies gerade $n + r$ unabhängige Veränderliche enthalten und gerade n unabhängige Lö-

*) Die Differentialgleichungen (55) hat Lie 1879 nicht mit aufgestellt, sie gehen aber unmittelbar aus den Relationen hervor, die er damals in Bd. 16 der Math. Ann. abgeleitet hat. Veröffentlicht hat sie zuerst Maurer, Ber. d. Münchner Akad. 1888, S. 117.

sungen gemein haben, so bilden sie ein r-gliedriges vollständiges System. Drückt man diese Eigenschaft der Gleichungen (56) analytisch aus, so findet man leicht (s. Abschn. I, S. 148 f.), dass nicht blos Relationen von der Form:

$$X_k' X_j' F - X_j' X_k' F = \sum_1^r{}_s c_{kjs} X_s' F$$

bestehen, sondern auch solche von der Form:

$$A_k A_j F - A_j A_k F = \sum_1^r{}_s c_{kjs} A_s F,$$

wo die c_{kjs} beide Male dieselben Constanten sind.

Befriedigt also eine Schaar (1) *von* ∞^r *Transformationen Differentialgleichungen von der Form* (15) *oder, was auf dasselbe hinauskommt, solche von der Form* (16), *so stehen die* r *unabhängigen infinitesimalen Transformationen:* $X_1 f \ldots X_r f$ *paarweise in Beziehungen von der Form* (52) *und gleichzeitig stehen die* r *unabhängigen infinitesimalen Transformationen:*

$$A_k f = \sum_1^r{}_j \alpha_{kj}(a_1 \ldots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_j} \qquad (k = 1 \ldots r)$$

paarweise in Beziehungen von der Form:

$$(A_i A_k) = \sum_1^r{}_s c_{iks} A_s f \qquad (i, k = 1 \ldots r),$$

wo die c_{iks} *dieselben Constanten sind wie in* (52).

Die bisherigen Entwicklungen galten für jede Schaar (1) von ∞^r Transformationen, die Differentialgleichungen von der Form (15) erfüllt. Nehmen wir nun insbesondere an, dass die Schaar (1) eine Gruppe bildet und fügen wir noch die Voraussetzung hinzu, dass die Transformationen dieser Gruppe paarweise zu einander invers sind. Nach S. 566 ist dann sicher, dass unsre Gruppe von den infinitesimalen Transformationen: $X_1 f \ldots X_r f$ erzeugt ist. Andrerseits folgt aber aus den eben durchgeführten Betrachtungen, dass diese infinitesimalen Transformationen in den Beziehungen (52) stehen, also gelangen wir zu dem wichtigen Ergebnisse:

Jede r*-gliedrige Gruppe* (1) *mit paarweise inversen Transformationen enthält* r *unabhängige infinitesimale Transformationen:* $X_1 f \ldots X_r f$, *die paarweise in Beziehungen von der Form:*

$$(52) \qquad (X_i X_k) = \sum_1^r {}_s c_{iks} X_s f \quad (i, k = 1 \ldots r)$$

stehen; sie ist von diesen infinitesimalen Transformationen erzeugt, das heisst, sie besteht aus den endlichen Transformationen der ∞^{r-1} eingliedrigen Gruppen, die von den ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen: $\lambda_1 X_1 f + \cdots + \lambda_r X_r f$ erzeugt werden.

§ 113.

Wir könnten jetzt direct zum Beweise der Umkehrung des eben gefundenen Satzes übergehen und also zeigen, dass r unabhängige infinitesimale Transformationen: $X_1 f \ldots X_r f$, die in Beziehungen von der Form (52) stehen, immer in dem angegebenen Sinne eine r-gliedrige Gruppe mit paarweise inversen Transformationen erzeugen. Wir wollen uns aber auf einen etwas allgemeineren Standpunkt stellen. Wir wollen uns nämlich in den n Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$ irgend r unabhängige infinitesimale Transformationen: $X_1 f \ldots X_r f$ vorgelegt denken und wollen feststellen, unter welchen Bedingungen es eine r-gliedrige continuirliche Gruppe giebt, der diese infinitesimalen Transformationen und die von ihnen erzeugten eingliedrigen Gruppen angehören.

Soll es eine r-gliedrige continuirliche Gruppe G_r geben, der die r eingliedrigen Gruppen:

$$x_i' = x_i + \lambda_k \xi_{ki}(x) + \frac{\lambda_k^2}{1 \cdot 2} X_k \xi_{ki} + \cdots \quad (i = 1 \ldots n)$$
$$(k = 1 \ldots r)$$

angehören, so muss diese Gruppe auch die Transformation enthalten, die sich ergiebt, wenn man zuerst die allgemeine Transformation der eingliedrigen Gruppe $X_1 f$, dann die allgemeine Transformation von $X_2 f, \ldots$, schliesslich die allgemeine Transformation von $X_r f$ ausführt. Demnach enthält G_r sicher eine Transformation von der Form:

$$(57) \qquad x_i' = x_i + \sum_1^k {}_k \lambda_k \xi_{ki}(x) + \cdots \quad (i = 1 \ldots n),$$

wo $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ willkürliche Parameter bedeuten und wo die weggelassenen Glieder von der zweiten und von höherer Ordnung in $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ sind *).

*) Dieses Ergebniss gilt natürlich überhaupt für jede Gruppe, der die eingliedrigen Gruppen: $X_1 f \ldots X_r f$ angehören, also namentlich nicht blos für endliche Gruppen, sondern auch für unendliche.

Nun aber stellen die Gleichungen (57) mit den r willkürlichen Parametern $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ eine Schaar von Transformationen dar, die wegen der Unabhängigkeit von: $X_1 f \ldots X_r f$ aus gerade ∞^r verschiedenen Transformationen besteht (s. Abschn. I, S. 65, Satz 4), andrerseits enthält unsre Gruppe G_r, wenn sie überhaupt existirt, auch blos ∞^r verschiedene Transformationen, also können wir schliessen, dass unsre Gruppe mit der Schaar der ∞^r Transformationen (57) zusammenfällt.

Die Schaar (57) muss also eine r-gliedrige Gruppe bilden, als solche muss sie aber Differentialgleichungen von der Form:

$$\frac{\partial x_i'}{\partial \lambda_k} = \sum_1^r{}_j \psi_{jk}(\lambda)\, \xi_{ji}(x') \quad (i = 1 \ldots n;\ k = 1 \ldots r)$$

befriedigen, wo die Determinante der $\psi_{jk}(\lambda)$ nicht identisch verschwindet und wo die r unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

$$Z_k f = \sum_1^n{}_i \xi_{ki}(x_1 \ldots x_n)\, \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \ldots r)$$

von einander unabhängig sind. Bedenken wir überdies, dass sich für: $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$ ergiebt: $x_i' = x_i$ und dass aus (57) folgt:

$$\left[\frac{\partial x_i'}{\partial \lambda_k}\right]_{\lambda=0} = \xi_{ki}(x),$$

so erkennen wir sofort, dass Relationen von der Form:

$$\sum_1^r \psi_{jk}(0)\, \xi_{ji}(x) = \xi_{ki}(x) \quad (k = 1 \ldots r;\ i = 1 \ldots n)$$

bestehen. Das aber ist offenbar nur möglich, wenn die Determinante der $\psi_{jk}(\lambda)$ für $\lambda = 0$ einen endlichen von Null verschiedenen Werth besitzt und wenn sich die r infinitesimalen Transformationen: $Z_1 f \ldots Z_r f$ aus $X_1 f \ldots X_r f$ linear ableiten lassen. Verbinden wir endlich hiermit den zweiten Theil des ersten Fundamentalsatzes (s. S. 563 f.) und die Ergebnisse des vorigen Paragraphen, so können wir sagen:

Enthält eine r-gliedrige continuirliche Gruppe in den n Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$ die r unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

$$X_k f = \sum_1^n{}_i \xi_{ki}(x_1 \ldots x_n)\, \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \ldots r)$$

und die von diesen erzeugten eingliedrigen Gruppen, so sind ihre Transformationen paarweise zu einander invers und sie besteht aus den Transformationen der ∞^{r-1} eingliedrigen Gruppen, die von den ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen: $\lambda_1 X_1 f + \cdots + \lambda_r X_r f$ erzeugt werden; die

infinitesimalen Transformationen: $X_1 f \ldots X_r f$ *aber stehen ihrerseits paarweise in Beziehungen von der Form:*

$$(52) \qquad (X_i X_k) = \sum_1^r{}_s c_{iks} X_s f \quad (i, k = 1 \ldots r).$$

Damit ist aber die Frage, die wir uns auf S. 583 stellten, noch nicht vollständig erledigt. Wir wollten ja feststellen, unter welchen Bedingungen es eine r-gliedrige continuirliche Gruppe giebt, die r vorgelegte unabhängige infinitesimale Transformationen: $X_1 f \ldots X_r f$ und die von ihnen erzeugten eingliedrigen Gruppen enthält. Bisher haben wir aber blos nothwendige Bedingungen für die Existenz einer solchen Gruppe gefunden, wir haben nämlich gesehen, dass es eine solche Gruppe nur dann geben kann, wenn Relationen von der Form (52) bestehen, und dass die Gruppe, wenn sie existirt, aus den ∞^{r-1} eingliedrigen Gruppen besteht, deren infinitesimale Transformationen durch den Ausdruck: $\Sigma \lambda_k X_k f$ mit den willkürlichen Parametern $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ dargestellt werden. Es bleibt daher noch zu beweisen, dass diese nothwendigen Bedingungen zugleich hinreichend sind, dass also jedesmal, wenn r unabhängige infinitesimale Transformationen: $X_1 f \ldots X_r f$ in Beziehungen von der Form (52) stehen, die endlichen Transformationen der ∞^{r-1} eingliedrigen Gruppen: $\Sigma \lambda_k X_k f$ eine r-gliedrige Gruppe bilden.

Der Beweis hierfür ist bereits in Kap. 9 von Abschn. I erbracht, da aber die dort gegebene Darstellung der ganzen Untersuchung sowohl in der Anordnung als in der Form von der hier gegebenen nicht unwesentlich abweicht, so wollen wir die dem Beweise zu Grunde liegenden Gedanken noch einmal kurz auseinandersetzen.

Es soll bewiesen werden, dass die endlichen Transformationen der ∞^{r-1} eingliedrigen Gruppen: $\Sigma \lambda_k X_k f$ zusammengenommen eine r-gliedrige Gruppe bilden, sobald die r unabhängigen infinitesimalen Transformationen: $X_1 f \ldots X_r f$ in Beziehungen von der Form (52) stehen. Erinnern wir uns nun des ersten Fundamentalsatzes (S. 563), so erkennen wir sofort, dass dieser Beweis geleistet ist, sobald es uns gelingt, eine Schaar:

$$(58) \qquad \mathfrak{x}_i = f_i(x_1 \ldots x_n, \; a_1 \ldots a_r) \quad (i = 1 \ldots n)$$

von Transformationen anzugeben, die folgende Eigenschaften besitzt: Erstens muss sie Differentialgleichungen von der Form:

$$(15') \qquad \frac{\partial \mathfrak{x}_i}{\partial a_k} = \sum_1^r{}_j \psi_{jk}(a)\, \xi_{ji}(\mathfrak{x}) \quad (i = 1 \ldots n; \; k = 1 \ldots r)$$

befriedigen, in denen die Determinante der $\psi_{jk}(a)$ nicht identisch verschwindet, und zweitens muss sie die identische Transformation enthalten, aber so, dass die Determinante der $\psi_{jk}(a)$ für die Parameter der identischen Transformation einen endlichen von Null verschiedenen Werth besitzt. Gelingt es uns nämlich eine solche Schaar (58) anzugeben, so ist nach dem ersten Fundamentalsatze sicher, dass diese Schaar eine r-gliedrige Gruppe mit paarweise inversen Transformationen bildet und zwar eine Gruppe, die aus den ∞^{r-1} eingliedrigen Gruppen: $\Sigma \lambda_k X_k f$ besteht. Damit ist aber zugleich bewiesen, dass die Schaar dieser eingliedrigen Gruppen eine r-gliedrige Gruppe mit paarweise inversen Transformationen bildet.

Es handelt sich also nur noch darum, eine Schaar (58) von der eben beschriebenen Beschaffenheit zu finden.

Da die Determinante der $\psi_{jk}(a)$ nicht identisch verschwinden darf, lassen sich die Gleichungen (15′) auf die Form:

$$(16') \qquad \xi_{ki}(\mathfrak{x}) = \sum_1^r{}_j \alpha_{kj}(a) \frac{\partial \mathfrak{x}_i}{\partial a_j} \quad (i = 1 \ldots n;\ k = 1 \ldots r)$$

bringen. Differentialgleichungen von dieser Form erfüllt aber die Schaar (58) nach S. 581 dann und nur dann, wenn in der Auflösung: $x_i = F_i(\mathfrak{x}, a)$ der Gleichungen (58) die n Functionen $F_i(\mathfrak{x}, a)$ gemeinsame Lösungen der r linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$(59) \qquad \sum_1^n{}_\nu \xi_{k\nu}(\mathfrak{x}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_\nu} + \sum_1^r{}_j \alpha_{kj}(a) \frac{\partial f}{\partial a_j} = 0 \quad (k = 1 \ldots r)$$

sind. Gelingt es uns nun, r infinitesimale Transformationen:

$$A_k f = \sum_1^r{}_j \alpha_{kj}(a) \frac{\partial f}{\partial a_j} \quad (k = 1 \ldots r)$$

anzugeben, die paarweise in Beziehungen von der Form:

$$(60) \qquad (A_i A_k) = \sum_1^r{}_s c_{iks} A_s f \quad (i, k = 1 \ldots r)$$

stehen und für die die Determinante der $\alpha_{kj}(a)$ nicht identisch verschwindet, so ist damit zugleich auch die Existenz einer Schaar (58) von der verlangten Beschaffenheit bewiesen. Wegen der Relationen (52) und (60) bilden dann nämlich die Gleichungen (59) ein r-gliedriges vollständiges System, das nach den r Differentialquotienten von f nach $a_1 \ldots a_r$ auflösbar ist. Ist $a_1^0 \ldots a_r^0$ ein Werthsystem, für das die Determinante der $\alpha_{kj}(a)$ einen endlichen von Null verschiedenen Werth besitzt, so hat dieses vollständige System n Hauptlösungen

in Bezug auf: $a_k = a_k^0$, das heisst n Lösungen: $F_1(\mathfrak{x}, a) \dots F_n(\mathfrak{x}, a)$, die sich für: $a_k = a_k^0$ auf bezüglich: $\mathfrak{x}_1 \dots \mathfrak{x}_n$ reduciren (s. Abschn. I, Theor. 12, S. 91). Hieraus aber folgt, dass die Gleichungen: $x_i = F_i(\mathfrak{x}, a)$ nach $\mathfrak{x}_1 \dots \mathfrak{x}_n$ aufgelöst werden können und dass die betreffende Auflösung: $\mathfrak{x}_i = f_i(x, a)$ eine Schaar (58) von der verlangten Beschaffenheit darstellt; denn diese Schaar befriedigt Differentialgleichungen von der Form (16′), also auch solche von der Form (15′), ausserdem aber enthält sie die identische Transformation und für die zugehörigen Parameter: $a_k = a_k^0$ hat die Determinante der $\psi_{jk}(a)$ einen endlichen von Null verschiedenen Werth.

Jetzt fehlt nur noch eins, nämlich der Nachweis, dass es r unabhängige infinitesimale Transformationen: $A_1 f \dots A_r f$ von der eben vorausgesetzten Beschaffenheit giebt. Dieser Nachweis ist genau so zu führen wie auf S. 156 f. von Abschn. I; wir werden ihn aber wenigstens andeuten, weil wir noch eine Bemerkung daran knüpfen wollen.

Man setzt:

$$\mathfrak{X}_k^{(\mu)} f = \sum_1^n{}_\nu \, \xi_{k\nu}(\mathfrak{x}_1^{(\mu)} \dots \mathfrak{x}_n^{(\mu)}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_\nu^{(\mu)}} \quad (k = 1 \dots r)$$

und bildet die r Ausdrücke:

$$W_k f = \sum_1^r{}_\mu \, \mathfrak{X}_k^{(\mu)} f \quad (k = 1 \dots r),$$

zwischen denen nach Abschn. I, S. 66, Satz 5 sicher keine lineare Relation besteht. Die $W_k f$ sind dann offenbar durch Relationen von der Form:

$$(W_i W_k) = \sum_1^r{}_s \, c_{iks} W_s f \quad (i, k = 1 \dots r)$$

verknüpft, die r Gleichungen:

$$W_1 f = 0, \dots, W_r f = 0$$

in den $n \cdot r$ Veränderlichen $\mathfrak{x}_\nu^{(\mu)}$ bilden daher ein r-gliedriges vollständiges System mit $nr - r$ unabhängigen Lösungen: $u_1 \dots u_{nr-r}$. Führt man diese Lösungen zusammen mit r geeigneten Grössen $a_1 \dots a_r$ als neue Veränderliche ein, so ergiebt sich:

$$W_k f = \sum_1^r{}_j \, \omega_{kj}(a_1 \dots a_r;\ u_1 \dots u_{nr-r}) \frac{\partial f}{\partial a_j} \quad (k = 1 \dots r).$$

Betrachtet man endlich in diesen Ausdrücken die u als Constanten und nur die a als Veränderliche, so hat man r unabhängige infinitesimale Transformationen, die alle oben von $A_1 f \dots A_r f$ verlangten Eigenschaften besitzen.

Damit ist der Beweis dafür, dass die Schaar der ∞^{r-1} eingliedrigen Gruppen: $\Sigma \lambda_k X_k f$ unter der auf S. 585 gemachten Voraussetzung stets eine Gruppe bildet, vollständig erbracht. Wenn sich auch dieser Beweis in den zu Grunde liegenden Gedanken von dem in Abschnitt I gelieferten fast gar nicht unterscheidet, so glauben wir doch, dass die vorstehenden Entwicklungen nicht überflüssig sind, denn sie lassen eben die dem Beweise zu Grunde liegenden Gedanken deutlicher hervortreten, als es auf dem damaligen Standpunkte möglich war.

Jetzt noch die vorhin angekündigte Bemerkung.

Wir dachten uns oben die Functionen: $F_i(\mathfrak{x}, a)$ als die Hauptlösungen des vollständigen Systems (59) bestimmt; ferner bildeten wir r infinitesimale Transformationen: $A_1 f \ldots A_r f$ von der verlangten Beschaffenheit, indem wir von den Ausdrücken $W_k f$ ausgingen. Diese beiden Schritte kann man nun in einen zusammenziehen; man kann nämlich die $F_i(\mathfrak{x}, a)$ direct aus dem vollständigen System:

$$\mathfrak{X}_k f + \sum_1^r{}^{\mu} \mathfrak{X}_k^{(\mu)} f = 0 \quad (k = 1 \ldots r) \tag{61}$$

bestimmen, wo

$$\sum_1^n{}^{\nu} \xi_{k\nu}(\mathfrak{x}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_\nu} = \mathfrak{X}_k f$$

gesetzt ist. Man braucht zu diesem Zwecke nur unter den nr Veränderlichen $\mathfrak{x}_\nu^{(\mu)}$ r solche auszuwählen, dass die Gleichungen (61) nach den r zugehörigen Differentialquotienten von f auflösbar sind. Diese r ausgewählten Veränderlichen nenne man $a_1 \ldots a_r$, die $nr - r$ übrigen $v_1 \ldots v_{nr-r}$. Ist dann a_k^0, v_τ^0 irgend ein Werthsystem von allgemeiner Lage, so bestimme man die n Hauptlösungen:

$$\Omega_i(\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_n;\ a_1 \ldots a_r;\ v_1 \ldots v_{nr-r}) \quad (i = 1 \ldots n)$$

des vollständigen Systems (61), die sich für: $a_k = a_k^0$ auf bezüglich: $\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_n$ reduciren, und setze endlich:

$$x_i = \Omega_i(\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_n;\ a_1 \ldots a_r;\ v_1^0 \ldots v_{nr-r}^0) \quad (i = 1 \ldots n).$$

Durch Auflösung dieser Gleichungen nach $\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_n$ erhält man die endlichen Gleichungen der von $X_1 f \ldots X_r f$ erzeugten Gruppe.

Was diesen Betrachtungen ein gewisses Interesse verleiht, ist der Umstand, dass die Ω_i als Lösungen des vollständigen Systems (61) zugleich Invarianten der Gruppe sind, die von den infinitesimalen Transformationen:

$$\mathfrak{X}_k f + \sum_1^r{}^{\mu} \mathfrak{X}_k^{(\mu)} f \quad (k = 1 \ldots r)$$

erzeugt wird. Hieraus folgt nämlich, dass die Ω_i nichts andres sind, als Invarianten der $r+1$ Punkte: ξ_v, $\xi_v^{(1)} \dots \xi_v^{(r)}$ gegenüber der Gruppe: $X_1 f \dots X_r f$. Unser ganzes Verfahren kommt in Folge dessen einfach darauf hinaus, dass die endlichen Gleichungen der Gruppe: $X_1 f \dots X_r f$ durch die Invarianten dieser Punkte ausgedrückt werden. Lautet nämlich die Function Ω_i geschrieben in den Veränderlichen: ξ_v, $\xi_v^{(1)} \dots \xi_v^{(r)}$ folgendermassen:

$$\Psi_i(\xi_1 \dots \xi_n,\ \xi_1^{(1)} \dots \xi_n^{(1)}, \dots \xi_n^{(r)}),$$

und sind:

$$\xi_v = f_v(x_1 \dots x_n;\ a_1 \dots a_r) \quad (v = 1 \dots n) \tag{58}$$

die endlichen Gleichungen der Gruppe: $X_1 f \dots X_r f$, so bestehen vermöge (58) und:

$$\left\{ \xi_v^{(\mu)} = f_v(x_1^{(\mu)} \dots x_n^{(\mu)};\ a_1 \dots a_r) \quad (v = 1 \dots n) \atop (\mu = 1 \dots r) \right. \tag{62}$$

n Relationen von der Form:

$$\left\{ \Psi_i(\xi_1 \dots \xi_n;\ \xi_1^{(1)} \dots \xi_n^{(r)}) = \Psi_i(x_1 \dots x_n;\ x_1^{(1)} \dots x_n^{(r)}) \atop (i = 1 \dots n). \right. \tag{63}$$

Die endlichen Gleichungen der Gruppe: $X_1 f \dots X_r f$ können daher auch durch Auflösung der Gleichungen (63) nach $\xi_1 \dots \xi_n$ erhalten werden, nur muss man unter den verschiedenen möglichen Auflösungen die wählen, die für $\xi_v^{(\mu)} = x_v^{(\mu)}$ ergiebt: $\xi_v = x_v$ (vgl. S. 404, Anm.). Was wir oben gemacht haben, ist nur ein specieller Fall hiervon; wir ertheilten nämlich den $x_v^{(\mu)}$ feste Werthe: a_k^0, v_τ^0 und andrerseits ersetzten wir die unter den $\xi_v^{(\mu)}$, die wir mit $v_1 \dots v_{nr-r}$ bezeichnet hatten, durch $v_1^0 \dots v_{nr-r}^0$, die übrigen $\xi_v^{(\mu)}$ aber durch $a_1 \dots a_r$.

Alles das ist nur eine begriffliche Deutung gewisser Betrachtungen des Kapitels 9 von Abschn. I. Dass wir damals diese Deutung nicht ausdrücklich geben konnten, liegt auf der Hand, denn wir führten die Begriffe Invariante und Invariante von mehreren Punkten erst später ein. Factisch aber enthält das Kap. 9 von Abschn. I schon die Bestimmung der endlichen Gleichungen einer endlichen continuirlichen Gruppe durch die Invarianten, die $r+1$ Punkte gegenüber der Gruppe haben. Deshalb können wir nicht zugeben, dass Herr Killing, als er auf die Möglichkeit dieser Bestimmung hinwies (Math. Ann. Bd. 35, S. 430 f.) etwas wirklich Neues geleistet hat, zumal da er nicht einmal beachtet hat, dass man die Gleichungen, die von den Invarianten geliefert werden, in ganz bestimmter Weise auflösen muss, um zu den endlichen Gleichungen der Gruppe: $X_1 f \dots X_r f$ zu gelangen (vgl. auch S. 296 Anm.).

Es ist jetzt Zeit die Ergebnisse des vorigen und des gegenwärtigen Paragraphen zusammenzufassen. Wir erhalten so den zweiten Fundamentalsatz:

Zweiter Fundamentalsatz. *Jede r-gliedrige Gruppe:*

$$x_i' = f_i(x_1 \dots x_n;\ a_1 \dots a_r) \quad (i = 1 \dots n)$$

mit paarweise inversen Transformationen enthält r unabhängige infinitesimale Transformationen:

$$X_k f = \sum_1^n{}_\nu \xi_{k\nu}(x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \quad (k = 1 \dots r),$$

die paarweise in Beziehungen von der Form:

$$(X_i X_k) = \sum_1^r{}_s c_{iks} X_s f \quad (i, k = 1 \dots r) \tag{52}$$

stehen; alle infinitesimalen Transformationen der Gruppe sind aus $X_1 f \dots X_r f$ linear ableitbar und die Gruppe selbst besteht aus den ∞^{r-1} eingliedrigen Gruppen, die von den ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen: $\Sigma \lambda_k X_k f$ erzeugt werden.

Umgekehrt erzeugen r unabhängige infinitesimale Transformationen: $X_1 f \dots X_r f$, die paarweise in Beziehungen von der Form (52) *stehen, stets eine r-gliedrige Gruppe mit paarweise inversen Transformationen, das heisst, unter den gemachten Voraussetzungen bildet die Schaar der ∞^{r-1} eingliedrigen Gruppen, die von den ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen: $\Sigma \lambda_k X_k f$ erzeugt werden, eine r-gliedrige Gruppe mit paarweise inversen Transformationen.*

Dieser Satz ist, wie schon auf S. 546 erwähnt wurde, unter den drei Fundamentalsätzen der Gruppentheorie der praktisch wichtigste, das heisst der, der am häufigsten angewendet wird. Wir bezeichnen ihn deshalb geradezu als den *Hauptsatz* der Gruppentheorie.

§ 114.

Bei der grossen Bedeutung, die der zweite Fundamentalsatz für die ganze Gruppentheorie besitzt, ist es selbstverständlich, dass sich Lie vielfach mit dem Beweise dieses Satzes beschäftigt und nach und nach verschiedene Beweise dafür aufgestellt hat. Dabei handelte es sich weniger um den ersten Theil des Fundamentalsatzes als um den zweiten, denn dass jede r-gliedrige Gruppe mit paarweise inversen Transformationen von r unabhängigen infinitesimalen Transformationen: $X_1 f \dots X_r f$ erzeugt ist, die in Beziehungen von der Form (52) stehen, das ist offenbar leichter zu beweisen als der umgekehrte Satz, dass r

unabhängige infinitesimale Transformationen, die in den Beziehungen (52) stehen, stets eine r-gliedrige Gruppe erzeugen.

Der erste Beweis, den Lie für diesen letzteren Satz veröffentlicht hat, stammt aus dem Jahre 1878*). Er ist streng, wenn auch formell noch der Verbesserung fähig und beruht darauf, dass die infinitesimalen Transformationen der kanonischen Parametergruppe aufgestellt werden, die zu der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ gehört, jedoch wird der Begriff der kanonischen Parametergruppe nicht ausdrücklich eingeführt. Wir werden die bei diesem Beweise benutzten Ueberlegungen in Kap. 27 verwerthen, wo wir von Neuem auf die Bestimmung aller transitiven Gruppen von gegebener Zusammensetzung eingehen.

Der in Abschnitt I gelieferte Beweis, den wir in dem gegenwärtigen Kapitel ohne Aenderung der zu Grunde liegenden Gedanken, aber in etwas veränderter Form dargestellt haben, lässt an Einfachheit und Strenge nichts zu wünschen übrig. Trotzdem glauben wir nichts Ueberflüssiges zu thun, wenn wir jetzt noch einen andern Beweis mittheilen, der von den bisherigen Entwicklungen des gegenwärtigen Kapitels unabhängig erscheint, wenngleich eine tiefergehende Betrachtung zeigt, dass zwischen beiden Beweisen kein Wesensunterschied besteht. Unser neuer Beweis ist in der Hauptsache nur eine durchsichtige begriffliche Fassung unsers ursprünglichen Beweises**).

Wir beginnen mit einigen allgemeinen Betrachtungen. Sind:

$$x_1^{(\mu)} \ldots x_n^{(\mu)} \quad (\mu = 1 \ldots m)$$

die Coordinaten von m verschiedenen Punkten $P_1 \ldots P_m$ des Raumes $x_1 \ldots x_n$, so nennen wir den Inbegriff dieser m Punkte kurz ein *m-Eck* und wenn $P_1 \ldots P_m$ Punkte von allgemeiner gegenseitiger Lage sind, so bezeichnen wir das m-Eck als ein *m-Eck von allgemeiner Lage.*

Denken wir uns nun irgend eine Schaar:

$$y_i = f_i(x_1 \ldots x_n;\ a_1 \ldots a_r) \quad (i = 1 \ldots n) \tag{64}$$

von ∞^r Transformationen vorgelegt und die Transformationen dieser Schaar auf ein m-Eck von allgemeiner Lage ausgeführt. Unser m-Eck erhält dabei eine gewisse Anzahl von neuen Lagen, die durch die Gleichungen:

$$\begin{cases} y_i^{(\mu)} = f_i(x_1^{(\mu)} \ldots x_n^{(\mu)};\ a_1 \ldots a_r) \quad (i = 1 \ldots n) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\mu = 1 \ldots m) \end{cases} \tag{65}$$

*) Archiv for Math. og Naturv. Bd. III, S. 94—100 (Kristiania).

**) Lie hat diesen Beweis 1890 veröffentlicht in der Abhandlung: Neuer Beweis des zweiten Fundamentalsatzes u. s. w. (Leipz. Berichte 1890, S. 453 ff., vgl. namentlich S. 472—476).

bestimmt werden. Die Anzahl dieser neuen Lagen ist offenbar höchstens gleich ∞^r und mindestens gleich ∞^1, wir können daher annehmen, dass sie gerade gleich ∞^{l_m} ist, wo die positive ganze Zahl l_m der Bedingung: $0 < l_m \leq r$ genügt und nur von dem Werthe von m abhängt; l_m ist nämlich augenscheinlich nichts andres als die Zahl derjenigen unter den a, nach denen sich die $m \,.\, n$ Gleichungen (65) auflösen lassen und diese Zahl ist nur von m abhängig, solange $P_1 \ldots P_m$ Punkte von allgemeiner gegenseitiger Lage sind.

Unter der gemachten Annahme zerfällt die Schaar der ∞^r Transformationen (64) derart in ∞^{l_m} Unterschaaren von je ∞^{r-l_m}, dass jedesmal alle ∞^{r-l_m} Transformationen einer solchen Unterschaar das m-Eck: $P_1 \ldots P_m$ in dieselbe neue Lage: $Q_1 \ldots Q_m$ überführen, während zwei Transformationen der Schaar (64), die zwei verschiedenen Unterschaaren dieser Art angehören, dem m-Eck: $P_1 \ldots P_m$ zwei verschiedene neue Lagen ertheilen.

Fügen wir jetzt zu unserm m-Eck noch einen $(m+1)$-ten Punkt: $x_1^{(m+1)} \ldots x_n^{(m+1)}$ oder P_{m+1} von allgemeiner Lage hinzu, sodass ein $(m+1)$-Eck von allgemeiner Lage entsteht. Dieses $(m+1)$-Eck wird dann bei den ∞^r Transformationen (64) gerade ∞^{l_m+1} verschiedene Lagen annehmen. Wir wollen untersuchen, welchen Werth die Zahl l_{m+1} besitzt.

Wir betrachten unter den ∞^r Transformationen (64) alle die ∞^{r-l_m}, bei denen das m-Eck $P_1 \ldots P_m$ in irgend eine bestimmte seiner ∞^{l_m} neuen Lagen übergeht, etwa in die Lage: $Q_1 \ldots Q_m$. Ist $r - l_m > 0$, so erhält P_{m+1} als Punkt von allgemeiner Lage bei diesen ∞^{r-l_m} Transformationen mindestens ∞^1 verschiedene Lagen, also erhält auch das $(m+1)$-Eck: $P_1 \ldots P_{m+1}$ bei ihnen mindestens ∞^1 verschiedene Lagen, die aber alle dadurch ausgezeichnet sind, dass sie das m-Eck: $Q_1 \ldots Q_m$ gemein haben; da nun das m-Eck: $P_1 \ldots P_m$ bei den ∞^r Transformationen (64) gerade ∞^{l_m} verschiedene Lagen annimmt, so ergiebt sich, dass das $(m+1)$-Eck: $P_1 \ldots P_{m+1}$ bei diesen ∞^r Transformationen mindestens ∞^{l_m+1} verschiedene Lagen erhält, dass also $l_{m+1} > l_m$ ist. Hat dagegen $r - l_m$ den Werth Null, so nehmen das m-Eck und das $(m+1)$-Eck bei den ∞^r Transformationen (64) beide gleichviele Lagen an, nämlich ∞^r, also die grösste überhaupt mögliche Zahl, es ist demnach: $l_{m+1} = l_m$.

Wir sehen hieraus, dass jedesmal, wenn $l_m < r$ ist, $l_{m+1} > l_m$ ist, während im Falle $l_m = r$ nothwendig auch $l_{m+1}, l_{m+2} \ldots$ den Werth r haben. Da nun l_1 mindestens gleich 1 ist, so ergiebt sich, dass l_m höchstens dann $< r$ sein kann, wenn $m < r$ ist, dass aber auch dann l_m mindestens den Werth m hat. Es gilt also der

Satz 3. *Bei einer Schaar:*

$$y_i = f_i(x_1 \dots x_n;\ a_1 \dots a_r) \quad (i = 1 \dots n) \tag{64}$$

von ∞^r Transformationen erhält jedes r-Eck, $(r+1)$-Eck, ... von allgemeiner Lage gerade ∞^r verschiedene Lagen; ist $m < r$, so erhält jedes m-Eck von allgemeiner Lage bei ihr mindestens ∞^m und höchstens ∞^r verschiedene Lagen; ein m-Eck und ein $(m+1)$-Eck, die beide von allgemeiner Lage sind, erhalten bei ihr dann und nur dann gleichviele verschiedene Lagen, wenn sie beide ∞^r verschiedene Lagen annehmen.

Hieraus ergiebt sich zugleich noch der folgende

Satz 4. *Enthält eine Schaar:*

$$y_i = f_i(x_1 \dots x_n;\ a_1 \dots a_r) \quad (i = 1 \dots n) \tag{64}$$

von Transformationen r willkürliche Parameter und nimmt bei dieser Schaar irgend ein m-Eck von allgemeiner Lage $(m \leq r)$ blos ∞^{m-1} verschiedene Lagen an, so besteht die Schaar blos aus ∞^{m-1} verschiedenen Transformationen, unter den r Parametern: $a_1 \dots a_r$ sind also blos $m-1$ wesentlich.

Wären nämlich unter den r Parametern m oder noch mehr wesentlich, bestände also die Schaar (64) aus mindestens ∞^m verschiedenen Transformationen, so müsste sie nach dem vorigen Satze jedes m-Eck von allgemeiner Lage in mindestens ∞^m neue Lagen überführen, was nicht der Fall ist; enthielte andrerseits die Schaar (64) nicht ∞^{m-1} verschiedene Transformationen, sondern weniger, etwa blos ∞^{m-2}, so könnte sie ein m-Eck von allgemeiner Lage nur in ∞^{m-2} verschiedene Lagen überführen, was ebenfalls der Voraussetzung des Satzes widerspricht.

Der vorstehende Satz liefert uns ein neues Kriterium dafür, ob eine vorgelegte Schaar (64) mit r Parametern aus ∞^r verschiedenen Transformationen besteht, ob also die r Parameter alle wesentlich sind. Offenbar besteht nämlich die Schaar (64) dann und nur dann aus ∞^r verschiedenen Transformationen, wenn sie ein beliebig gewähltes r-Eck von allgemeiner Lage in ∞^r verschiedene Lagen überführt. Will man dieses Kriterium anwenden, so muss man in den Gleichungen (65) $m = r$ wählen und dann untersuchen, ob diese Gleichungen nach $a_1 \dots a_r$ auflösbar sind oder nicht; stets dann aber auch nur dann, wenn sie es sind, besteht die Schaar (64) aus ∞^r verschiedenen Transformationen. Allerdings kommt dieses Verfahren im Wesentlichen auf das hinaus, das wir in Abschn. I auf S. 13 f. angegeben haben.

Nehmen wir jetzt an, dass die Schaar unsrer ∞^r Transformationen (64) *die identische Transformation* enthält. Bezeichnen wir dann

wie früher, die allgemeine Transformation (64) unsrer Schaar mit $S_{(a)}$, so leuchtet ein, dass die Schaar der Transformationen: $S_{(a)}S_{(b)}$ die Schaar der $S_{(a)}$ umfasst.

Soll die Schaar (64) insbesondre eine r-gliedrige Gruppe bilden, so ist nothwendig und hinreichend, dass die Schaar: $S_{(a)}S_{(b)}$ mit der Schaar $S_{(a)}$ zusammenfällt, was unter der gemachten Voraussetzung dann und nur dann eintritt, wenn die Schaar $S_{(a)}S_{(b)}$ mit den $2r$ Parametern: $a_1 \ldots a_r$, $b_1 \ldots b_r$ ebenfalls blos aus ∞^r Transformationen besteht, wenn sie also (s. Satz 4) jedes $(r+1)$-Eck von allgemeiner Lage blos in ∞^r verschiedene Lagen überführt. Da aber jedes $(r+1)$-Eck von allgemeiner Lage schon bei der Schaar $S_{(a)}$ ∞^r verschiedene Lagen annimmt, so ist diese Bedingung sicher dann und nur dann erfüllt, wenn die Schaar der ∞^r $(r+1)$-Ecke, in die ein beliebig gewähltes $(r+1)$-Eck von allgemeiner Lage bei der Schaar $S_{(a)}$ übergeht, bei jeder Transformation $S_{(b)}$ invariant bleibt. Mit andern Worten:

Satz 5. *Eine Schaar:*

$$y_i = f_i(x_1 \ldots x_n;\ a_1 \ldots a_r) \quad (i = 1 \ldots n) \tag{64}$$

von ∞^r Transformationen, der die identische Transformation angehört, bildet dann und nur dann eine r-gliedrige Gruppe, wenn sich die $(r+1)$-Ecke des Raumes $x_1 \ldots x_n$ derart in Schaaren von je ∞^r anordnen, dass jede dieser Schaaren bei allen ∞^r Transformationen (64) *invariant bleibt.*

Nach diesen Vorbereitungen denken wir uns irgend r unabhängige infinitesimale Transformationen:

$$X_k f = \sum_1^n{}_v\, \xi_{kv}(x_1 \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_v} \quad (k = 1 \ldots r)$$

vorgelegt und wollen untersuchen, unter welchen Bedingungen die ∞^{r-1} eingliedrigen Gruppen, die von den ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen: $\Sigma \lambda_k X_k f$ erzeugt werden, zusammengenommen eine r-gliedrige Gruppe bilden.

Die endlichen Transformationen unsrer ∞^{r-1} eingliedrigen Gruppen werden durch die Gleichungen:

$$y_i = x_i + t \sum_1^r{}_k\, \lambda_k \xi_{ki}(x) + \frac{t^2}{1 \cdot 2} \sum_{kj}^{1 \ldots r} \lambda_k \lambda_j X_k \xi_{ji} + \cdots \quad (i = 1 \ldots n)$$

dargestellt, wofür wir der Kürze wegen schreiben wollen:

$$y_i = f_i(x_1 \ldots x_n;\ e_1 \ldots e_r) \quad (i = 1 \ldots n), \tag{66}$$

indem wir: $\lambda_k t = e_k$ setzen. Aus Theorem 8 auf S. 65 von Abschn. I wissen wir dann bereits, dass die Schaar (66) aus ∞^r verschiedenen

Transformationen besteht. Ueberdies enthält die Schaar (66) die identische Transformation, ihre Transformationen sind ja sogar paarweise zu einander invers; der Anwendung des Satzes 5 steht also nichts im Wege.

Jedes $(r+1)$-Eck: $x_1^{(\mu)} \ldots x_n^{(\mu)}$ $(\mu = 1 \ldots, r+1)$ von allgemeiner Lage nimmt bei den ∞^r Transformationen (66) ∞^r verschiedene Lagen an, die durch die Gleichungen:

$$(67) \qquad \left\{ y_i^{(\mu)} = f_i(x_1^{(\mu)} \ldots x_n^{(\mu)};\ e_1 \ldots e_r) \quad (i = 1 \ldots n) \right. \qquad (\mu = 1 \ldots, r+1)$$

bestimmt werden. Diese Gleichungen stellen zugleich die endlichen Gleichungen der ∞^{r-1} eingliedrigen Gruppen dar, die von den ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen:

$$(68) \qquad \sum_1^r{}_k \lambda_k \sum_1^{r+1}{}_\mu X_k^{(\mu)} f = \sum_1^r{}_k \lambda_k W_k f$$

in den $n(r+1)$ Veränderlichen $x_i^{(\mu)}$ erzeugt werden; unter $X_k^{(\mu)} f$ verstehen wir dabei wie früher den Ausdruck:

$$X_k^{(\mu)} f = \sum_1^n{}_i \xi_{ki}(x_1^{(\mu)} \ldots x_n^{(\mu)}) \frac{\partial f}{\partial x_i^{(\mu)}}.$$

Deuten wir die $n(r+1)$ Veränderlichen $x_i^{(\mu)}$ als Punktcoordinaten in einem Raume von $n(r+1)$ Dimensionen, so können wir den Satz 5, angewendet auf unsre Schaar (66), etwas anschaulicher so aussprechen: Die Schaar der ∞^r Transformationen (66) bildet dann und nur dann eine r-gliedrige Gruppe, wenn die Schaar der Transformationen (67) den $n(r+1)$-fach ausgedehnten Raum $x_i^{(\mu)}$ derart in lauter r-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten zerlegt, dass jede dieser Mannigfaltigkeiten bei der Schaar (67) invariant bleibt.

Jede Zerlegung des Raumes $x_i^{(\mu)}$ in r-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten wird durch $n(r+1) - r$ von einander unabhängige Gleichungen von der Form:

$$(69) \qquad \left\{ \Omega_\tau(x_1^{(1)} \ldots x_n^{(1)},\ x_1^{(2)} \ldots x_n^{(r+1)}) = C_\tau \right. \qquad (\tau = 1, 2 \ldots, (r+1)n - r)$$

dargestellt, wo die C_τ willkürliche Constanten sind. Soll nun jede der hierdurch definirten r-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten bei den ∞^r Transformationen (67) invariant bleiben, so ist nothwendig und hinreichend, dass die $(r+1)n - r$ Functionen Ω_τ bei jeder der ∞^{r-1} eingliedrigen Gruppen (68) invariant bleiben, das aber tritt (vgl. Abschn. I, S. 96 f.) dann und nur dann ein, wenn die Ω_τ gemeinsame Lösungen der r linearen partiellen Differentialgleichungen:

(70) $$W_1 f = 0, \ldots, W_r f = 0$$

sind.

Unsre Schaar (67) bildet demnach dann und nur dann eine r-gliedrige Gruppe, wenn die r linearen partiellen Differentialgleichungen (70) $(r+1)n - r$ unabhängige Lösungen gemein haben. Die Gleichungen (70) sind aber nach Abschn. I, S. 66, Satz 5 sicher von einander unabhängig, sie haben daher die verlangte Zahl von Lösungen nur dann gemein, wenn sie ein r-gliedriges vollständiges System bilden, das heisst, wenn Identitäten von der Form:

$$(W_i W_k) \equiv \sum_1^r{}_s \omega_{iks}(x_1^{(1)} \ldots x_n^{(r+1)}) W_s f \quad (i, k = 1 \ldots r)$$

bestehen (s. Abschn. I, S. 88, Satz 8). Diese Identitäten zerlegen sich wegen der Beschaffenheit der $W_k f$ sofort in die folgenden:

(71) $$(X_i^{(\mu)} X_k^{(\mu)}) \equiv \sum_1^r{}_s \omega_{iks} X_s^{(\mu)} f \quad (i, k = 1 \ldots r),$$

wo μ alle Werthe von 1 bis $r+1$ annehmen kann.

Aus dem schon benutzten Satze 5 auf S. 66 von Abschn. I geht nun hervor, dass schon die unter den Gleichungen (71), in denen μ einen der Werthe $1, 2 \ldots r$ besitzt, die ω_{iks} vollständig bestimmen, und zwar liefern diese Gleichungen, da sie von den $x_i^{(r+1)}$ frei sind, auch für die ω_{iks} Ausdrücke, die von den $x_i^{(r+1)}$ frei sind. In derselben Weise ergiebt sich aber überhaupt, dass die ω_{iks} von allen $x_i^{(\mu)}$ frei sind, sie sind also blose Constanten.

Wir sind damit wieder zu dem Satze gelangt:

Sind: $X_1 f \ldots X_r f$ unabhängige infinitesimale Transformationen, so bilden die endlichen Transformationen der ∞^{r-1} eingliedrigen Gruppen: $\Sigma \lambda_k X_k f$ dann und nur dann eine r-gliedrige Gruppe, wenn die $X_k f$ paarweise in Beziehungen von der Form:

(52) $$(X_i X_k) = \sum_1^r{}_s c_{iks} X_s f \quad (i, k = 1 \ldots r)$$

stehen, wo die c_{iks} Constanten bedeuten.

Die Betrachtungen, die uns jetzt zu diesem Satze geführt haben, stehen in sehr enger Beziehung zu denen, die im zweiten Theile des vorigen Paragraphen benutzt worden sind. Wir begnügen uns jedoch, darauf hinzuweisen.

Schliesslich wollen wir noch an das merkwürdige Theorem 45 auf S. 258 von Abschn. I erinnern. Dieses Theorem sagt aus, dass

die Schaar $S_{(\varepsilon)}$ der ∞^r Transformationen (66) stets dann, und wir können hinzufügen: nur dann eine r-gliedrige Gruppe bildet, wenn auch jede Transformation von der Form: $S_{(\varepsilon)}^{-1} S_{(\sigma)} S_{(\varepsilon)}$ der Schaar (66) angehört. Es ist aber leicht zu sehen, dass diese Bedingung darauf hinauskommt, dass die r unabhängigen Gleichungen (70) ein r-gliedriges vollständiges System bilden.

In der That, wenn die Schaar (66) die bewusste Eigenschaft hat, so gilt dasselbe auch von der Schaar (67), das heisst: wenn wir die Transformation (67) mit $T_{(\sigma)}$ bezeichnen, so gehört auch jede Transformation von der Form: $T_{(\varepsilon)}^{-1} T_{(\sigma)} T_{(\varepsilon)}$ der Schaar (67) an. Erinnern wir uns nun, dass die Gleichungen (67) die endlichen Gleichungen der ∞^{r-1} eingliedrigen Gruppen: $\Sigma \lambda_k W_k f$ darstellen, so ergiebt sich, dass jede endliche Transformation einer jeden eingliedrigen Gruppe: $\Sigma \lambda_k W_k f$ den Raum $x_i^{(\mu)}$ so transformirt, dass die Bahncurven der ∞^{r-1} eingliedrigen Gruppen: $\Sigma \varrho_k W_k f$ unter einander vertauscht werden, das aber ist gleichbedeutend damit, dass die r unabhängigen Gleichungen (70) ein r-gliedriges vollständiges System bilden.

§ 115.

Wir kommen zu dem dritten Fundamentalsatze, der das Theorem 27 auf S. 170 und den Satz 1 auf S. 297 von Abschn. I zusammenfasst. Wir sprechen ihn zunächst aus:

Dritter Fundamentalsatz. *Sind:*

$$X_k f = \sum_1^n {}_\nu \xi_{k\nu}(x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \quad (k = 1 \dots r)$$

unabhängige infinitesimale Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe in den Veränderlichen $x_1 \dots x_n$, bestehen also Relationen von der Form:

$$(X_i X_k) = \sum_1^r {}_s c_{iks} X_s f \quad (i, k = 1 \dots r), \tag{52}$$

so erfüllen die r^3 Constanten c_{iks}, die die Zusammensetzung der betreffenden Gruppe bestimmen, die Gleichungen:

$$\begin{cases} c_{iks} + c_{kis} = 0 \\ \sum_1^r {}_\tau \{c_{ik\tau} c_{\tau js} + c_{kj\tau} c_{\tau is} + c_{ji\tau} c_{\tau ks}\} = 0 \\ (i, k, j, s = 1 \dots r). \end{cases} \tag{72}$$

Kennt man umgekehrt r^3 Constanten c_{iks}, die den Gleichungen (72) genügen, so giebt es stets, wenn man die Zahl n genügend gross wählt, in n Veränderlichen: $x_1 \dots x_n$ r unabhängige infinitesimale Transformationen:

$X_1 f \ldots X_r f$, *die gerade in den Beziehungen* (52) *stehen und also eine* r*-gliedrige Gruppe von der gegebenen Zusammensetzung* c_{iks} *erzeugen.*

Der erste Theil dieses Satzes kann nicht einfacher bewiesen werden, als es auf S. 169 von Abschn. I geschehen ist, nämlich durch Einsetzen der Werthe:

$$(X_i X_k) = \sum_1^r{}_s c_{iks} X_s f$$

in die Identitäten:

$$(X_i X_k) + (X_k X_i) = 0$$

$$((X_i X_k) X_j) + ((X_k X_j) X_i) + ((X_j X_i) X_k) = 0,$$

die beide sehr leicht aus der Definition:

$$(X_i X_k) = X_i X_k f - X_k X_i f$$

des Klammerausdrucks folgen*).

Wir wenden uns daher gleich zu dem zweiten Theile des dritten Fundamentalsatzes, also zu dem Satze, dass zu jedem Systeme von r^3 Constanten c_{iks}, das die Gleichungen (72) erfüllt, r-gliedrige Gruppen von der Zusammensetzung c_{iks} gehören.

Bei der Ausarbeitung des ersten Abschnitts sollte für diesen Satz der Beweis gegeben werden, den Lie in Bd. 25 der Math. Ann. auf S. 92 ff. mitgetheilt hatte. Während des Druckes stellte sich aber heraus, dass dieser Beweis nicht in allen Fällen anwendbar war. Er beruhte nämlich auf der Bildung einer linearen homogenen Gruppe von der Zusammensetzung c_{iks}, aber diese lineare homogene Gruppe**) war unter Umständen blos meroedrisch isomorph mit den r-gliedrigen Gruppen von der Zusammensetzung c_{iks}. Da nun damals bereits für

*) Die in Abschnitt I auf S. 95 gegebene einfache Begründung der speciellen Jacobischen Identität rührt von Engel her.

**) Die Lücke der betreffenden Auseinandersetzungen in den Math. Ann. Bd. 25, S. 92 ff. beruht darauf, dass eine r-gliedrige Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ und ihre adjungirte Gruppe $E_1 f \ldots E_r f$ zwar immer isomorph, *aber nicht immer holoedrisch isomorph* sind. Hieraus folgt, dass der an jener Stelle gegebene Beweis des Satzes, *dass jede* r*-gliedrige Gruppe mit einer linearen homogenen Gruppe gleichzusammengesetzt* ist, nicht allgemein gültig ist. Wir bezweifeln jedoch keineswegs, dass der soeben formulirte Satz ausnahmelos richtig ist, es ist uns aber nicht gelungen einen Beweis zu finden, der alle Möglichkeiten umfasst. Dass unser Satz jedenfalls für alle Transformationsgruppen in zwei Veränderlichen besteht, ergiebt sich ohne weiteres. Wir halten es für richtig, ausdrücklich darauf hinzuweisen, dass ein allgemein gültiger Beweis dieses Satzes, der gelegentlich auch von andrer Seite benutzt worden ist, noch fehlt. Ist es uns auch gelungen, die hier besprochene Lücke in Lies älteren Untersuchungen durch andere Hülfsmittel auszufüllen, so ist es doch aus vielen Gründen wünschenswerth, dass die Frage, ob es lineare homogene Gruppen von allen möglichen Zusammensetzungen giebt, definitiv entschieden werde.

den zweiten Abschnitt ein viel allgemeinerer Satz abgeleitet war, der den hier in Rede stehenden Satz als besondern Fall umfasste, so wurde vorgezogen, den Satz über die Existenz von Gruppen von gegebener Zusammensetzung im ersten Abschnitte ohne Beweis mitzutheilen (s. das. S. 297) und den Beweis erst im zweiten Abschnitte zu erbringen. Dort findet man jenen allgemeineren Satz in Kapitel 13 und seine Anwendung auf den vorliegenden besondern Fall in Kap. 17.

Lie hat den allgemeinen Satz des Kapitels 13 von Abschn. II und den daraus folgenden Satz, der uns hier am nächsten angeht, zuerst 1888 mit ausgeführtem Beweis veröffentlicht*). Ohne Lies Beweis des letzten Satzes zu kennen, zeigte Herr Schur später auf anderm Wege, dass zu jedem Systeme von c_{iks}, das die Relationen (72) erfüllt, r-gliedrige Gruppen von der Zusammensetzung c_{iks} gefunden werden können, er stellte nämlich die infinitesimalen Transformationen derartiger Gruppen durch gewöhnliche Potenzreihen dar**). Dieser Beweis, den Herr Schur mittlerweile sehr wesentlich vereinfacht hat, ist gewiss von grossem Interesse, dafür hat aber der von Lie gegebene den Vorzug, dass die Bestimmung aller Gruppen von gegebener Zusammensetzung direct auf die Integration *gewöhnlicher* Differentialgleichungen zurückgeführt wird, was bei Herrn Schur nicht geschieht; dazu kommt, dass die Liesche Methode zugleich ein viel umfassenderes Problem erledigt; Lies Betrachtungen stellen u. A., wie wir später zeigen, die *Tragweite der Jacobischen Identität* genau fest.

Wenn wir jetzt von Neuem auf den Beweis des zweiten Theils unsers dritten Fundamentalsatzes eingehen, so hat das folgenden Grund: Der in Abschnitt II gegebene Beweis beruht auf der Theorie der Functionengruppen und insbesondere auf der Bestimmung aller Functionengruppen von gegebener Zusammensetzung. Dadurch wird der Anschein erweckt, als ob es zum Verständnisse des Beweises erforderlich sei, die Theorie der Functionengruppen und der Berührungstransformationen zu kennen. Dem ist aber nicht so, vielmehr lässt sich der Beweis sehr gut so führen, dass von diesen Theorien gar nichts benutzt wird. Wir werden daher wenigstens andeuten, wie das zu machen ist.

Wir denken uns also r^3 Constanten c_{iks} gegeben, die den Bedin-

*) Ges. d. Wiss. zu Kristiania 1888; ohne Beweis sind diese Sätze auch in den Leipz. Ber. von 1888 mitgetheilt (S. 14 f.).

**) Leipz. Ber. 1889, S. 229 ff. u. Math. Ann. Bd. 35, S. 179. Herr Schur hat mittlerweile (Math. Ann. Bd. 41, S. 529, Anm.) ausdrücklich darauf hingewiesen, dass Lie auch in Bezug auf den Beweis die Priorität hat.

gungen (72) genügen und versuchen r unabhängige infinitesimale Transformationen: $X_1 f \ldots X_r f$ zu bestimmen, die in den Beziehungen (52) stehen.

Wir wählen irgend r Grössen: $H_1 \ldots H_r$ zu unabhängigen Veränderlichen und setzen:

$$\sum_1^r{}_s c_{iks} H_s = |H_i H_k| \qquad (i, k = 1 \ldots r). \tag{73}$$

Für das Symbol $|H_i H_k|$ bestehen dann wegen der Gleichungen (72) die Identitäten:

$$\begin{cases} |H_i H_k| + |H_k H_i| \equiv 0 \\ ||H_i H_k| H_j| + ||H_k H_j| H_i| + ||H_j H_i| H_k| \equiv 0 \\ \qquad (i, k, j = 1 \ldots r). \end{cases} \tag{74}$$

Sind ferner U und V irgend zwei beliebige Functionen von $H_1 \ldots H_r$, so setzen wir:

$$\begin{cases} |UV| = \sum_{ik}^{1 \ldots r} |H_i H_k| \frac{\partial U}{\partial H_i} \frac{\partial V}{\partial H_k} \\ \qquad = \sum_{ik}^{1 \ldots r} \left\{ \sum_1^r{}_s c_{iks} H_s \right\} \frac{\partial U}{\partial H_i} \frac{\partial V}{\partial H_k}. \end{cases} \tag{75}$$

Das hierdurch definirte Symbol: $|UV|$ genügt erstens der Identität:

$$|UV| + |VU| \equiv 0 \tag{76}$$

und zweitens, wenn W irgend eine dritte Function von $H_1 \ldots H_r$ bezeichnet, der Identität:

$$||UV| W| + ||VW| U| + ||WU| V| \equiv 0, \tag{77}$$

die der Jacobischen Identität analog ist. Das erste leuchtet unmittelbar ein und das zweite beweist man genau so wie auf S. 236 f. von Abschn. II, indem man nämlich zunächst zeigt, dass die Identität (77) für: $U = H_i$, $V = H_k$ bei beliebigem W besteht, dann dass sie für: $U = H_i$ bei beliebigen V und W und endlich, dass sie bei beliebigen U, V, W erfüllt ist.

Mit Berücksichtigung von (76) lässt sich die Identität (77) auch schreiben:

$$|U|VW|| - |V|UW|| \equiv ||UV| W|. \tag{78}$$

Setzt man daher: $U = H_i$, $V = H_k$ und $W = f$, so ergiebt sich wegen (73):

$$|H_i|H_k f|| - |H_k|H_i f|| \equiv \sum_1^r{}_s c_{iks} |H_s f|; \tag{79}$$

die r infinitesimalen Transformationen:

$$|H_k f| = A_k f \quad (k = 1 \dots r)$$

in den r Veränderlichen: $H_1 \dots H_r$ stehen somit in den Beziehungen:

$$(80) \qquad (A_i A_k) = \sum_1^r{}_s c_{iks} A_s f \quad (i, k = 1 \dots r).$$

Wären also: $A_1 f \dots A_r f$ von einander unabhängig, so hätten wir bereits, ohne Integration, eine r-gliedrige Gruppe von der gegebenen Zusammensetzung.

Aber freilich brauchen: $A_1 f \dots A_r f$ nicht immer von einander unabhängig zu sein; sind sie es nicht, so erzeugen sie zwar eine Gruppe, aber diese Gruppe ist nur meroedrisch isomorph mit der gesuchten r-gliedrigen Gruppe von der Zusammensetzung c_{iks}. Tritt dieser Fall ein, so müssen wir andre Mittel und Wege finden, um unsre Aufgabe zu erledigen.

Uebrigens ist uns die Gruppe: $A_1 f \dots A_r f$ nicht unbekannt, sie ist die zur adjungirten dualistische Gruppe, die wir in Kap. 19 von Abschn. II eingehend untersucht haben.

Um nun in jedem Falle eine r-gliedrige Gruppe von der Zusammensetzung c_{iks} angeben zu können, versuchen wir zunächst r solche von einander unabhängige Functionen: $U_1 \dots U_r$ von $H_1 \dots H_r$ zu bestimmen, dass die Ausdrücke: $|U_i U_k|$ möglichst einfach, also entweder $= 0$ oder $= 1$ werden. Das erreichen wir genau in derselben Weise wie in Abschn. II auf S. 238—240, wir wollen daher die dortigen Entwicklungen, die von der Theorie der Berührungstransformationen ganz unabhängig sind, nicht noch einmal wiederholen und nur ihr Ergebniss mittheilen: Es gelingt durch Integration einer Reihe von Systemen simultaner gewöhnlicher Differentialgleichungen*) $r = 2m + q$ unabhängige Functionen: $P_1 \dots P_{m+q}$, $X_1 \dots X_m$ von $H_1 \dots H_r$ zu bestimmen, die in den Beziehungen:

$$(81) \quad \begin{cases} |P_\mu P_\tau| = |P_\mu X_\nu| = |X_\pi X_\nu| = 0 \quad (\mu \neq \nu) \quad |P_\nu X_\nu| = 1 \\ \qquad\qquad (\mu, \tau = 1 \dots m+q;\ \nu, \pi = 1 \dots m) \end{cases}$$

stehen.

Denkt man sich jetzt umgekehrt: $H_1 \dots H_r$ als Functionen von: $P_1 \dots P_{m+q}$, $X_1 \dots X_m$ ausgedrückt:

$$(82) \qquad H_k = \Omega_k(P_1 \dots P_{m+q}, X_1 \dots X_m) \quad (k = 1 \dots r),$$

so ergiebt sich (vgl. Abschn. II, S. 241):

---

*) von denen das erste in unserm Falle sogar linear und homogen ist und lauter constante Coefficienten hat.

$$(83)\qquad \begin{cases} |H_i H_k| = |\Omega_i \Omega_k| = \sum_1^m{}^{\mu} \left(\dfrac{\partial \Omega_i}{\partial P_\mu} \dfrac{\partial \Omega_k}{\partial X_\mu} - \dfrac{\partial \Omega_i}{\partial X_\mu} \dfrac{\partial \Omega_k}{\partial P_\mu} \right) \\ \qquad\qquad = \sum_1^r{}^{s} c_{iks} \Omega_s \end{cases}$$

und ausserdem, wenn f eine beliebige Function von $H_1 \ldots H_r$ bedeutet:

$$|H_i f| = |\Omega_i f| = \sum_1^m{}^{\mu} \left(\frac{\partial \Omega_i}{\partial P_\mu} \frac{\partial f}{\partial X_\mu} - \frac{\partial \Omega_i}{\partial X_\mu} \frac{\partial f}{\partial P_\mu} \right) = \overline{B}_i f.$$

Hier stellt der Ausdruck: $\overline{B}_i f$ die infinitesimale Transformation in den Veränderlichen: $X_1 \ldots X_m$, $P_1 \ldots P_{m+q}$ dar, die aus der infinitesimalen Transformation $|H_i f|$ entsteht, wenn man an Stelle der H vermöge (82) die neuen Veränderlichen X, P einführt. Mit Berücksichtigung von (79) ergiebt sich daher, dass die $\overline{B}_i f$ in den Beziehungen:

$$(84)\qquad (\overline{B}_i \overline{B}_k) = \sum_1^r{}^{s} c_{iks} \overline{B}_s f \quad (i, k = 1 \ldots r)$$

stehen.

Hiermit ist freilich anscheinend noch nicht viel gewonnen, denn unter den infinitesimalen Transformationen: $\overline{B}_1 f \ldots \overline{B}_r f$ befinden sich offenbar genau so viele von einander unabhängige wie unter: $|H_1 f| \ldots |H_r f|$, also haben wir noch immer keine in allen Fällen ausreireichende Darstellung für eine r-gliedrige Gruppe von der Zusammensetzung c_{iks}. Aber dafür ist es jetzt sehr leicht, zu einer solchen Darstellung zu gelangen, wir brauchen nämlich blos die infinitesimalen Transformationen: $\overline{B}_i f$ durch Hinzunahme neuer Veränderlicher zu erweitern, um r unabhängige infinitesimale Transformationen zu erhalten, die in den verlangten Beziehungen (52) stehen.

Bei den infinitesimalen Transformationen: $\overline{B}_i f$ werden unter den Veränderlichen: $X_1 \ldots X_m$, $P_1 \ldots P_{m+q}$ nur $X_1 \ldots X_m$, $P_1 \ldots P_m$ transformirt. Da nun in dem Bildungsgesetze der $B_i f$ eine gewisse Reciprocität zwischen $P_1 \ldots P_m$ und $X_1 \ldots X_m$ unverkennbar ist, so liegt es recht nahe, q Veränderliche: $X_{m+1} \ldots X_{m+q}$ hinzuzufügen, die in $\Omega_1 \ldots \Omega_r$ nicht vorkommen, und diese Veränderlichen den $P_{m+1} \ldots P_{m+q}$ in derselben Weise entsprechen zu lassen, wie $X_1 \ldots X_m$ den $P_1 \ldots P_m$ entsprechen. Mit andern Worten: es liegt nahe, in den $2(m+q)$ Veränderlichen: $X_1 \ldots X_{m+q}$, $P_1 \ldots P_{m+q}$ die r infinitesimalen Transformationen:

$$B_i f = \sum_1^{m+q}{}^{j} \left(\frac{\partial \Omega_i}{\partial P_j} \frac{\partial f}{\partial X_j} - \frac{\partial \Omega_i}{\partial X_j} \frac{\partial f}{\partial P_j} \right) \quad (i = 1 \ldots r)$$

zu bilden und zu untersuchen, ob die nicht etwa in den Beziehungen:

$$(85) \qquad (B_i B_k) = \sum_1^r{}^s c_{iks} B_s f \quad (i, k = 1 \dots r)$$

stehen und von einander unabhängig sind. Wir werden sehen, dass man damit das Richtige getroffen hat.

In der That, da $\Omega_1 \dots \Omega_r$ von $X_{m+1} \dots X_{m+q}$ frei sind, so lassen sich die infinitesimalen Transformationen $B_i f$ auch so schreiben:

$$B_i f = \overline{B}_i f + \sum_1^q{}^\tau \frac{\partial \Omega_i}{\partial P_{m+\tau}} \frac{\partial f}{\partial X_{m+\tau}}.$$

Da $X_{m+1} \dots X_r$ in den Coefficienten von: $B_1 f \dots B_r f$ nicht vorkommen und da: $P_{m+1} \dots P_r$ bei: $B_1 f \dots B_r f$ gar nicht transformirt werden, so ergiebt sich:

$$(B_i B_k) = (\overline{B}_i \overline{B}_k) + \sum_1^q{}^\tau \left(\overline{B}_i \frac{\partial \Omega_k}{\partial P_{m+\tau}} - \overline{B}_k \frac{\partial \Omega_i}{\partial P_{m+\tau}} \right) \frac{\partial f}{\partial X_{m+\tau}}.$$

Nun aber ist augenscheinlich:

$$\overline{B}_i \frac{\partial \Omega_k}{\partial P_{m+\tau}} - \overline{B}_k \frac{\partial \Omega_i}{\partial P_{m+\tau}} = \frac{\partial}{\partial P_{m+\tau}} \sum_1^m{}^\mu \left(\frac{\partial \Omega_i}{\partial P_\mu} \frac{\partial \Omega_k}{\partial X_\mu} - \frac{\partial \Omega_i}{\partial X_\mu} \frac{\partial \Omega_k}{\partial P_\mu} \right)$$
$$= \sum_1^r{}^s c_{iks} \frac{\partial \Omega_s}{\partial P_{m+\tau}},$$

wegen (83), berücksichtigt man daher noch die Gleichungen (84), so sieht man unmittelbar, dass: $B_1 f \dots B_r f$ wirklich in den Beziehungen (85) stehen.

Schliesslich ist auch leicht zu zeigen, dass $B_1 f \dots B_r f$ von einander unabhängig sind. Wären sie es nämlich nicht, so müsste es möglich sein, r solche nicht verschwindende Constanten $e_1 \dots e_r$ anzugeben, dass der Ausdruck:

$$\sum_1^r{}^i e_i B_i f$$

für jede Function f der $2m + 2q$ Veränderlichen: $P_1 \dots P_{m+q}$, $X_1 \dots X_{m+q}$ identisch verschwände. Setzte man daher für f der Reihe nach die Werthe: $P_1 \dots P_{m+q}$, $X_1 \dots X_{m+q}$ ein, so müssten die $2m + 2q$ Ausdrücke:

$$\sum_1^r{}^i e_i \frac{\partial \Omega_i}{\partial P_j}, \quad \sum_1^r{}^i e_i \frac{\partial \Omega_i}{\partial X_j} \quad (j = 1 \dots m + q)$$

alle identisch verschwinden, $\Sigma e_i \Omega_i$ wäre also eine blose Constante; das aber ist unmöglich, da $\Omega_1 \dots \Omega_r$ unabhängige Functionen der $2m + q = r$ Veränderlichen: $P_1 \dots P_{m+q}$, $X_1 \dots X_m$ sind.

Demnach sind: $B_1 f \ldots B_r f$ unabhängige infinitesimale Transformationen, die in den Beziehungen (85) stehen und infolgedessen eine r-gliedrige Gruppe von der gegebenen Zusammensetzung c_{iks} erzeugen. Unsre Aufgabe ist also gelöst und zwar ohne die Theorie der Berührungstransformationen und der Functionengruppen zu benutzen. Freilich ist nicht zu leugnen, dass die ganze Entwicklung bei Benutzung dieser Theorien durchsichtiger und naturgemässer wird; dagegen wird sie nicht wesentlich kürzer, denn nur der Beweis, dass: $B_1 f \ldots B_r f$ eine r-gliedrige Gruppe von der Zusammensetzung c_{iks} erzeugen, ist hier etwas länger als in Abschnitt II, wo wir von der allgemeinen Jacobischen Identität Gebrauch machen konnten.

Wir wollen noch eine bemerkenswerthe Form erwähnen, auf die die gefundene Gruppe: $B_1 f \ldots B_r f$ gebracht werden kann. Führt man nämlich in $B_1 f \ldots B_r f$ an Stelle von: $X_1 \ldots X_{m+q}$, $P_1 \ldots P_{m+q}$ die $r+q=2m+2q$ unabhängigen Veränderlichen: $H_1 \ldots H_r$, $X_{m+1} \ldots X_{m+q}$ ein, so ergiebt sich:

$$B_i f = \sum_1^r {}^k \, | H_i H_k | \frac{\partial f}{\partial H_k} + \sum_1^q {}^\tau \left[\frac{\partial \Omega_i}{\partial P_{m+\tau}} \right] \frac{\partial f}{\partial X_{m+\tau}} \quad (i=1 \ldots r),$$

wo die eckige Klammer andeuten soll, dass: $X_1 \ldots X_m$, $P_1 \ldots P_{m+q}$ durch $H_1 \ldots H_r$ auszudrücken sind. Diese Form der Gruppe: $B_1 f \ldots B_r f$ zeigt unmittelbar, dass es in $r+q$ Veränderlichen eine r-gliedrige Gruppe von der Zusammensetzung c_{iks} giebt, bei der die r Veränderlichen: $H_1 \ldots H_r$ für sich transformirt werden und zwar durch die lineare homogene Gruppe:

$$A_i f = \sum_1^r {}^k \, | H_i H_k | \frac{\partial f}{\partial H_k} \quad (i=1 \ldots r),$$

die zu der adjungirten Gruppe der r-gliedrigen Gruppen von der Zusammensetzung c_{iks} dualistisch ist.

Zum Schlusse noch ein paar Worte über die Entwicklungen des Kapitels 13 von Abschnitt II. Ausser ihrer Bedeutung für die Theorie der Gruppen von Berührungstransformationen und von Punkttransformationen zeichnen sich diese Entwicklungen auch noch dadurch aus, dass sie über die Tragweite der Jacobischen Identität Aufschluss geben.

Sind φ, χ und ψ irgend drei Functionen der $2n$ Veränderlichen: $x_1 \ldots x_n$, $p_1 \ldots p_n$ und setzt man:

$$\sum_1^n {}^\nu \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_\nu} \frac{\partial \chi}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} \frac{\partial \chi}{\partial p_\nu} \right) = (\varphi \chi),$$

so gilt für das Symbol: ( ) die Identität:

$$(\varphi\chi) + (\chi\varphi) \equiv 0 \tag{86}$$

und ausserdem noch die Jacobische Identität:

$$((\varphi\chi)\psi) + ((\chi\psi)\varphi) + ((\psi\varphi)\chi) \equiv 0 \tag{87}$$

(s. Abschn. II, S. 171, Satz 1).

Will man die Jacobische Identität verallgemeinern, das heisst eine möglichst allgemeine Identität aufstellen, von der die Jacobische Identität ein besonderer Fall ist, so liegt es am nächsten, davon auszugehen, dass der Ausdruck $(\varphi\chi)$ sowohl in den Differentialquotienten von φ als in denen von χ linear und homogen ist und dass er bei Vertauschung von φ und χ das Zeichen wechselt. Man wird sich daher aus zwei Functionen: u und v der r Veränderlichen: $z_1 \dots z_r$ einen Ausdruck:

$$|uv| = \sum_{ik}^{1\dots r} \omega_{ik} \frac{\partial u}{\partial z_i} \frac{\partial v}{\partial z_k} \tag{88}$$

gebildet denken und nun versuchen, die ω_{ik} in allgemeinster Weise so zu bestimmen, dass erstens:

$$|uv| + |vu| \equiv 0 \tag{89}$$

ist und zweitens für je drei Functionen: u, v, w von $z_1 \dots z_r$ die Identität:

$$||uv|w| + ||vw|u| + ||wu|v| \equiv 0 \tag{90}$$

besteht.

Die Lösung dieser Aufgabe ergiebt sich unmittelbar aus Kap. 13 von Abschn. II.

Die Identität (89) besteht nämlich offenbar dann und nur dann, wenn die ω_{ik} den Gleichungen:

$$\omega_{ik} + \omega_{ki} = 0 \quad (i, k = 1 \dots r) \tag{91}$$

genügen. Andrerseits besteht die Identität (90) jedenfalls nur dann für beliebige Functionen: u, v, w, wenn sie für: $u = z_i$, $v = z_k$, $w = z_j$ erfüllt ist, wenn also die ω_{ik} die Bedingungen:

$$\left\{ \sum_1^r {}_s \left(\omega_{sj} \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial z_s} + \omega_{si} \frac{\partial \omega_{kj}}{\partial z_s} + \omega_{sk} \frac{\partial \omega_{ji}}{\partial z_s} \right) = 0 \right. \tag{92}$$
$$(i, k, j = 1 \dots r)$$

befriedigen. Aus S. 237, Satz 2 von Abschn. II geht aber hervor, dass jedesmal, wenn die r^2 Functionen ω_{ik} den Bedingungen (91) und (92) genügen, zwischen drei beliebigen Functionen: u, v, w von $z_1 \dots z_r$ die Identität (90) besteht. Es bleibt also nur noch übrig, alle Systeme

von r^2 Functionen ω_{ik} anzugeben, die den Gleichungen (91) und (92) genügen.

Um das zu erreichen, bemerken wir, dass nach Kap. 13 von Abschn. II zu jedem System von r^2 Functionen ω_{ik}, das den Gleichungen (91) und (92) genügt, r-gliedrige Functionengruppen gehören, die gerade die durch die ω_{ik} bestimmte Zusammensetzung haben, und dass jede solche Functionengruppe durch eine Berührungstransformation auf die Form: $p_1 \ldots p_{m+q}$, $x_1 \ldots x_m$ $(2m+q=r)$ gebracht werden kann. Hieraus ergiebt sich, dass man alle Functionensysteme ω_{ik} von der verlangten Beschaffenheit folgendermassen erhalten kann:

Man wählt die beiden ganzen positiven Zahlen m und q in allgemeinster Weise so, dass $2m+q=r$ wird, ohne dabei auszuschliessen, dass entweder m oder q verschwindet. Sodann wählt man in allgemeinster Weise r unabhängige Functionen: $z_1 \ldots z_r$ von $p_1 \ldots p_{m+q}$, $x_1 \ldots x_m$ und berechnet die Functionen:

$$(z_i z_k)_{xp} = \omega_{ik}(z_1 \ldots z_r) \quad (i, k = 1 \ldots r).$$

Die so gefundenen Functionen ω_{ik} sind die allgemeinsten von der verlangten Beschaffenheit. Damit ist dann zugleich auch das allgemeinste Symbol (88) gefunden, das der Identität (89) und der verallgemeinerten Jacobischen Identität (90) genügt.

Uebrigens sind die Ausdrücke von der Form (88) noch nicht die allgemeinsten, die eine der Jacobischen analoge Identität erfüllen. Man erhält noch allgemeinere, wenn man verlangt, dass $|uv|$ sowohl in u und seinen Differentialquotienten als in v und seinen Differentialquotienten homogen sei. Ein Beispiel hierfür liefert das in Abschn. II auf S. 320 eingeführte Symbol:

$$\{UV\} = \sum_1^n \left(\frac{\partial U}{\partial p_\nu} \left(\frac{\partial V}{\partial x_\nu} + p_\nu \frac{\partial V}{\partial z} \right) - \frac{\partial V}{\partial p_\nu} \left(\frac{\partial U}{\partial x_\nu} + p_\nu \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right) - \\ - \left(U \frac{\partial V}{\partial z} - V \frac{\partial U}{\partial z} \right),$$

für das ebenfalls eine Identität von der Form (90) besteht (a. a. O. S. 536). Wir wollen aber darauf nicht weiter eingehen.

Kapitel 26.

Die Ueberführung der endlichen Gleichungen einer r-gliedrigen Gruppe in ihre kanonische Form.

Es seien:

$$x_i' = f_i(x_1 \ldots x_n;\ a_1 \ldots a_r) \quad (i = 1 \ldots n) \tag{1}$$

die endlichen Gleichungen einer r-gliedrigen Gruppe, die von den r unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

$$X_k f = \sum_1^n{}_i \xi_{ki}(x_1 \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \ldots r) \tag{2}$$

erzeugt ist. Diese endlichen Gleichungen können unbegränzt viele verschiedene Formen erhalten, denn man kann nicht blos an Stelle von $x_1 \ldots x_n$ beliebige neue Coordinaten einführen, sondern auch an Stelle der a irgend r unabhängige Functionen von ihnen als neue Parameter.

Wir beschäftigen uns hier nur mit den verschiedenen Formen, die die endlichen Gleichungen (1) unsrer Gruppe durch Einführung neuer *Parameter* erhalten können. Unter diesen Formen giebt es nämlich eine ausgezeichnete, die *kanonische* Form (s. Abschn. I, S. 171) und die wollen wir jetzt näher betrachten.

Man findet die *kanonische* Form folgendermassen: man bilde das simultane System:

$$\frac{dx_1'}{\sum_k^{1\ldots r} \lambda_k \xi_{k1}'} = \cdots = \frac{dx_n'}{\sum_k^{1\ldots r} \lambda_k \xi_{kn}'} = dt, \tag{3}$$

wo für $\xi_{ki}(x_1' \ldots x_n')$ kurz ξ_{ki}' geschrieben ist, und integrire es unter Zugrundelegung der Anfangsbedingungen: $x_1' = x_1, \ldots, x_n' = x_n$ für $t = 0$. Die so erhaltenen Integralgleichungen:

$$x_i' = \mathfrak{f}_i(x_1 \ldots x_n;\ \lambda_1 t, \ldots, \lambda_r t) \quad (i = 1 \ldots n) \tag{4}$$

sind die gewünschte kanonische Form. Da diese Integralgleichungen die Grössen: $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ und t nur in den Verbindungen:

$$\lambda_1 t = u_1, \ldots, \lambda_r t = u_r \tag{5}$$

enthalten, so lassen sie sich auch schreiben:

$$x_i' = \mathfrak{f}_i(x_1 \ldots x_n;\ u_1 \ldots u_r) \quad (i = 1 \ldots n). \tag{6}$$

Je nach Bedarf wird man bald die eine, bald die andre Darstellung der kanonischen Form vorziehen.

Was die kanonische Form vor den andern Formen der endlichen Gleichungen einer r-gliedrigen Gruppe auszeichnet, ist zunächst der Umstand, dass in der kanonischen Form die ∞^{r-1} eingliedrigen Gruppen, aus denen die Gruppe besteht, deutlich hervortreten; ertheilt man nämlich in den Gleichungen (4) den Grössen: $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ feste Werthe, während man t willkürlich lässt, so erhält man die ∞^1 Transformationen einer eingliedrigen Gruppe, und lässt man $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ nach und nach alle möglichen Werthe annehmen, so bekommt man überhaupt alle eingliedrigen Gruppen, die der r-gliedrigen Gruppe angehören.

Aber die kanonische Form ist unter den möglichen Formen der Gruppe (1) keineswegs die einzige, der diese Eigenschaft zukommt, denn führt man in (4) an Stelle der λ neue Parameter $v_1 \ldots v_r$ ein, die durch Gleichungen von der Form:

$$v_k = \lambda_k \cdot \Omega_k \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_r}, \ldots, \frac{\lambda_{r-1}}{\lambda_r} \right) \quad (k = 1 \ldots r)$$

bestimmt sind, so erhält man offenbar wieder eine Form der Gruppe (1), bei der jedem Werthsystem: $v_1 \ldots v_r$ eine eingliedrige Untergruppe entspricht. Vollständig charakterisirt wird daher die kanonische Form durch die besprochene Eigenschaft noch nicht.

Wirklich charakteristisch für die kanonische Form ist nun aber die Eigenschaft, dass in der kanonischen Form (6) der Gruppe (1) jede continuirliche Untergruppe dieser Gruppe durch lineare homogene Gleichungen zwischen $u_1 \ldots u_r$ bestimmt werden kann und dass man, wenn man vermöge dieser Gleichungen gewisse von den u durch die übrigen willkürlich bleibenden ausdrückt, zugleich die betreffende Untergruppe in der kanonischen Form erhält. Diese uns schon aus Abschn. I bekannte Eigenschaft der kanonischen Form (s. das. Kap. 12 u. Kap. 16, S. 279) hat darin ihren Grund, dass einerseits jedes System von linearen homogenen Gleichungen zwischen $u_1 \ldots u_r$ unter den ∞^{r-1} eingliedrigen Gruppen der Gruppe (1) ein ebenes Bündel von eingliedrigen Gruppen ausscheidet, das heisst eine Schaar von eingliedrigen Gruppen, deren infinitesimale Transformationen ein ebenes Bündel bilden, während andrerseits die eingliedrigen Gruppen *jeder* endlichen continuirlichen Gruppe ein ebenes Bündel bilden.

Wenn wir sagen, dass die eben angegebene Eigenschaft für die kanonische Form der Gruppe (1) charakteristisch sei, so soll das heissen, dass jede Form der Gruppe, die diese Eigenschaft besitzt, eine kanonische Form der Gruppe ist. In Wahrheit giebt es nämlich unendlich viele verschiedene kanonische Formen der Gruppe (1), denn man erhält aus der kanonischen Form (6) stets wieder eine kanonische

Form, wenn man an Stelle der u durch irgend eine lineare homogene Transformation r neue Parameter einführt, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn man $X_1 f \dots X_r f$ durch irgend r andre unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe ersetzt. Aber die kanonische Form (6) ist so beschaffen, dass sie *nur* bei linearer homogener Transformation der Parameter wieder in eine kanonische Form übergeht, sie ist also *eindeutig bestimmt*, wenn man solche Parametersysteme, die durch lineare homogene Transformationen aus einander hervorgehen, nicht als wesentlich verschieden ansieht.

Wir werden jetzt untersuchen, was für Operationen, insbesondere was für Integrationen erforderlich sind, um die kanonische Form einer r-gliedrigen Gruppe aufzustellen, sobald man irgend eine Form der endlichen Gleichungen dieser Gruppe kennt. Wir werden zeigen, dass dazu an Integrationen im ungünstigsten Falle nur eine Anzahl von Quadraturen erforderlich ist. Dieses wichtige Ergebniss werden wir sodann benutzen, um eine Reihe anderer bemerkenswerther Sätze abzuleiten.

§ 116.

Wir denken uns also die endlichen Gleichungen einer r-gliedrigen Gruppe in irgend einer Form:

$$x_i' = f_i(x_1 \dots x_n;\ a_1 \dots a_r) \quad (i = 1 \dots n) \tag{1}$$

vorgelegt. Unsre Aufgabe ist, an Stelle von $a_1 \dots a_r$ solche neue Parameter $u_1 \dots u_r$ einzuführen, dass die Gleichungen (1) in die kanonischen Gleichungen unsrer Gruppe übergehen.

Unser erster Schritt besteht darin, dass wir irgend r unabhängige infinitesimale Transformationen unsrer Gruppe aufstellen. Zu diesem Zwecke bilden wir nach Anleitung von Abschn. I, S. 27—32 durch Differentiationen und Eliminationen die Gleichungen:

$$\frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_1^r{}_j \psi_{jk}(a_1 \dots a_r)\, \xi_{ji}(x_1' \dots x_n') \quad (i = 1 \dots n;\ k = 1 \dots r), \tag{7}$$

die bei der Substitution: $x_1' = f_1, \dots, x_n' = f_n$ identisch erfüllt werden. Da die Determinante der $\psi_{jk}(a)$ nicht identisch verschwindet, wie damals gezeigt worden ist, so lassen sich die Gleichungen (7) nach den $\xi_{ji}(x')$ auflösen:

$$\xi_{ji}(x_1' \dots x_n') = \sum_1^r{}_k \alpha_{jk}(a_1 \dots a_r) \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} \quad (j = 1 \dots r;\ i = 1 \dots n) \tag{8}$$

und es sind nunmehr:

$$X_j f = \sum_1^n{}_i \xi_{ji}(x_1 \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (j = 1 \ldots r)$$

r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen der r-gliedrigen Gruppe (1). Zugleich sind:

$$A_j f = \sum_1^r{}_k \alpha_{jk}(a_1 \ldots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_k} \quad (j = 1 \ldots r)$$

unabhängige infinitesimale Transformationen der zugehörigen Parametergruppe (s. Abschn. I, S. 401—406).

Wir erinnern daran, dass die Parametergruppe mit der Gruppe (1) gleichzusammengesetzt ist: wenn die Zusammensetzung der Gruppe (1) durch die Relationen:

$$(X_i X_j) = \sum_1^r{}_s c_{ijs} X_s f \quad (i, j = 1 \ldots r) \tag{9}$$

bestimmt wird, so bestehen zwischen $A_1 f \ldots A_r f$ Relationen von derselben Form:

$$(A_i A_j) = \sum_1^r{}_s c_{ijs} A_s f \quad (i, j = 1 \ldots r) \tag{10}$$

mit denselben Coefficienten c_{ijs}.

Wie auf S. 607 gesagt wurde, kann jetzt die unbekannte kanonische Form (4) der Gruppe (1) dadurch gefunden werden, dass man das simultane System:

$$\frac{dx_1'}{\sum_1^r{}_k \lambda_k \xi_{k1}'} = \cdots = \frac{dx_n'}{\sum_1^r{}_k \lambda_k \xi_{kn}'} = dt \tag{3}$$

mit den Anfangsbedingungen: $x_i' = x_i$ für $t = 0$ integrirt. Wir können aber sofort dieses Integrationsproblem durch ein andres ersetzen, das leichter zu behandeln ist.

Die kanonische Form (4) der Gruppe (1) muss nämlich aus den Gleichungen (1) auch dadurch erhalten werden können, dass man an Stelle von $a_1 \ldots a_r$ geeignete Functionen von $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ und t einführt, und es ist nicht schwer, ein simultanes System aufzustellen, das von diesen Functionen befriedigt wird. Wir multipliciren (8) mit λ_j und summiren nach j von $1 \ldots r$; mit Berücksichtigung von (3) ergiebt sich auf diese Weise:

$$\frac{dx_i'}{dt} = \sum_{kj}^{1 \ldots r} \lambda_j \alpha_{jk}(a_1 \ldots a_r) \frac{\partial x_i'}{\partial a_k},$$

demnach befriedigen $a_1 \ldots a_r$ als Functionen von t betrachtet das simultane System:

$$\frac{da_k}{dt} = \sum_1^r{}_j \lambda_j \alpha_{jk}(a \ldots a_r) \quad (k = 1 \ldots r). \tag{11}$$

Da nun x_i' für $t = 0$ den Werth x_i annimmt, so müssen $a_1 \ldots a_r$ für $t = 0$ nothwendig die Werthe $a_1^0 \ldots a_r^0$ annehmen, die in (1) eingesetzt die identische Transformation liefern. Durch diese Bedingungen sind aber $a_1 \ldots a_r$ als Functionen von $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ vollständig definirt; integrirt man das simultane System (11) mit den Anfangsbedingungen: $a_k = a_k^0$ für $t = 0$, so erhält man für $a_1 \ldots a_r$ ganz bestimmte Functionen:

$$a_k = \mathfrak{A}_k(\lambda_1 t, \ldots, \lambda_r t) \quad (k = 1 \ldots r), \tag{12}$$

die in die Gleichungen (1) eingesetzt die gewünschte kanonische Form (4) unsrer Gruppe (1) liefern. Da übrigens die Gleichungen (12) $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ und t nur in den Verbindungen (5) enthalten, so lassen sie sich auch schreiben:

$$a_k = \mathfrak{A}_k(u_1 \ldots u_r) \quad (k = 1 \ldots r) \tag{13}$$

und es sind demnach:

$$x_i' = f_i(x_1 \ldots x_n;\ \mathfrak{A}_1(u) \ldots \mathfrak{A}_r(u)) \quad (i = 1 \ldots n) \tag{14}$$

die kanonischen Gleichungen unsrer Gruppe geschrieben in der Form (6).

Wollen wir also die Gruppe (1) *auf ihre kanonische Form bringen, so haben wir nur nöthig, das simultane System* (11) *unter Zugrundelegung der Anfangsbedingungen: $a_k = a_k^0$ für $t = 0$ zu integriren.*

Mit Benutzung der Symbole: $A_1 f \ldots A_r f$ können wir dieses Integrationsproblem auch so ausdrücken:

Es soll in den Veränderlichen: $a_1 \ldots a_r$, t ein Gleichungensystem bestimmt werden, das die infinitesimale Transformation:

$$Af = \lambda_1 A_1 f + \cdots + \lambda_r A_r f + \frac{\partial f}{\partial t} \tag{15}$$

gestattet; das betreffende Gleichungensystem muss nach $a_1 \ldots a_r$ auflösbar sein und ausserdem von dem Werthsysteme:

$$a_1 = a_1^0, \ldots, a_r = a_r^0, \quad t = 0 \tag{16}$$

identisch befriedigt werden.

Bei allen diesen Betrachtungen wird selbstverständlich vorausgesetzt, dass sich die ψ_{jk} für die Parameter $a_1^0 \ldots a_r^0$ der identischen Transformation unsrer Gruppe regulär verhalten und dass die Determinante der $\psi_{jk}(a)$ für: $a_\nu = a_\nu^0$ einen endlichen von Null verschiedenen Werth annimmt; dann verhalten sich offenbar auch die $\alpha_{jk}(a)$ für $a_\nu = a_\nu^0$ regulär und zugleich besitzt ihre Determinante einen end-

lichen, von Null verschiedenen Werth. Sollten diese Voraussetzungen nicht von vornherein erfüllt sein, so denken wir uns die Gruppe (1) in der auf S. 565 f. beschriebenen Weise auf eine Form gebracht, in der diese Voraussetzungen erfüllt sind (vgl. auch Abschn. I, S. 165 ff.).

§ 117.

Die Integration des simultanen Systems (11) gestaltet sich deswegen besonders einfach, weil man von vornherein durch ausführbare Operationen gewisse Integralgleichungen des Systems aufstellen kann. Man gelangt zu diesen Integralgleichungen durch Betrachtung der adjungirten Gruppe der Gruppe (1).

Führt man in die allgemeine infinitesimale Transformation:

$$\sum_1^r e_k \sum_1^n \xi_{ki}(x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_1^r e_k X_k f$$

der Gruppe (1) vermöge der allgemeinsten endlichen Transformation (1) dieser Gruppe die neuen Veränderlichen $x_1' \dots x_n'$ ein, so ergiebt sich (s. Abschn. I, S. 81, Satz 4) eine Gleichung von der Form:

$$\sum_1^r e_k' X_k' f = \sum_1^r e_k X_k f, \tag{17}$$

wo die e_k' lineare homogene Functionen der e_k sind:

$$e_k' = \sum_1^r \varrho_{k\pi}(a_1 \dots a_r) \cdot e_\pi \quad (k = 1 \dots r). \tag{18}$$

Diese Gleichungen (18), die unter den gemachten Voraussetzungen ohne Integration gefunden werden können, stellen die adjungirte Gruppe der Gruppe (1) dar (a. a. O. S. 270 ff.).

Wären nun die Integralgleichungen (12) des simultanen Systems (11) schon bekannt, so würden wir die adjungirte Gruppe ohne Weiteres in ihrer kanonischen Form hinschreiben können, wir brauchten zu diesem Zwecke blos in (18) die Substitution:

$$a_k = \mathfrak{A}_k(\lambda_1 t, \dots, \lambda_r t) \quad (k = 1 \dots r) \tag{12}$$

auszuführen; die kanonische Form der adjungirten Gruppe wäre dann:

$$e_k' = \sum_1^r \varrho_{k\pi}(\mathfrak{A}_1(\lambda t) \dots \mathfrak{A}_r(\lambda t))\, e_\pi \quad (k = 1 \dots r). \tag{18'}$$

Aber auch jetzt, wo wir die Integralgleichungen (12) noch nicht kennen, sind wir doch im Stande, die kanonische Form der adjungirten Gruppe anzugeben.

Die adjungirte Gruppe ist ja von den r infinitesimalen Transformationen:

$$(19) \qquad E_j f = \sum_{k\pi}^{1\ldots r} c_{\pi jk}\, e_\pi \frac{\partial f}{\partial e_k} \quad (j = 1 \ldots r)$$

erzeugt, die paarweise in Beziehungen von der Form:

$$(20) \qquad (E_i E_j) = \sum_{1}^{r_s} c_{ijs} E_s f \quad (i, j = 1 \ldots r)$$

stehen. Ihre kanonischen Gleichungen werden demnach erhalten, wenn man das simultane System:

$$(21) \qquad \frac{de_1'}{\sum_1^r{}_j \lambda_j e'_{j1}} = \cdots = \frac{de_r'}{\sum_1^r{}_j \lambda_j e'_{jr}} = dt$$

mit den Anfangsbedingungen: $e_k' = e_k$ für $t = 0$ integrirt, wobei zur Abkürzung:

$$(22) \qquad \sum_1^r{}_\pi c_{\pi jk}\, e_\pi' = e'_{jk} \quad (j, k = 1 \ldots r)$$

gesetzt ist. Denken wir uns die Integration des Systems (21) ausgeführt, was nur die Auflösung einer algebraischen Gleichung erfordert, so finden wir die kanonischen Gleichungen der adjungirten Gruppe in der Form:

$$(23) \qquad e_k' = \sum_1^r{}_\pi \sigma_{k\pi}(\lambda_1 t, \ldots, \lambda_r t)\, e_\pi \quad (k = 1 \ldots r),$$

deren Coefficienten $\sigma_{k\pi}$ die Grössen: $\lambda_1 \ldots \lambda_r, t$ nur in den Verbindungen: $\lambda_k t = u_k$ enthalten.

Die kanonische Form (23) der adjungirten Gruppe, die wir soeben gefunden haben, muss natürlich mit der oben abgeleiteten kanonischen Form (18′) identisch sein; da wir nun die Gleichungen (18′) aus der andern uns bekannten Form (18) der adjungirten Gruppe durch die noch unbekannte Substitution (12) gebildet hatten, so ergiebt sich, dass diese unbekannte Substitution die rr Gleichungen:

$$(24) \qquad \varrho_{k\pi}(a_1 \ldots a_r) = \sigma_{k\pi}(\lambda_1 t, \ldots, \lambda_r t) \quad (k, \pi = 1 \ldots r)$$

in lauter Identitäten verwandeln muss.

Wir sehen also, dass die Gleichungen (24), die wir durch ausführbare Operationen aufstellen können, Integralgleichungen des simultanen Systems (11) sind.

Da die Gleichungen (24) sich bei der Substitution (12) in Identitäten verwandeln, so werden sie offenbar von dem Werthsysteme:

(16) $$a_1 = a_1^0, \ldots, a_r = a_r^0, \quad t = 0$$

identisch befriedigt; zugleich ist klar, dass sich aus ihnen keine von $a_1 \ldots a_r$ freie Relation ableiten lässt. Ebensowenig lässt sich aber aus (24) eine Relation zwischen $a_1 \ldots a_r$ allein ableiten und zwar deswegen, weil die Gleichungen (12) nach $\lambda_1 t, \ldots, \lambda_r t$ aufgelöst werden können.

In einem Falle ist unser Integrationsproblem bereits durch die Aufstellung der Gleichungen (24) vollständig erledigt, dann nämlich, wenn die Gruppe (1) keine ausgezeichnete infinitesimale Transformation enthält. In diesem Falle ist ja die adjungirte Gruppe der Gruppe (1) r-gliedrig (Abschn. I, S. 277), es giebt also unter den rr Functionen $\varrho_{k\pi}(a_1 \ldots a_r)$ gerade r von einander unabhängige, hieraus aber folgt, dass sich die Gleichungen (24) nach $a_1 \ldots a_r$ auflösen lassen; durch die betreffende Auflösung erhalten wir ohne Integration die gewünschten Integralgleichungen (12) des simultanen Systems (11) und können mithin auch die kanonische Form der Gruppe (1) ohne Integration angeben. Es gilt also das

Theorem 48. *Kennt man irgend eine Form:*

$$x_i' = f_i(x_1 \ldots x_n;\ a_1 \ldots a_r) \quad (i = 1 \ldots n)$$

der endlichen Gleichungen einer r-gliedrigen Gruppe, die keine ausgezeichneten infinitesimalen Transformationen enthält, so kann man die kanonische Form der endlichen Gleichungen dieser Gruppe ohne Integration aufstellen, es ist dazu ausser Differentiationen und Eliminationen nur die Auflösung einer algebraischen Gleichung erforderlich.

Anders wird die Sache, wenn die Gruppe (1) ausgezeichnete infinitesimale Transformationen enthält; in diesem Falle lässt sich unser Integrationsproblem nicht ohne Integration erledigen, aber, wie schon auf S. 609 angekündigt wurde: die erforderlichen Integrationen beschränken sich auf Quadraturen. Um das nachweisen zu können, schalten wir zunächst einen Paragraphen ein, in dem wir gewisse allgemeine Eigenschaften der adjungirten Gruppe und des Gleichungensystems (24) entwickeln.

§ 118.

Wie wir wissen, gehen die Gleichungen:

(8) $$\xi_{ji}(x_1' \ldots x_n') = \sum_1^r{}_k \alpha_{jk}(a_1 \ldots a_r) \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} \quad (j = 1 \ldots r;\ i = 1 \ldots n)$$

bei der Substitution:

(1) $$x_i' = f_i(x_1 \dots x_n;\ a_1 \dots a_r) \quad (i = 1 \dots n)$$

in Identitäten über. Diese Thatsache kann offenbar auch so ausgesprochen werden: das Gleichungensystem (1) gestattet die r infinitesimalen Transformationen:

$$X_j' f + A_j f \quad (j = 1 \dots r)$$

in den Veränderlichen: $x_1' \dots x_n'$, $a_1 \dots a_r$; unter $X_j' f$ verstehen wir dabei wie gewöhnlich den Ausdruck:

$$X_j' f = \sum_1^n \xi_{ji}(x_1' \dots x_n') \frac{\partial f}{\partial x_i'} = \sum_1^n \xi_{ji}' \frac{\partial f}{\partial x_i'}.$$

Da wir über die Gruppe (1) nichts weiter vorausgesetzt haben, als dass sie r-gliedrig sein sollte, so ist die im Vorstehenden angegebene Eigenschaft des Gleichungensystems (1) augenscheinlich eine allgemeingültige Beziehung zwischen den endlichen Gleichungen einer r-gliedrigen Gruppe, den infinitesimalen Transformationen dieser Gruppe und den infinitesimalen Transformationen der Parametergruppe, die durch die betreffenden endlichen Gleichungen bestimmt ist.

Nun stellen die Gleichungen:

(25) $$\begin{cases} x_i' = f_i(x_1 \dots x_n;\ a_1 \dots a_r) \\ e_k' = \sum_1^r \pi \varrho_{k\pi}(a_1 \dots a_r)\, e_\pi \\ \qquad (i = 1 \dots n;\ k = 1 \dots r), \end{cases}$$

die durch Zusammenfassung der Gleichungen (1) und (18) entstanden sind, offenbar eine r-gliedrige Gruppe in den $n + r$ Veränderlichen $x_1 \dots x_n$, $e_1 \dots e_r$ dar. Diese Gruppe (25) hat genau dieselbe Parametergruppe wie die Gruppe (1), ausserdem ist sie von den r unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

$$X_j f + E_j f \quad (j = 1 \dots r)$$

erzeugt. Es ergiebt sich daher sofort, dass das Gleichungensystem (25) die r infinitesimalen Transformationen:

$$X_j' f + E_j' f + A_j f \quad (j = 1 \dots r)$$

in den Veränderlichen: $x_1' \dots x_n'$, $e_1' \dots e_r'$, $a_1 \dots a_r$ gestattet. Hieraus aber folgt wiederum, dass das Gleichungensystem:

(18) $$e_k' = \sum_1^r \pi \varrho_{k\pi}(a_1 \dots a_r)\, e_\pi \quad (k = 1 \dots r)$$

für sich genommen die r infinitesimalen Transformationen:

$$E_j' f + A_j f \quad (j = 1 \dots r)$$

in den $2r$ Veränderlichen: $e_1' \ldots e_r'$, $a_1 \ldots a_r$ gestattet. Mit andern Worten: Vermöge der endlichen Gleichungen (18) der adjungirten Gruppe bestehen die Differentialgleichungen:

$$(26) \qquad \left\{ \sum_1^r{}^{\pi} c_{\pi j k} e_\pi' = \sum_1^r{}^{\pi} \alpha_{j\pi}(a_1 \ldots a_r) \frac{\partial e_k'}{\partial a_\pi} \right. \qquad (j, k = 1 \ldots r)$$

identisch*).

Aus der gefundenen Eigenschaft des Gleichungensystems (18) können wir ersehen, wie sich die Functionen $\varrho_{k\pi}(a)$ gegenüber den infinitesimalen Transformationen $A_j f$ verhalten. Es müssen ja die Gleichungen:

$$\sum_1^r{}^{\pi} c_{\pi j k} e_\pi' = \sum_1^r{}^{\pi} A_j \varrho_{k\pi} \cdot e_\pi$$

identisch erfüllt sein, wenn man $e_1' \ldots e_r'$ mit Hülfe von (18) durch $e_1 \ldots e_r$ und $a_1 \ldots a_r$ ausdrückt. Vergleichen wir in diesen Identitäten die Coefficienten von $e_1 \ldots e_r$ auf beiden Seiten, so erkennen wir, dass sich die $A_j \varrho_{k\pi}$ linear und homogen mit constanten Coefficienten durch die $\varrho_{k\pi}$ ausdrücken:

$$(27) \qquad \left\{ A_j \varrho_{k\pi} \equiv \sum_1^r{}^{s} c_{sjk} \varrho_{s\pi}(a_1 \ldots a_r) \right. \qquad (j, k, \pi = 1 \ldots r).$$

Betrachten wir jetzt die kanonische Form:

$$(23) \qquad e_k' = \sum_1^r{}^{\pi} \sigma_{k\pi}(\lambda_1 t, \ldots, \lambda_r t) e_\pi \qquad (k = 1 \ldots r)$$

der adjungirten Gruppe.

Wir haben die Gleichungen (23) durch Integration des simultanen Systems (21) gefunden. Hieraus folgt, dass das Gleichungensystem (23) die infinitesimale Transformation:

$$\sum_1^r{}^{j} \lambda_j E_j' f + \frac{\partial f}{\partial t}$$

gestattet. Diesen Umstand benutzen wir, um die Differentialquotienten der $\sigma_{k\pi}$ nach t zu berechnen.

Wegen der angegebenen Eigenschaft des Gleichungensystems (23) müssen die Gleichungen:

*) Dieses Ergebniss ist allerdings nur in dem Falle neu, wenn die adjungirte Gruppe nicht r-gliedrig ist; ist sie r-gliedrig, so versteht es sich von selbst und hätte keines besondern Beweises bedurft.

$$\sum_1^r{}^j \lambda_j \sum_1^r{}^\pi c_{\pi j k} c_\pi' = \sum_1^r{}^\pi \frac{\partial \sigma_{k\pi}}{\partial t} \cdot e_\pi$$

zu Identitäten werden, wenn man in ihnen die aus (23) folgenden Werthe von $e_1' \ldots e_r'$ einsetzt. Durch Vergleichung der Coefficienten von $e_1 \ldots e_r$ in den so entstehenden Identitäten ergiebt sich aber:

$$(28) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{k\pi}}{\partial t} \equiv \sum_1^r{}^j \lambda_j \sum_1^r{}^s c_{sjk} \sigma_{s\pi}(\lambda_1 t, \ldots, \lambda_r t) \\ (k, \pi = 1 \ldots r). \end{cases}$$

Hält man die Identitäten (28) mit den Identitäten (27) zusammen, so erkennt man augenblicklich, dass sich:

$$\sum_1^r{}^j \lambda_j . A_j \varrho_{k\pi} = \sum_1^r{}^j \lambda_j \sum_1^r{}^s c_{sjk} \varrho_{s\pi}$$

genau in derselben Weise durch die $\varrho_{s\pi}$ ausdrückt, wie $\frac{\partial \sigma_{k\pi}}{\partial t}$ durch die $\sigma_{s\pi}$. Hierin liegt, dass der Ausdruck:

$$A(\varrho_{k\pi} - \sigma_{k\pi}) = \sum_1^r{}^j \lambda_j . A_j \varrho_{k\pi} - \frac{\partial \sigma_{k\pi}}{\partial t}$$

vermöge des Gleichungensystems:

$$(24) \qquad \varrho_{k\pi}(a_1 \ldots a_r) = \sigma_{k\pi}(\lambda_1 t, \ldots, \lambda_r t) \quad (k, \pi = 1 \ldots r)$$

verschwindet. Kurz: *das Gleichungensystem* (24) *gestattet die infinitesimale Transformation:*

$$Af = \sum_1^r{}^j \lambda_j A_j f + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Diese Eigenschaft des Gleichungensystems (24) ist von der grössten Wichtigkeit für die Erledigung unsers Integrationsproblems. Bisher wussten wir nämlich blos, dass die Gleichungen (24) Integralgleichungen des simultanen Systems (11) sind. Nunmehr können wir hinzufügen, dass sie Integralgleichungen von ganz besonderer Beschaffenheit sind; differentiirt man nämlich die Gleichungen (24) nach t, indem man $a_1 \ldots a_r$ als Functionen von t ansieht, und schafft man aus den erhaltenen Gleichungen mit Hülfe des simultanen Systems (11) die Differentialquotienten von $a_1 \ldots a_r$ nach t fort, so erhält man zwischen $a_1 \ldots a_r$, $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ und t nur solche Relationen, die schon eine Folge von (24) sind.

Enthält die Gruppe (1) ausgezeichnete infinitesimale Transformationen, so besitzt das Gleichungensystem (24) noch eine andre Eigenschaft, die uns ebenfalls nachher von Nutzen sein wird.

Ist: $\varepsilon_1 X_1 f + \cdots + \varepsilon_r X_r f$ eine ausgezeichnete infinitesimale Transformation der Gruppe (1), so verschwindet die infinitesimale Transformation:

$$\varepsilon_1 E_1' f + \cdots + \varepsilon_r E_r' f$$

der adjungirten Gruppe identisch. Da nun das Gleichungensystem (18) die infinitesimale Transformation:

$$\sum_1^r{}_k \varepsilon_k (E_k' f + A_k f)$$

gestattet und diese Transformation sich unter der gemachten Voraussetzung auf:

$$\varepsilon_1 A_1 f + \cdots + \varepsilon_r A_r f \tag{29}$$

reducirt, so ergiebt sich, dass die Ausdrücke:

$$\varepsilon_1 A_1 \varrho_{k\pi} + \cdots + \varepsilon_r A_r \varrho_{k\pi} \quad (k, \pi = 1 \ldots r)$$

alle identisch verschwinden; hieraus aber folgt, dass das Gleichungensystem (24) auch noch die infinitesimale Transformation (29) gestattet.

Wir können dieses Ergebniss kurz so aussprechen: *Das Gleichungensystem* (24) *gestattet ausser der infinitesimalen Transformation* Af *auch noch jede ausgezeichnete infinitesimale Transformation der Parametergruppe:* $A_1 f \ldots A_r f$.

§ 119.

Wir wollen jetzt annehmen, dass unsre Gruppe (1) eine gewisse Anzahl, etwa gerade $r - m$ unabhängige ausgezeichnete infinitesimale Transformationen enthält, und wollen uns $X_1 f \ldots X_r f$ gleich so gewählt denken, dass $X_{m+1} f \ldots X_r f$ solche ausgezeichnete Transformationen sind.

Um die Gruppe (1) auf ihre kanonische Form zu bringen, haben wir nach S. 611 ein Gleichungensystem von der Form:

$$a_k = \mathfrak{A}_k(\lambda_1 t, \ldots, \lambda_r t) \tag{12}$$

aufzustellen, das die infinitesimale Transformation:

$$Af = \lambda_1 A_1 f + \cdots + \lambda_r A_r f + \frac{\partial f}{\partial t}$$

in den Veränderlichen: $a_1 \ldots a_r, t$ gestattet und das ausserdem von dem Werthsysteme:

$$a_1 = a_1^0, \ldots, a_r = a_r^0, \quad t = 0 \tag{16}$$

identisch befriedigt wird.

Wir kennen bereits ein Gleichungensystem, das die infinitesimale Transformation Af gestattet und das von dem Werthsysteme (16) befriedigt wird, nämlich das Gleichungensystem:

$$(24) \qquad \varrho_{k\pi}(a_1 \ldots a_r) = \sigma_{k\pi}(\lambda_1 t, \ldots, \lambda_r t) \quad (k, \pi = 1 \ldots r).$$

Wir wissen überdies, dass die Gleichungen (24) bei der noch unbekannten Substitution: $a_1 = \mathfrak{A}_1, \ldots, a_r = \mathfrak{A}_r$ in Identitäten übergehen, dass also das gesuchte Gleichungensystem (12) die uns bekannten Gleichungen (24) umfasst. Wir brauchen daher, um das Gleichungensystem (12) zu finden, nur gewisse geeignete Gleichungen zu den Gleichungen (24) hinzuzufügen.

Unter der zu Anfang des Paragraphen gemachten Voraussetzung ist nun die adjungirte Gruppe der Gruppe (1) blos m-gliedrig, es giebt also unter den Functionen $\varrho_{k\pi}(a)$ im Ganzen nur m von einander unabhängige, infolgedessen enthält auch das Gleichungensystem (24) blos m von einander unabhängige Gleichungen. Mithin können wir die zu lösende Aufgabe genauer so aussprechen:

Es sollen zu den Gleichungen (24) *noch* $r - m$ *solche Gleichungen zwischen* $a_1 \ldots a_r$ *und* t *hinzugefügt werden, dass ein nach* $a_1 \ldots a_r$ *auflösbares Gleichungensystem entsteht, das die infinitesimale Transformation* Af *gestattet und das von dem Werthsysteme* (16) *identisch befriedigt wird.*

Wir führen zunächst diese Aufgabe auf die Integration einer gewissen linearen partiellen Differentialgleichung zurück.

Zu diesem Zwecke lösen wir die Gleichungen (24) nach m von den Grössen $a_1 \ldots a_r$ auf, was immer möglich ist, denn auf S. 614 haben wir ja gesehen, dass sich aus (24) keine von den a freie Gleichung herleiten lässt. Der Einfachheit wegen wollen wir uns die Benennung von $a_1 \ldots a_r$ gleich so gewählt denken, dass die Gleichungen (24) nach $a_1 \ldots a_m$ aufgelöst werden können. Die betreffenden Auflösungen mögen lauten:

$$(30) \qquad a_\mu = \omega_\mu(a_{m+1} \ldots a_r;\ \lambda_1 t, \ldots, \lambda_r t) \quad (\mu = 1 \ldots m);$$

natürlich gestattet dann auch das Gleichungensystem (30) die infinitesimale Transformation Af.

Nunmehr bilden wir aus Af eine verkürzte infinitesimale Transformation in den Veränderlichen t, $a_{m+1} \ldots a_r$, indem wir die Differentialquotienten:

$$\frac{\partial f}{\partial a_1} \cdot \cdot \cdot \frac{\partial f}{\partial a_m}$$

weglassen und in den Coefficienten der übrigen Differentialquotienten für $a_1 \ldots a_m$ ihre aus (30) folgenden Werthe einsetzen. Auf diese Weise erhalten wir eine verkürzte infinitesimale Transformation:

$$\bar{A}f = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_1^r{}_j \lambda_j \bar{A}_j f, \tag{31}$$

wo $\bar{A}_j f$ die zu $A_j f$ gehörige verkürzte infinitesimale Transformation ist und die Form besitzt:

$$\left\{ \bar{A}_j f = \sum_1^{r-m}{}_k \bar{\alpha}_{j,\,m+k}(a_{m+1} \ldots a_r;\ \lambda_1 t, \ldots, \lambda_r t)\ \frac{\partial f}{\partial a_{m+k}} \right. \tag{32}$$
$$\left. (j = 1 \ldots r). \right.$$

Um das Gleichungensystem (12) zu finden, brauchen wir jetzt nur in den Veränderlichen $a_{m+1} \ldots a_r, t$ ein System von $r - m$ nach $a_{m+1} \ldots a_r$ auflösbaren Gleichungen zu bestimmen, das die infinitesimale Transformation $\bar{A}f$ gestattet und von dem Werthsysteme:

$$a_{m+1} = a_1^0, \ldots, a_r = a_r^0, \quad t = 0 \tag{33}$$

identisch befriedigt wird (vgl. Abschn. I, S. 126 f.). Fügen wir diese Gleichungen zu (30) hinzu, so erhalten wir ein nach $a_1 \ldots a_r$ auflösbares Gleichungensystem von der verlangten Beschaffenheit.

Die Aufgabe, auf die wir so geführt worden sind, ist erledigt, wenn es uns gelingt, irgend $r - m$ solche unabhängige Lösungen:

$$\Omega_1(a_{m+1} \ldots a_r, t) \ldots \Omega_{r-m}(a_{m+1} \ldots a_r, t)$$

der linearen partiellen Differentialgleichung:

$$\bar{A}f = 0 \tag{34}$$

zu finden, die sich in der Umgebung des Werthsystems (33) regulär verhalten.

Da nämlich die Gleichung (34) in aufgelöster Form vorliegt, so sind $\Omega_1 \ldots \Omega_{r-m}$ unabhängige Functionen von $a_{m+1} \ldots a_r$ (s. Abschn. I, Theorem 12, S. 91). Bilden wir nun die Gleichungen:

$$\Omega_\nu(a_{m+1} \ldots a_r, t) = \Omega_\nu(a_{m+1}^0 \ldots a_r^0, 0) \quad (\nu = 1 \ldots r-m), \tag{35}$$

so sind diese nach $a_{m+1} \ldots a_r$ auflösbar und werden von dem Werthsysteme (33) identisch befriedigt; überdies gestattet das Gleichungensystem (35) die infinitesimale Transformation $\bar{A}f$. Folglich bilden die Gleichungen (30) und (35) zusammengenommen ein nach $a_1 \ldots a_r$ auflösbares Gleichungensystem, das die infinitesimale Transformation Af gestattet und von dem Werthsysteme (16) befriedigt wird, kurz ein Gleichungensystem von der verlangten Beschaffenheit.

Nicht unerwähnt bleiben darf übrigens, dass das System der Gleichungen (30), (35) das einzige Gleichungensystem von der verlangten Beschaffenheit ist, das es giebt. Soll nämlich ein Gleichungen-

system in den Veränderlichen $a_{m+1} \ldots a_r, t$ die infinitesimale Transformation $\bar{A}f$ gestatten, so muss es sich wegen der besonderen Form von $\bar{A}f$ durch Relationen zwischen den Lösungen: $\Omega_1 \ldots \Omega_{r-m}$ der Gleichung (34) darstellen lassen (s. Abschn. I, S. 117, Theor. 15), soll es ausserdem nach $a_{m+1} \ldots a_r$ auflösbar sein, so muss es nothwendig die Form haben:

$$\Omega_1 = \text{const.}, \ldots, \Omega_{r-m} = \text{const.}$$

Es bleibt uns jetzt nur noch zu zeigen, wie die Lösungen der linearen partiellen Differentialgleichung (34) gefunden werden können. Wir werden nachweisen, dass dazu nur Quadraturen erforderlich sind.

Auf S. 618 sahen wir, dass das Gleichungensystem (24) jede ausgezeichnete infinitesimale Transformation der Gruppe: $A_1 f \ldots A_r f$ gestattet. Unter den gemachten Voraussetzungen sind aber: $A_{m+1} f \ldots A_r f$ unabhängige ausgezeichnete infinitesimale Transformationen dieser Gruppe, also muss das Gleichungensystem (24) und ebenso das äquivalente Gleichungensystem (30) die infinitesimalen Transformationen: $A_{m+1} f \ldots A_r f$ gestatten.

Nun sind $A_{m+1} f \ldots A_r f$ als ausgezeichnete infinitesimale Transformationen unter einander und zugleich mit der infinitesimalen Transformation Af vertauschbar und da auch Af das Gleichungensystem (30) invariant lässt, so ergiebt sich, dass die $r - m + 1$ paarweise vertauschbaren infinitesimalen Transformationen:

$$Af, \ A_{m+1} f \ldots A_r f$$

eine Gruppe erzeugen, bei der das Gleichungensystem (30) invariant bleibt. Hieraus aber folgt nach Abschn. I, S. 233 f., dass auch die verkürzten infinitesimalen Transformationen:

$$\bar{A}f, \ \bar{A}_{m+1} f \ldots \bar{A}_r f$$

in den Veränderlichen: $a_{m+1} \ldots a_r, t$ eine Gruppe erzeugen und dass sie paarweise vertauschbar sind. Mit andern Worten (a. a. O. S. 140 ff.):

Die lineare partielle Differentialgleichung: $\bar{A}f = 0$ in den Veränderlichen $a_{m+1} \ldots a_r, t$ gestattet die $r - m$ infinitesimalen Transformationen: $\bar{A}_{m+1} f \ldots \bar{A}_r f$ in diesen Veränderlichen.

Ausserdem ist noch zu bemerken, dass die zu $\bar{A}_{m+1} f \ldots \bar{A}_r f$ gehörige $(r - m)$-reihige Determinante:

$$(36) \qquad \begin{vmatrix} \bar{\alpha}_{m+1,\, m+1} & \cdot & \bar{\alpha}_{m+1,\, r} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{\alpha}_{r,\, m+1} & \cdot & \bar{\alpha}_{r,\, r} \end{vmatrix}$$

nicht identisch verschwindet; wir werden sogar nachweisen, dass diese Determinante für das Werthsystem (33) einen endlichen, von Null verschiedenen Werth annimmt.

In der That, wir setzen nach S. 611 voraus, dass sich die $\alpha_{jk}(a)$ für: $a_1 = a_1^0, \ldots, a_r = a_r^0$ alle regulär verhalten und dass die Determinante:

$$\sum \pm \alpha_{11}(a) \ldots \alpha_{rr}(a)$$

für: $a_1 = a_1^0, \ldots, a_r = a_r^0$ einen endlichen, von Null verschiedenen Werth hat; es sind demnach auch die $(r - m)$-reihigen Determinanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{m+1,\,1} & \cdot & \cdot & \alpha_{m+1,\,r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{r,\,1} & & \cdot & \alpha_{r\,r} \end{vmatrix} \tag{37}$$

für: $a_1 = a_1^0, \ldots, a_r = a_r^0$ alle endlich und nicht alle gleich Null. Nun gestattet das Gleichungensystem (30) die infinitesimalen Transformationen: $A_{m+1}f \ldots A_rf$, die Gleichungen:

$$\alpha_{m+k,\,\mu}(a) = \sum_1^{r-m} {}_\nu\, \alpha_{m+k,\,m+\nu}(a) \cdot \frac{\partial \omega_\mu}{\partial a_{m+\nu}}$$

$$(k = 1 \ldots r - m;\ \mu = 1 \ldots m)$$

sind also eine Folge der Gleichungen (30) und werden wie diese durch die Substitution:

$$a_1 = a_1^0, \ldots, a_r = a_r^0, \ t = 0 \tag{16}$$

identisch befriedigt. Hieraus ergiebt sich, dass unter den $(r - m)$-reihigen Determinanten der Matrix (37) jedenfalls die folgende:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{m+1,\,m+1} & \cdot & \alpha_{m+1,\,r} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{r,\,m+1} & & \alpha_{r\,r} \end{vmatrix} \tag{38}$$

für: $a_1 = a_1^0, \ldots, a_r = a_r^0$ einen endlichen, von Null verschiedenen Werth annimmt. Da endlich die Determinante (38) für: $a_1 = a_1^0, \ldots,$ $a_r = a_r^0$ augenscheinlich denselben Werth annimmt, wie die Determinante (36) für das Werthsystem (33), so ist der versprochene Nachweis geliefert.

Um jetzt die Lösungen der linearen partiellen Differentialgleichung $Af = 0$ zu finden, verfahren wir folgendermassen*):

*) Das hier behandelte Integrationsproblem ist ein specieller Fall des von Lie formulirten und gelösten Problems: eine Differentialgleichung $Af = 0$ zu integriren, die bekannte infinitesimale Transformationen gestattet.

Wir stellen die $r - m$ Gleichungen auf:

$$(39) \qquad \begin{cases} \overline{A}f = 0, \ \overline{A}_{m+1}f = 0, \ldots, \overline{A}_{m+k-1}f = 0, \\ \overline{A}_{m+k+1}f = 0, \ldots, \overline{A}_r f = 0, \end{cases}$$

unter k eine der Zahlen $1, 2 \ldots r - m$ verstanden. Diese $r - m$ Gleichungen sind augenscheinlich von einander unabhängig und bilden ein $(r - m)$-gliedriges vollständiges System in den $r - m + 1$ Veränderlichen: $a_{m+1} \ldots a_r, t$, sie haben daher eine Lösung $\Omega_k(a_{m+1} \ldots a_r, t)$ gemein und ihre allgemeinste gemeinsame Lösung ist eine beliebige Function von Ω_k. Andrerseits ist klar, dass das vollständige System (39) die infinitesimale Transformation $\overline{A}_{m+k}f$ gestattet, es besteht daher eine Relation von der Form:

$$\overline{A}_{m+k}\Omega_k = \chi(\Omega_k),$$

wo die Function χ jedenfalls nicht identisch verschwindet, denn Ω_k kann nicht auch noch eine Lösung von $\overline{A}_{m+k}f = 0$ sein. Denkt man sich insbesondere an Stelle von Ω_k die Function:

$$\int \frac{d\Omega_k}{\chi(\Omega_k)}$$

als neues Ω_k eingeführt, so wird einfach: $\overline{A}_{m+k}\Omega_k = 1$.

Die unbekannte Lösung Ω_k des vollständigen Systems befriedigt also die Gleichungen:

$$\overline{A}\Omega_k = 0, \quad \overline{A}_{m+1}\Omega_k = 0, \ldots, \overline{A}_{m+k-1}\Omega_k = 0$$
$$\overline{A}_{m+k+1}\Omega_k = 0, \ldots, \overline{A}_r\Omega_k = 0, \quad \overline{A}_{m+k}\Omega_k = 1.$$

Diese Gleichungen aber lassen sich nach den Differentialquotienten:

$$\frac{\partial\Omega_k}{a_{m+1}} \cdots \frac{\partial\Omega_k}{\partial a_r}, \quad \frac{\partial\Omega_k}{\partial t}$$

auflösen, weil, wie wir oben sahen, die Determinante (36) nicht identisch verschwindet; da überdies die bewusste Determinante für das Werthsystem (33) einen endlichen von Null verschiedenen Werth hat, so ist zugleich sicher, dass sich die betreffenden Auflösungen in der Umgebung des Werthsystems (33) regulär verhalten. Wir können somit alle Differentialquotienten von Ω_k als Functionen von $a_{m+1} \ldots a_r, t$ ausdrücken und finden Ω_k selbst durch eine Quadratur; dabei versteht es sich von selbst, dass sich Ω_k in der Umgebung des Werthsystems (33) regulär verhält. Ertheilen wir endlich der ganzen Zahl k der Reihe nach die Werthe: $1, 2 \ldots, r - m$, so finden wir $r - m$ Lösungen: $\Omega_1 \ldots \Omega_{r-m}$ der linearen partiellen Differentialgleichung:

$\overline{A}f = 0$ und zwar $r - m$ unabhängige Lösungen, wie aus dem Bestehen der Gleichungen:

$$\overline{A}_{m+1}\Omega_1 = 1, \ldots, \overline{A}_{m+r-m}\Omega_m = 1$$

unmittelbar hervorgeht.

Hiermit ist bewiesen, dass man durch $r - m$ Quadraturen $r - m$ solche unabhängige Lösungen der Differentialgleichung: $\overline{A}f = 0$ finden kann, die sich in der Umgebung des Werthsystems (33) regulär verhalten; die betreffenden Quadraturen sind von einander unabhängig, das heisst, sie können in ganz beliebiger Reihenfolge ausgeführt werden.

Die Aufgabe, die uns in dem gegenwärtigen Paragraphen beschäftigt hat, ist nunmehr nach S. 620 erledigt und wir haben das

Theorem 49. *Kennt man irgend eine Form:*

$$x_i' = f_i(x_1 \ldots x_n;\ a_1 \ldots a_r) \quad (i = 1 \ldots n)$$

der endlichen Gleichungen einer r-gliedrigen Gruppe, die gerade $r - m$ unabhängige ausgezeichnete infinitesimale Transformationen enthält, so erfordert die Aufstellung der endlichen Gleichungen dieser Gruppe in kanonischer Form ausser Differentiationen und Eliminationen nur noch $r - m$ von einander unabhängige Quadraturen.

§ 120.

Wir stellen jetzt eine Reihe wichtiger Anwendungen der beiden Theoreme 48 und 49 zusammen.

Es seien wiederum die endlichen Gleichungen einer r-gliedrigen Gruppe in irgend einer Form:

$$x_i' = f_i(x_1 \ldots x_n;\ a_1 \ldots a_r) \quad (i = 1 \ldots n) \tag{1}$$

gegeben. Hat man nun durch Differentiationen und Eliminationen irgend r unabhängige infinitesimale Transformationen: $X_1 f \ldots X_r f$ dieser Gruppe bestimmt, so kann man nach Abschn. I, S. 210, Theor. 33 auch die infinitesimalen Transformationen einer jeden Untergruppe der Gruppe (1) finden und zwar durch algebraische Operationen.

Wir werden zeigen, dass man auch die endlichen Gleichungen einer jeden Untergruppe der Gruppe (1) aufstellen kann.

In der That, die allgemeine infinitesimale Transformation:

$$\lambda_1 X_1 f + \cdots + \lambda_r X_r f$$

einer m-gliedrigen Untergruppe der Gruppe (1) wird durch gewisse lineare homogene Relationen von der Form:

$$\lambda_k = l_{k1} v_1 + \cdots + l_{km} v_m \quad (k = \tag{40}$$

dargestellt, in denen die $l_{k\mu}$ Constanten, die v_μ dagegen willkürliche Parameter bedeuten. Denken wir uns jetzt in der oben beschriebenen Weise die endlichen Gleichungen der Gruppe (1) in der kanonischen Form:

$$x_i' = f_i(x_1 \dots x_n;\ \lambda_1 t, \dots, \lambda_r t) \quad (i = 1 \dots n) \tag{41}$$

aufgestellt, wozu im ungünstigsten Falle nur gewisse Quadraturen erforderlich sind, so werden wir die endlichen Gleichungen unsrer Untergruppe einfach dadurch erhalten, dass wir in (41) für $\lambda_1 \dots \lambda_r$ ihre aus (40) folgenden Werthe einsetzen. Selbstverständlich bekommen wir auf diese Weise die endlichen Gleichungen der Untergruppe in kanonischer Form.

Hat man die endlichen Gleichungen:

$$x_i' = \chi_i(x_1 \dots x_n;\ v_1 \dots v_m) \quad (i = 1 \dots n)$$

einer m-gliedrigen Untergruppe der Gruppe (1) bestimmt, so kann man nach Abschn. I, S. 226, Theor. 37 alle bei dieser Untergruppe invarianten Gleichungensysteme durch blose Eliminationen finden. Dieses Ergebniss ist besonders im Falle $m = 1$ bemerkenswerth, denn es zeigt, dass die Bahncurven einer jeden infinitesimalen Transformation der Gruppe (1) aufgestellt werden können:

Satz 1. *Kennt man irgend eine Form:*

$$x_i' = f_i(x_1 \dots x_n;\ a_1 \dots a_r) \quad (i = 1 \dots n) \tag{1}$$

der endlichen Gleichungen einer r-gliedrigen Gruppe, so kann man die Bahncurven einer jeden infinitesimalen Transformation dieser Gruppe angeben; es sind dazu ausser Differentiationen und Eliminationen im ungünstigsten Falle nur noch Quadraturen erforderlich und zwar gerade $r - m$ von einander unabhängige Quadraturen, wenn die Gruppe (1) *gerade $r - m$ unabhängige ausgezeichnete infinitesimale Transformationen enthält.*

Man kann diesem Satze offenbar auch die folgende Fassung geben:

Satz 2. *Erzeugen die r unabhängigen infinitesimalen Transformationen:*

$$X_k f = \sum_1^n{}_i\, \xi_{ki}(x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \dots r)$$

eine r-gliedrige Gruppe in den Veränderlichen $x_1 \dots x_n$ und kennt man irgend eine Form:

$$x_i' = f_i(x_1 \dots x_n;\ a_1 \dots a_r) \quad (i = 1 \dots n)$$

der endlichen Gleichungen dieser Gruppe, so kann die Integration des simultanen Systems:

$$\frac{dx_1}{\sum_1^r \lambda_k \xi_{k1}(x)} = \cdots = \frac{dx_n}{\sum_1^r \lambda_k \xi_{kn}(x)}$$

stets geleistet werden; sie erfordert ausser Differentiationen und Eliminationen nur noch ebensoviele unabhängige Quadraturen, als die Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ *unabhängige ausgezeichnete infinitesimale Transformationen enthält.*

Wendet man diesen Satz auf die allgemeine projective Gruppe der Ebene an, so erkennt man, dass die Differentialgleichung:

$$(a_1 + b_1 x + b_2 y + c_1 x^2 + c_2 xy)\, dy - \\ - (a_2 + b_3 x + b_4 y + c_1 xy + c_2 y^2)\, dx = 0$$

zu ihrer Integration ausser Differentiationen und Eliminationen blos algebraische Operationen erfordert; es ist das offenbar eine sogenannte Jacobische Gleichung.

Als zweites, allerdings triviales Beispiel möge die allgemeine lineare Gruppe:

$$x_i' = \sum_1^n {}_\nu\, b_{i\nu} x_\nu + c_i \quad (i = 1 \ldots n)$$

in n Veränderlichen dienen. Auf diese Gruppe angewendet zeigt unser Satz, dass jedes simultane System von der Form:

$$\frac{dx_1}{\sum_1^n {}_\nu\, \beta_{1\nu} x_\nu + \gamma_1} = \cdots = \frac{dx_n}{\sum_1^n {}_\nu\, \beta_{n\nu} x_\nu + \gamma_n}$$

durch algebraische Operationen integrirt werden kann, eine Thatsache, die d'Alembert zuerst bemerkt hat.

§ 121.

Die Sätze des vorigen Paragraphen lassen sich in gewissen Fällen auch auf solche Gruppen ausdehnen, von denen nicht die endlichen, sondern blos die infinitesimalen Transformationen gegeben sind.

Sind die infinitesimalen Transformationen: $X_1 f \ldots X_r f$ einer r-gliedrigen *asystatischen* Gruppe vorgelegt, so kann man nach Abschn. I, S. 518, Satz 7 durch ausführbare Operationen, das heisst durch Auflösung einer algebraischen Gleichung und durch Eliminationen die endlichen Gleichungen dieser Gruppe in kanonischer Form aufstellen. Folglich gilt der

Satz 3. *Kennt man r unabhängige infinitesimale Transformationen:*

$$X_k f = \sum_1^n{}_i \xi_{ki}(x_1 \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \ldots r)$$

einer r-gliedrigen asystatischen Gruppe des Raumes $x_1 \ldots x_n$, so kann man ohne Integration, blos durch algebraische Operationen und durch Eliminationen die Bahncurven einer jeden infinitesimalen Transformation: $\lambda_1 X_1 f + \cdots + \lambda_r X_r f$ dieser Gruppe finden.

Es sei zweitens:

$$X_k f = \sum_1^n{}_i \xi_{ki}(x_1 \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \ldots r) \tag{42}$$

eine r-gliedrige *systatische* Gruppe, wir wollen aber voraussetzen, dass jede mit: $X_1 f \ldots X_r f$ vertauschbare infinitesimale Transformation:

$$Z f = \sum_1^n{}_i \xi_i (x_1 \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ selbst angehört. Mit andern Worten: die ausgezeichneten infinitesimalen Transformationen der Gruppe (42), deren es gerade $l > 0$ unabhängige geben möge, sollen die einzigen infinitesimalen Transformationen in den Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$ sein, die mit: $X_1 f \ldots X_r f$ vertauschbar sind. Der Einfachheit wegen möge noch angenommen werden, dass: $X_1 f \ldots X_l f$ unabhängige ausgezeichnete Transformationen unsrer Gruppe sind.

Aus Abschnitt I, S. 377, Satz 2 folgt zunächst, dass die Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ transitiv ist, dass also die r Gleichungen:

$$X_1 f = 0, \ldots, X_r f = 0$$

keine Lösung gemein haben. Ferner ergiebt sich aus dem Theor. 67, S. 376 a. a. O., dass die infinitesimalen Transformationen: $X_1 f \ldots X_l f$ sicher keine lineare Identität:

$$\sum_1^l{}_\mu \chi_\mu (x_1 \ldots x_n) X_\mu f \equiv 0 \tag{43}$$

befriedigen. Wir können demnach voraussetzen, dass von den infinitesimalen Transformationen: $X_1 f \ldots X_r f$ die ersten n durch keine lineare Identität:

$$\sum_1^n{}_\nu \chi_\nu (x_1 \ldots x_n) X_\nu f \equiv 0$$

verknüpft sind, während $X_{n+1} f \ldots X_r f$ sich linear durch $X_1 f \ldots X_n f$ ausdrücken lassen:

$$(44) \qquad X_{n+k}f \equiv \sum_1^n{}_v \varphi_{kv}(x_1 \ldots x_n) X_v f \quad (k = 1 \ldots r-n).$$

Unter den $n(r-n)$ Functionen φ_{kv} giebt es dann gerade $n-l$ von einander unabhängige und ausserdem sind alle diese Functionen φ_{kv} Lösungen des l-gliedrigen vollständigen Systems:

$$(45) \qquad X_1 f = 0, \ldots, X_l f = 0;$$

die allgemeinste Lösung dieses vollständigen Systems ist demnach eine willkürliche Function der φ_{kv}.

Wollen wir jetzt die endlichen Gleichungen der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ in kanonischer Form finden, so müssen wir das simultane System:

$$(46) \qquad \frac{dx_i'}{\sum_1^r{}_k \lambda_k \xi_{ki}'} = dt \quad (i = 1 \ldots n)$$

mit den Anfangsbedingungen: $x_i' = x_i$ für $t = 0$ integriren. Diese Aufgabe kommt darauf hinaus, n unabhängige Lösungen:

$$\Omega_v(x_1' \ldots x_n';\ \lambda_1 t, \ldots, \lambda_r t) \quad (v = 1 \ldots n)$$

der linearen partiellen Differentialgleichung:

$$(47) \qquad X'f = \sum_1^r{}_k \lambda_k X_k' f + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

zu bestimmen. Kennt man nämlich n solche Lösungen, so sind die Gleichungen:

$$(48) \qquad \left\{ \Omega_v(x_1' \ldots x_n';\ \lambda_1 t, \ldots, \lambda_r t) = \Omega_v(x_1 \ldots x_n;\ 0 \ldots 0) \right.$$
$$(v = 1 \ldots n)$$

die verlangten Integralgleichungen des simultanen Systems (46). Löst man (48) nach $x_1' \ldots x_n'$ auf, so sind die entstehenden Gleichungen:

$$(49) \qquad x_i' = f_i(x_1 \ldots x_n;\ \lambda_1 t, \ldots, \lambda_r t) \quad (i = 1 \ldots n)$$

die endlichen Gleichungen der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ in kanonischer Form.

Wir werden zeigen, dass sich gewisse Lösungen der partiellen Differentialgleichung (47) ohne Integration angeben lassen.

Denkt man sich in die allgemeine infinitesimale Transformation: $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ unsrer Gruppe vermöge der unbekannten Gleichungen (49) die Veränderlichen x' an Stelle der x eingeführt, so erhält man eine Gleichung von der Form:

$$\sum_1^r e_k' X_k' f = \sum_1^r e_k X_k f, \tag{50}$$

wo die e' mit den e durch gewisse Relationen:

$$e_k' = \sum_1^r \sigma_{kj}(\lambda_1 t, \ldots, \lambda_r t)\, e_j \qquad (k = 1 \ldots r) \tag{51}$$

verknüpft sind. Diese Relationen stellen die endlichen Gleichungen der adjungirten Gruppe unsrer Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ dar und zwar in kanonischer Form, sie können daher durch Auflösung einer algebraischen Gleichung gefunden werden.

Setzt man die Werthe der e_k' aus (51) in (50) ein und vergleicht man die Coefficienten von $e_1 \ldots e_r$ auf beiden Seiten, so bekommt man die nachstehenden Gleichungen:

$$\sum_1^r \sigma_{jk}(\lambda_1 t, \ldots, \lambda_r t)\, X_j' f = X_k f \qquad (k = 1 \ldots r), \tag{52}$$

die natürlich vermöge der Gleichungen (49) identisch bestehen. In unserm Falle lässt sich sogar über die Form der Gleichungen (52) noch etwas genaueres sagen. Da nämlich $X_1 f \ldots X_l f$ ausgezeichnete infinitesimale Transformationen unsrer r-gliedrigen Gruppe sind, so müssen sie bei jeder endlichen Transformation (49) dieser Gruppe ihre Form bewahren, es müssen also vermöge (49) l Relationen von der Form:

$$X_1' f = X_1 f, \ldots, X_l' f = X_l f \tag{53}$$

bestehen, das heisst die l ersten der Gleichungen (52) müssen die Form (53) besitzen.

Zur Abkürzung setzen wir:

$$\sum_1^r \sigma_{jk}(\lambda_1 t, \ldots, \lambda_r t)\, X_j' f = \Xi_k' f \qquad (k = 1 \ldots r),$$

dann sind: $\Xi_1' f \ldots \Xi_n' f$ durch keine lineare Identität:

$$\sum_1^n \chi_\nu(x_1' \ldots x_n')\, \Xi_\nu' f \equiv 0$$

verknüpft, dagegen drücken sich aber $\Xi_{n+1}' f \ldots \Xi_r' f$ linear durch $\Xi_1' f \ldots \Xi_n' f$ aus:

$$\left\{ \Xi_{n+k}' f \equiv \sum_1^n \Phi_{k\nu}(x_1' \ldots x_n';\ \lambda_1 t, \ldots, \lambda_r t)\, \Xi_\nu' f \right. \qquad (k = 1 \ldots r - n). \tag{54}$$

Es würde sogar leicht sein, die Functionen $\Phi_{k\nu}$ wirklich hinzuschreiben, man brauchte zu diesem Zwecke nur zu berücksichtigen, dass zwischen: $X_1'f \ldots X_r'f$ Identitäten von derselben Form bestehen, wie die Identitäten (44) zwischen $X_1 f \ldots X_r f$.

Durch Benutzung der Identitäten (44) und (54) erhalten jetzt die Gleichungen (52) die Form:

$$\Xi_1'f = X_1 f, \ldots, \Xi_n'f = X_n f$$

$$\sum_1^n{}^{\nu} \Phi_{k\nu}(x', \lambda t)\, \Xi_\nu' f = \sum_1^n{}^{\nu} \varphi_{k\nu}(x) X_\nu f \qquad (k = 1 \ldots r - n),$$

also ergiebt sich:

$$\sum_1^n{}^{\nu} \{\Phi_{k\nu}(x', \lambda t) - \varphi_{k\nu}(x)\} X_\nu f = 0 \qquad (k = 1 \ldots r - n).$$

Diese Gleichungen müssen zu Identitäten werden, wenn man für $x_1' \ldots x_n'$ ihre Werthe aus (49) einsetzt; da aber zwischen $X_1 f \ldots X_n f$ keine lineare Identität besteht, so können wir schliessen, dass die $n(r - n)$ Gleichungen:

$$(55) \qquad \Phi_{k\nu}(x_1' \ldots x_n';\ \lambda_1 t, \ldots, \lambda_r t) = \varphi_{k\nu}(x_1 \ldots x_n) \qquad (k = 1 \ldots r - n;\ \nu = 1 \ldots n)$$

vermöge der unbekannten Gleichungen (49) in Identitäten übergehen.

Bedenken wir jetzt noch, dass die Grössen $x_1 \ldots x_n$ in den Gleichungen (49) nichts anderes sind, als die n willkürlichen Integrationsconstanten, die sich bei der Integration des simultanen Systems (46) ergeben, so erkennen wir unmittelbar, dass jede Gleichung von der Form:

$$\Phi_{k\nu}(x_1' \ldots x_n';\ \lambda_1 t, \ldots, \lambda_r t) = \text{const.}$$

eine Integralgleichung des simultanen Systems (46) ist, mit andern Worten: die $n(r - n)$ Functionen $\Phi_{k\nu}(x'; \lambda t)$ sind Lösungen der linearen partiellen Differentialgleichung (47).

Damit sind also wirklich ohne Integration Lösungen der Differentialgleichung (47) gefunden. Es ist zugleich klar, dass sich unter den betreffenden Lösungen gerade $n - l$ von einander unabhängige befinden; denn die Gleichungen (55) zeigen, dass es unter den $\Phi_{k\nu}(x'; \lambda t)$ genau so viele von einander unabhängige giebt, wie unter den $\varphi_{k\nu}(x)$, unter den $\varphi_{k\nu}(x)$ giebt es aber nach S. 628 gerade $n - l$ von einander unabhängige.

Noch eine Eigenschaft besitzen die $\Phi_{k\nu}(x'; \lambda t)$, die uns nachher von Nutzen sein wird. Wie nämlich die $n(r - n)$ Functionen $\varphi_{k\nu}(x)$

Lösungen des l-gliedrigen vollständigen Systems (45) sind, so sind augenscheinlich die $\Phi_{kr}(x', \lambda t)$ Lösungen des l-gliedrigen vollständigen Systems:

$$X_1'f = 0, \ldots, X_l'f = 0. \tag{56}$$

Dieser Umstand ist deshalb so wichtig, weil die infinitesimalen Transformationen: $X_1'f \ldots X_l'f$ als ausgezeichnete infinitesimale Transformationen der Gruppe: $X_1'f \ldots X_r'f$ sämmtlich mit der infinitesimalen Transformation:

$$X'f = \sum_1^r{}_k \lambda_k X_k'f + \frac{\partial f}{\partial t}$$

vertauschbar sind und weil infolge dessen die lineare partielle Differentialgleichung:

$$X'f = \sum_1^r{}_k \lambda_k X_k'f + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \tag{47}$$

die l paarweise vertauschbaren infinitesimalen Transformationen: $X_1'f \ldots X_l'f$ gestattet.

Die Bestimmung der noch fehlenden Lösungen der Differentialgleichung (47) gestaltet sich jetzt äusserst einfach.

Wir wollen annehmen, dass:

$$\Phi_\mu(x_1' \ldots x_n'; \lambda_1 t, \ldots, \lambda_r t) \quad (\mu = 1 \ldots n - l)$$

irgend $n - l$ von einander unabhängige unter den $n(r - n)$ Functionen $\Phi_{kr}(x'; \lambda t)$ sind, und wollen uns ausserdem die Benennung der Grössen $x_1' \ldots x_n'$ so gewählt denken, dass $\Phi_1 \ldots \Phi_{n-l}$ gerade in Bezug auf $x_{l+1}' \ldots x_n'$ von einander unabhängig sind. Setzen wir dann:

$$y_1' = \Phi_1, \ldots, y_{n-l}' = \Phi_{n-l},$$

so können wir: $x_1' \ldots x_l'$, $y_1' \ldots y_{n-l}'$, t an Stelle von: $x_1' \ldots x_n'$, t als neue Veränderliche einführen. Da $\Phi_1 \ldots \Phi_{n-l}$ Lösungen der Differentialgleichung (47) sind, so erhält diese in den neuen Veränderlichen die Form:

$$\overline{X}'f = \sum_1^l{}_\tau \xi_\tau(x_1' \ldots x_l', y_1' \ldots y_{n-l}', t) \frac{\partial f}{\partial x_\tau'} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \tag{57}$$

Andrerseits sind aber $\Phi_1 \ldots \Phi_{n-l}$ auch Lösungen des vollständigen Systems (56), folglich bekommen $X_1'f \ldots X_l'f$ in den neuen Veränderlichen die Gestalt:

$$X_\pi'f = \overline{X}_\pi'f = \sum_1^l{}_\tau \xi_{\pi\tau}(x_1' \ldots x_l', y_1' \ldots y_{n-l}', t) \frac{\partial f}{\partial x_\tau'} \quad (\pi = 1 \ldots l). \tag{58}$$

Selbstverständlich gestattet hier die Differentialgleichung (57) die l infinitesimalen Transformationen (58) und diese ihrerseits sind paarweise vertauschbar. Endlich ist noch zu bemerken, dass die Determinante:

$$\sum \pm \xi_{11} \dots \xi_{ll}$$

sicher nicht verschwindet, denn da: $X_1'f \dots X_l'f$ nach S. 627 durch keine lineare Identität:

$$\sum_1^l {}_\tau \chi_\tau(x_1' \dots x_n') X_\tau' f = 0$$

verknüpft sind, so kann auch zwischen: $\overline{X}_1'f \dots \overline{X}_l'f$ keine lineare Identität:

$$\sum_1^l {}_\tau \psi_\tau(x_1' \dots x_l',\ y_1' \dots y_{n-l}',\ t)\, \overline{X}_\tau' f \equiv 0 \tag{59}$$

bestehen.

Die Bestimmung der noch fehlenden Lösungen der Differentialgleichung (47) ist nunmehr auf die Bestimmung von l unabhängigen Lösungen der Differentialgleichung (57) in den $l+1$ Veränderlichen $x_1' \dots x_l', t$ zurückgeführt; überdies ist bekannt, dass die Differentialgleichung (57) die l paarweise vertauschbaren infinitesimalen Transformationen (58) gestattet, zwischen denen sicher keine lineare Identität (59) besteht. Wir haben also hier genau denselben Fall, wie auf S. 621 ff.; genau in derselben Weise wie damals ergiebt sich, dass die Lösungen der Differentialgleichung (57) durch l unabhängige Quadraturen gefunden werden können.

Wir erhalten demnach das

Theorem 50. *Ist eine r-gliedrige Gruppe, deren infinitesimale Transformationen:*

$$X_k f = \sum_1^n {}_i \xi_{ki}(x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \dots r)$$

gegeben sind, so beschaffen, dass jede infinitesimale Transformation:

$$Zf = \sum_1^n {}_i \xi_i(x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

die mit allen $X_k f$ vertauschbar ist, der Gruppe: $X_1 f \dots X_r f$ selbst angehört, so verlangt die Aufstellung der endlichen Gleichungen dieser Gruppe in der kanonischen Form, abgesehen von algebraischen Operationen und von gewissen Eliminationen,

nur noch Quadraturen und zwar gerade l unabhängige Quadraturen, wenn die Gruppe gerade l unabhängige ausgezeichnete infinitesimale Transformationen enthält.

Den soeben bewiesenen Satz haben wir bereits in Abschnitt I auf S. 518 am Schlusse von § 125 angekündigt.

Aus dem Theoreme 50 wollen wir jetzt noch ein wichtiges Ergebniss ableiten.

Es seien r unabhängige infinitesimale Transformationen:

$$X_k f = \sum_1^n{}^i \xi_{ki}(x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \dots r)$$

vorgelegt, die eine r-gliedrige Gruppe erzeugen; ausserdem setzen wir voraus, dass die allgemeinste infinitesimale Transformation:

$$Zf = \sum_1^n{}^i \xi_i(x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

die mit $X_1 f \dots X_r f$ vertauschbar ist, sich aus einer endlichen Anzahl, etwa aus m von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

$$Z_\mu f = \sum_1^n{}^i \xi_{\mu i}(x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (\mu = 1 \dots m)$$

linear ableiten lässt und dass wir m derartige infinitesimale Transformationen: $Z_1 f \dots Z_m f$ kennen.

Die gemachten Voraussetzungen können nach Abschn. I, S. 377, Satz 2 nur dann eintreten, wenn die Gruppe $X_1 f \dots X_r f$ transitiv ist. Sind sie erfüllt, so erzeugen: $Z_1 f \dots Z_m f$ augenscheinlich eine m-gliedrige Gruppe; da überdies alle $Z_\mu f$ mit allen $X_k f$ vertauschbar sind, so erzeugen auch die infinitesimalen Transformationen:

$$X_1 f \dots X_r f, \; Z_1 f \dots Z_m f \tag{60}$$

eine Gruppe und zwar eine $(r + m - l)$-gliedrige, wenn die Gruppe: $X_1 f \dots X_r f$ gerade l unabhängige ausgezeichnete infinitesimale Transformationen enthält.

Die Gruppe (60) erfüllt nun die Forderungen des Theorems 50, denn jede infinitesimale Transformation, die mit allen infinitesimalen Transformationen (60) vertauschbar ist, hat augenscheinlich die Form:

$$e_1 Z_1 f + \dots + e_m Z_m f$$

und gehört mithin der Gruppe (60) an. Folglich können wir die endlichen Gleichungen der Gruppe (60) in kanonischer Form durch eine Anzahl von einander unabhängiger Quadraturen bestimmen. Hieraus

aber ergiebt sich nach S. 624 f., dass wir auch die endlichen Gleichungen der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$, die ja eine Untergruppe der Gruppe (60) ist, durch blose Quadraturen in der kanonischen Form finden können. Die Anzahl der erforderlichen Quadraturen ist gleich der Anzahl der unabhängigen ausgezeichneten infinitesimalen Transformationen der Gruppe (60), sie ist also mindestens gleich l.

Sind zum Beispiel:

$$X_k f = \sum_1^n{}^i \xi_{ki}(x_1 \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \ldots n)$$

n unabhängige infinitesimale Transformationen einer n-gliedrigen einfach transitiven Gruppe des n-fach ausgedehnten Raumes $x_1 \ldots x_n$, so lässt sich jede infinitesimale Transformation Zf, die mit allen $X_k f$ vertauschbar ist, aus n von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

$$Z_k f = \sum_1^n{}^i \xi_{ki}(x_1 \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \ldots n)$$

linear ableiten und zwar erzeugen: $Z_1 f \ldots Z_n f$ ebenfalls eine n-gliedrige einfach transitive Gruppe, nämlich die zur Gruppe: $X_1 f \ldots X_n f$ reciproke Gruppe (s. Abschn. I, Theor. 68, S. 380).

Kennt man ausser den infinitesimalen Transformationen: $X_1 f \ldots X_n f$ auch noch: $Z_1 f \ldots Z_n f$, so sind die vorhin gemachten Voraussetzungen erfüllt, es ergiebt sich demnach das

Theorem 51. *Kennt man n unabhängige infinitesimale Transformationen:*

$$X_k f = \sum_1^n{}^i \xi_{ki}(x_1 \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \ldots n)$$

einer n-gliedrigen einfach transitiven Gruppe in den n Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$ und kennt man zugleich die infinitesimalen Transformationen:

$$Z_k f = \sum_1^n{}^i \xi_{ki}(x_1 \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \ldots n)$$

der zugehörigen reciproken einfach transitiven Gruppe, so kann man die endlichen Gleichungen der Gruppe: $X_1 f \ldots X_n f$ in der kanonischen Form aufstellen und zwar sind dazu ausser algebraischen Operationen nur noch gewisse Eliminationen und endlich gerade l von einander unabhängige Quadraturen erforder-

lich, wenn die Gruppe: $X_1 f \ldots X_n f$ gerade l unabhängige ausgezeichnete infinitesimale Transformationen enthält. Operationen von genau derselben Beschaffenheit genügen, wenn man die endlichen Gleichungen der Gruppe: $Z_1 f \ldots Z_n f$ und die endlichen Gleichungen der $(2n - l)$-gliedrigen Gruppe: $X_1 f \ldots X_n f$, $Z_1 f \ldots Z_n f$ in der kanonischen Form aufstellen will.

Dieses Theorem wird uns im nächsten Kapitel von grossem Nutzen sein*).

Kapitel 27.

Die Bestimmung aller r-gliedrigen transitiven Gruppen von gegebener Zusammensetzung.

In Kap. 22 von Abschn. I haben wir die in der Ueberschrift bezeichnete Aufgabe unter der Voraussetzung erledigt, dass die endlichen Gleichungen irgend einer r-gliedrigen Gruppe von der gegebenen Zusammensetzung bekannt waren. Wir dachten uns damals durch Differentiationen und Eliminationen die infinitesimalen Transformationen zweier reciproker einfach transitiver Gruppen von der gegebenen Zusammensetzung bestimmt und zeigten, dass die Erledigung der Aufgabe dann nur noch algebraische Operationen und die Integration gewisser simultaner Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen verlangt.

Wir lassen jetzt die damals gemachte Voraussetzung fallen; wir denken uns blos eine Zusammensetzung gegeben, also ein System von r^3 Constanten c_{iks}, das die Gleichungen:

---

*) Den Hauptsatz dieses Kapitels, dass es immer möglich ist die kanonische Form einer jeden Gruppe zu finden, deren endliche Gleichungen: $x_i' = f_i(x, a)$ in irgend einer Form vorliegen, benutzte Lie bei vielen Gelegenheiten in seinen älteren Untersuchungen, ohne ihn aber ausdrücklich zu formuliren, geschweige denn zu beweisen. Ausführlich dargestellt wurden die Theorien dieses Kapitels zum ersten Male in seiner Abhandlung: Reduction einer Gruppe auf ihre kanonische Form, Leipziger Berichte 1889. In Bd. 25 der Math. Ann. benutzte Lie *ohne es ausdrücklich hervorzuheben,* den folgenden

Satz. *Kennt man die endlichen Gleichungen einer Gruppe:*

$$x_i' = f_i(x_1 \ldots x_n, a_1 \ldots a_r) \quad (i = 1 \ldots n),$$

so ist es immer möglich, die Invarianten jeder ihrer Untergruppen zu finden.

Dieser Satz ist offenbar eine einfache Folge der allgemeinen Entwicklungen dieses Kapitels.

$$(1)\qquad \begin{cases} c_{iks} + c_{kis} = 0 \\ \sum_{1}^{r} \tau \{ c_{ik\tau} c_{\tau js} + c_{kj\tau} c_{\tau is} + c_{ji\tau} c_{\tau ks} \} = 0 \\ (i, k, j, s = 1 \dots r) \end{cases}$$

befriedigt, und suchen alle r-gliedrigen transitiven Gruppen von der Zusammensetzung c_{iks}. Mit andern Worten: Wir suchen in n Veränderlichen: $x_1 \dots x_n$ $(0 \leqq n \leqq r)$ alle r-gliedrigen Gruppen:

$$X_k f = \sum_{1}^{n} \nu \xi_{k\nu}(x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \quad (k = 1 \dots r),$$

die transitiv sind und deren infinitesimale Transformationen: $X_1 f \dots X_r f$ gerade in den Beziehungen:

$$(2)\qquad (X_i X_k) = \sum_{1}^{r} s c_{iks} X_s f \quad (i, k = 1 \dots r)$$

stehen.

In Abschn. I haben wir diese allgemeinere Aufgabe bereits erwähnt (S. 433 f.), aber nur theilweise erledigt, denn wir konnten zwar in gewissen Fällen durch ausführbare Operationen die endlichen Gleichungen einer r-gliedrigen Gruppe von der gegebenen Zusammensetzung c_{iks} aufstellen, aber im Allgemeinen war uns das noch nicht möglich, wir hatten ja damals noch nicht einmal den Satz bewiesen, dass zu jedem Systeme von r^3 c_{iks}, das die Gleichungen (1) erfüllt, r-gliedrige Gruppen von der Zusammensetzung c_{iks} gehören.

Diesen Satz haben wir zwar mittlerweile in Kapitel 17 von Abschn. II bewiesen, indem wir zeigten, dass zu jedem derartigen Systeme von c_{iks} eine r-gliedrige Gruppe von der Zusammensetzung c_{iks} gefunden werden kann und dass sich die Bestimmung einer solchen Gruppe durch Integration von simultanen Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen leisten lässt (vgl. auch § 115 in Kap. 25 d. jetz. Abschn.), aber praktisch ist damit für die Erledigung unsrer gegenwärtigen Aufgabe nicht viel gewonnen, weil die betreffenden Integrationen zu schwierig sind.

Wir werden deshalb einen andern Weg einschlagen, um unsre gegenwärtige Aufgabe auf die in Kap. 22 von Abschn. I erledigte zurückführen. Wir werden nämlich zeigen, dass jedesmal, wenn ein System von r^3 Constanten c_{iks} gegeben ist, man die infinitesimalen Transformationen zweier r-gliedriger reciproker einfach transitiver Gruppen von der Zusammensetzung c_{iks} aufstellen kann und dass dazu nur die Auflösung einer algebraischen Gleichung erforderlich ist. Haben wir diesen Nachweis geführt, so ist aus den Entwicklungen

von Kap. 22 des Abschn. I unmittelbar klar, dass die Bestimmung aller r-gliedrigen transitiven Gruppen von der Zusammensetzung c_{iks} ausser algebraischen Operationen nur noch die Integration gewisser simultaner Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen erfordert.

Merkwürdigerweise lassen sich nun aber diese Differentialgleichungen sammt und sonders integriren. Gestützt auf die Entwicklungen des vorigen Kapitels werden wir nämlich zeigen, dass, *sobald die infinitesimalen Transformationen jener beiden reciproken einfach transitiven Gruppen gefunden sind, ausser algebraischen Operationen nur noch gewisse Eliminationen und im ungünstigsten Falle gewisse Quadraturen erfordert werden, damit man die endlichen Gleichungen aller transitiven Gruppen von der gegebenen Zusammensetzung hinschreiben kann**).

Begnügt man sich mit den *infinitesimalen* Transformationen der gesuchten Gruppen, so ist auch dieses Ergebniss noch einer Vereinfachung fähig, die wir in Kap. 29 besprechen werden.

Die Aufgabe, die uns zunächst beschäftigen wird, ist folgende: *Gegeben sind* r^3 *Constanten* c_{iks}, *die den Gleichungen* (1) *genügen, gesucht werden die infinitesimalen Transformationen zweier* r*-gliedriger reciproker einfach transitiver Gruppen von der Zusammensetzung* c_{iks}. Wir müssen

---

*) Nachdem Lie schon im Jahre 1874 (Math. Ann. 1880, Bd. 16, S. 528) erkannt hatte, dass die complicirten Functionalgleichungen, welche alle r-gliedrigen Gruppen in n Veränderlichen bestimmen, durch die Integration von *gewöhnlichen* Differentialgleichungen erledigt werden können, bemerkte er im Sept. 1884 (Ges. d. W. zu Christiania 1884, Nr. 9), dass man immer *ohne Integration* von Differentialgleichungen zuerst eine einfach transitive Gruppe gegebener Zusammensetzung und sodann alle gleichzusammengesetzten Gruppen aufstellen kann. Dieselbe Behauptung wurde, ebenfalls ohne Beweis, in den Math. Ann. Bd. 25, S. 135 unterm Text wiederholt. Dasselbe Problem wurde sodann in den Leipz. Berichten vom 13. Febr. 1888 folgendermassen besprochen:

„Die Bestimmung aller r-gliedrigen Gruppen von Punkttransformationen kann jedenfalls durch Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen geleistet werden. Schliesst man alle Gruppen mit ausgezeichneten infinitesimalen Transformationen aus, so lassen sich die betreffenden Differentialgleichungen leicht integriren. Lässt man dagegen die soeben eingeführte Beschränkung fallen, so wird die Integration jener Differentialgleichungen wesentlich schwieriger. Ich bin indess auch für diesen Fall zu dem Resultate gekommen, dass sich die betreffende Integration durchführen lässt. Diese Frage ist indess so verwickelt, dass ich mir eine definitive Entscheidung derselben für eine spätere Gelegenheit vorbehalten muss."

Endlich veröffentlichte Lie in den Leipz. Ber. vom 1. Dec. 1890 die Note: „Bestimmung aller r-gliedrigen transitiven Gruppen durch ausführbare Operationen", in der er die früher angegebenen Ergebnisse durch allgemeingültige Methoden bewies.

jedoch, um diese Aufgabe erledigen zu können, einige vorbereitende Betrachtungen einschalten.

§ 122.

Es sei:

$$x_i' = f_i(x_1 \ldots x_n;\ a_1 \ldots a_r) \quad (i = 1 \ldots n) \tag{3}$$

irgend eine r-gliedrige Gruppe, die von den r unabhängigen infinitesimalen Transformationen $X_1 f \ldots X_r f$ erzeugt ist und die Zusammensetzung c_{iks} besitzt. Wenn wir auch vorläufig noch keine solche Gruppe kennen, so wissen wir doch, dass es welche giebt; wie sie gefunden werden, das kommt hier noch nicht in Betracht.

Die Gruppe (3) genügt den bekannten Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_1^r{}_j \psi_{jk}(a)\, \xi_{ji}(x') \quad (i = 1 \ldots n;\ k = 1 \ldots r), \tag{4}$$

sie besteht überdies aus paarweise inversen Transformationen und enthält die identische Transformation. Wir können daher nach S. 565 f. voraussetzen, dass sich die $\psi_{jk}(a)$ für die Parameter: $a_1^0 \ldots a_r^0$ der identischen Transformation regulär verhalten und dass ihre Determinante für: $a = a^0$ einen endlichen von Null verschiedenen Werth besitzt. Dann sind auch in den Auflösungen:

$$\xi_{ki}(x') = \sum_1^r{}_j \alpha_{kj}(a) \frac{\partial x_i'}{\partial a_j} \quad (k = 1 \ldots r;\ i = 1 \ldots n) \tag{5}$$

der Gleichungen (4) die $\alpha_{kj}(a)$ so beschaffen, dass sie sich für: $a_k = a_k^0$ regulär verhalten und dass zu gleicher Zeit ihre Determinante endlich und von Null verschieden bleibt.

Nach Abschn. I, Kap. 21 gehört nun zu der Gruppe (3) eine mit ihr gleichzusammengesetzte einfache transitive Gruppe, ihre Parametergruppe. Um diese Parametergruppe zu finden, führe man zuerst eine Transformation von der Form (3) mit den Parametern $a_1 \ldots a_r$ aus, dann eine mit den Parametern $b_1 \ldots b_r$; die entstehende Transformation hat wieder die Form (3) und ihre Parameter: $c_1 \ldots c_r$ drücken sich durch die a und die b in bekannter Weise aus:

$$c_k = \varphi_k(a_1 \ldots a_r;\ b_1 \ldots b_r) \quad (k = 1 \ldots r). \tag{6}$$

Fasst man hier die a und die c als Veränderliche auf, die b aber als Parameter, so stellen diese Gleichungen die Parametergruppe der Gruppe (3) dar.

Die Gleichungen (6) stellen aber nach Abschn. I, S. 428 f. noch eine andre Gruppe dar; fasst man nämlich in ihnen die b und die c als Veränderliche und die a als Parameter auf, so stellen sie die zur

Parametergruppe reciproke Gruppe dar. Wir wollen diese letztere Gruppe von jetzt ab als die *zweite Parametergruppe* bezeichnen, während die bisher Parametergruppe genannte Gruppe die *erste Parametergruppe* heissen soll. Doch wollen wir festsetzen, dass jedesmal, wenn von der Parametergruppe schlechthin gesprochen wird, darunter die *erste* Parametergruppe zu verstehen ist.

Wir wollen jetzt die infinitesimalen Transformationen der beiden Parametergruppen bilden und zwar zunächst die der *ersten*.

Da die Transformation (3) für: $a_k = a_k^0$ in die identische Transformation übergeht, so müssen die Gleichungen (6) für: $b_k = a_k^0$ ergeben: $c_k = a_k$. Wir werden daher jedenfalls gewisse infinitesimale Transformationen der ersten Parametergruppe finden, wenn wir in (6) den b_k solche Werthe: $a_k^0 + \delta\omega_k$ ertheilen, die von den a_k^0 unendlich wenig abweichen. Die infinitesimalen Transformationen der ersten Parametergruppe, die wir auf diese Weise erhalten, haben die Form:

$$(7) \qquad a_k' = a_k + \sum_1^r{}_j \left[\frac{\partial \varphi_k(a, b)}{\partial b_j}\right]_{b=a^0} \delta\omega_j \qquad (k = 1 \ldots r),$$

wo wir aus leicht begreiflichen Gründen a_k' für c_k geschrieben haben.

Es lässt sich nun auch leicht zeigen, dass die Gleichungen (7) die allgemeine infinitesimale Transformation der ersten Parametergruppe darstellen, dass also unter den infinitesimalen Transformationen (7) r unabhängige vorhanden sind. Nach Abschn. I, S. 405 erfüllen ja die $\varphi_k(a, b)$ Identitäten von der Form:

$$\frac{\partial \varphi_k(a, b)}{\partial b_j} \equiv \sum_1^r{}_\tau \psi_{\tau j}(b)\, \alpha_{\tau k}(\varphi_1(a, b) \ldots \varphi_r(a, b))$$

und die gehen bei der Substitution: $b_k = a_k^0$ über in:

$$\left[\frac{\partial \varphi_k(a, b)}{\partial b_j}\right]_{b=a^0} \equiv \sum_1^r{}_\tau \psi_{\tau j}(a^0) \cdot \alpha_{\tau k}(a_1 \ldots a_r).$$

Da nun die Determinante der $\psi_{\tau j}(a^0)$ endlich und von Null verschieden ist, und da die Determinante der $\alpha_{\tau k}(a)$ nicht identisch verschwindet, so folgt hieraus augenscheinlich, dass die r infinitesimalen Transformationen:

$$a_k' = a_k + \left[\frac{\partial \varphi_k(a, b)}{\partial b_j}\right]_{b=a^0} \delta\omega_j \qquad (k = 1 \ldots r)$$
$$(j = 1 \ldots r)$$

von einander unabhängig sind.

In ganz ähnlicher Weise gelangt man zu den infinitesimalen Transformationen der *zweiten* Parametergruppe.

Macht man in (6) die Substitution: $a_k = a_k^0$, so ergiebt sich: $c_k = b_k$, man wird daher eine infinitesimale Transformation der zweiten Parametergruppe bekommen, wenn man die a_k durch $a_k^0 + \delta\omega_k$ ersetzt. Die so entstehende infinitesimale Transformation lautet:

$$b_k' = b_k + \sum_1^r \left[\frac{\partial \varphi_k(a,b)}{\partial a_j}\right]_{a=a^0} \delta\omega_j \quad (k=1\ldots r), \tag{8}$$

wo b_k' an Stelle von c_k geschrieben ist; dass sie die allgemeine infinitesimale Transformation der zweiten Parametergruppe ist, könnte man in ähnlicher Weise einsehen, wie vorhin, doch würde das zu umständlich sein, da wir in Abschn. I die grundlegenden Differentialgleichungen für die zweite Parametergruppe nicht mit angegeben haben. Wir schlagen deshalb einen andern Weg ein, der zugleich über die Bedeutung der zweiten Parametergruppe Licht verbreitet.

Bezeichnen wir wie üblich die Transformation (3) mit $S_{(a)}$ und denken wir uns die a, b und c den Gleichungen (6) unterworfen, so ist: $S_{(a)}S_{(b)} = S_{(c)}$, eine Gleichung, die sich offenbar auch schreiben lässt:

$$S_{(b)}^{-1} S_{(a)}^{-1} = S_{(c)}^{-1}. \tag{9}$$

In unserm Falle stimmt nun die Schaar der ∞^r Transformationen $S_{(a)}^{-1}$ mit der Schaar $S_{(a)}$ überein, $S_{(a)}^{-1}$ ist also nur eine andre Form der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$. Legen wir aber diese Form der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ zu Grunde, so ergiebt sich aus Gleichung (9) sofort, dass die beiden Parametergruppen ihre Rollen vertauscht haben, die bisher die zweite war, ist jetzt die erste und umgekehrt. Mit andern Worten: *Die zweite Parametergruppe der Gruppe: $S_{(a)}$ ist zugleich die erste Parametergruppe der Gruppe: $S_{(a)}^{-1}$.*

Bedenkt man endlich, dass die Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ in der Form: $S_{(a)}^{-1}$ durch Gleichungen von der Gestalt:

$$x_i = F_i(x_1' \ldots x_n';\ a_1 \ldots a_r) \quad (i=1\ldots n)$$

dargestellt wird und dass hier die x_i als Functionen der a betrachtet Differentialgleichungen von der Form:

$$\frac{\partial x_i}{\partial a_k} = \sum_1^r \vartheta_{jk}(a)\, \xi_{ji}(x) \quad (i=1\ldots n;\ k=1\ldots r)$$

befriedigen (s. S. 555), und beachtet man überdies, dass die Determinante der ϑ_{jk} für: $a = a^0$ einen endlichen von Null verschiedenen Werth hat, so übersieht man sofort, dass die bei der ersten Parameter-

gruppe angestellten Betrachtungen sich unmittelbar auf die infinitesimale Transformation (8) anwenden lassen und dass (8) wirklich die allgemeine infinitesimale Transformation der zweiten Parametergruppe darstellt.

Die gefundenen Ausdrücke für die infinitesimalen Transformationen der beiden Parametergruppen haben einen begrifflichen Sinn, den wir jetzt noch entwickeln wollen, weil er für die praktische Berechnung dieser infinitesimalen Transformationen von Bedeutung ist.

Die rechten Seiten der Gleichungen (7) stellen die Parameter einer gewissen Transformation unsrer Gruppe (3) dar. Aus der Ableitung der Gleichungen (7) geht hervor, dass man diese Transformation erhält, wenn man zuerst die Transformation (3) ausführt und dann die ebenfalls der Schaar (3) angehörige Transformation $S_{(a^0+\delta\omega)}$, die augenscheinlich die Form:

$$x_i' = x_i + \sum_1^r{}_k \left[\frac{\partial f_i(x, a)}{\partial a_k}\right]_{a=a_0} \delta\omega_k \quad (i = 1 \ldots n) \tag{10}$$

besitzt. Nun stellen die Gleichungen (10), wenn man $\delta\omega_1 \ldots \delta\omega_r$ willkürlich lässt, die allgemeine infinitesimale Transformation der Gruppe (3) dar (s. Abschn. I, S. 77 f.), andrerseits stellen die Gleichungen (7) die allgemeine infinitesimale Transformation der ersten Parametergruppe dar, also ergiebt sich, dass man diese letztere infinitesimale Transformation folgendermassen berechnen kann:

Man führt zuerst die allgemeine Transformation $S_{(a)}$ der Gruppe (3) *aus, dann ihre allgemeine infinitesimale Transformation: $\Sigma\lambda_k X_k f$ und berechnet die der Transformation $S_{(a)}$ unendlich benachbarte Transformation $S_{(a+\delta a)}$, die auf diese Weise entsteht. Die Ausdrücke: $\delta a_1 \ldots \delta a_r$ stellen dann die unendlich kleinen Zuwachse dar, die $a_1 \ldots a_r$ bei der allgemeinen infinitesimalen Transformation der ersten Parametergruppe erhalten.*

Für die zweite Parametergruppe ergiebt sich ebenso die Regel:

Man führt zuerst die allgemeine infinitesimale Transformation: $\Sigma\lambda_k X_k f$ der Gruppe (3) *aus und dann die allgemeine endliche Transformation $S_{(a)}$ dieser Gruppe und berechnet die der Transformation $S_{(a)}$ unendlich benachbarte Transformation $S_{(a+\delta a)}$, die auf diese Weise entsteht. Die Ausdrücke: $\delta a_1 \ldots \delta a_r$ sind dann die unendlich kleinen Zuwachse, die $a_1 \ldots a_r$ bei der allgemeinen infinitesimalen Transformation der zweiten Parametergruppe erhalten.*

Alles das ist selbstverständlich nur unter der Voraussetzung gültig, die wir auf S. 638 gemacht haben, unter der Voraussetzung nämlich,

dass sich die $\psi_{jk}(a)$ in der Umgebung der Parameter: $a_1^0 \dots a_r^0$ der identischen Transformation regulär verhalten und dass die Determinante der $\psi_{jk}(a^0)$ nicht verschwindet. Diese Voraussetzung kann aber durch eine andre ersetzt werden, die für die praktischen Anwendungen viel bequemer ist. Man braucht blos zu verlangen, *dass sich die* $f_i(x, a)$ *in der Umgebung von* $a_1^0 \dots a_r^0$ *regulär verhalten und dass die Gleichungen* (10) *bei willkürlichen* $\delta\omega_k$ *eine Schaar von* ∞^{r-1} *verschiedenen infinitesimalen Transformationen darstellen.*

In der That, wenn die vorhin wiederholte Voraussetzung erfüllt ist, so sind es offenbar auch die eben angegebenen Forderungen. Sind umgekehrt diese Forderungen erfüllt, so ist es auch jene Voraussetzung. Dann bestehen nämlich wegen der Differentialgleichungen (4) die Identitäten:

$$\left[\frac{\partial f_i(x, a)}{\partial a_k}\right]_{a=a^0} \equiv \sum_1^r{}_j \psi_{jk}(a^0)\,\xi_{ji}(x).$$

Setzt man nun in diesen für $x_1 \dots x_n$ der Reihe nach r verschiedene Werthsysteme: $x_1^{(\mu)} \dots x_n^{(\mu)}$ $(\mu = 1 \dots r)$ von allgemeiner gegenseitiger Lage, so erhält man ein Gleichungensystem, das nach den $\psi_{jk}(a^0)$ auflösbar ist (s. Abschn. I, S. 66, Satz 5) und zwar ergeben sich offenbar für alle $\psi_{jk}(a^0)$ endliche Werthe. Dass andrerseits die Determinante der $\psi_{jk}(a^0)$ nicht identisch verschwindet, folgt daraus, dass es unter den infinitesimalen Transformationen (10) r von einander unabhängige giebt.

§ 123.

Wir wenden uns jetzt zur Erledigung der auf S. 637 gestellten Aufgabe.

Da die r^3 Constanten c_{iks}, die uns gegeben sind, den Gleichungen (1) genügen, so ist es sicher, dass es in einer geeigneten Zahl von Veränderlichen, etwa in den n Veränderlichen $x_1 \dots x_n$ r unabhängige infinitesimale Transformationen:

$$X_k f = \sum_1^n{}_i \xi_{ki}(x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \dots r)$$

giebt, die paarweise in Beziehungen von der Form:

$$(X_i X_k) = \sum_1^r{}_s c_{iks} X_s f \quad (i, k = 1 \dots r) \tag{2}$$

stehen und also eine r-gliedrige Gruppe von der Zusammensetzung c_{iks} erzeugen. Die endlichen Gleichungen dieser Gruppe lauten dann in der kanonischen Form:

$$(11) \qquad \left\{ x_i' = x_i + \frac{t}{1} \sum_{k}^{1 \ldots r} \lambda_k \xi_{ki} + \frac{t^2}{1 \cdot 2} \sum_{kj}^{1 \ldots r} \lambda_k \lambda_j X_k \xi_{ji} + \cdots \right.$$
$$(i = 1 \ldots n)$$

und nach Abschn. I, S. 255 können wir den Ausdruck:

$$(12) \qquad t \sum_{1}^{r}{}_k \lambda_k X_k f = \sum_{1}^{r}{}_k e_k X_k f \quad (\lambda_k t = e_k)$$

geradezu als Symbol der endlichen Transformation benutzen, die durch die Gleichungen (11) dargestellt wird. Bei Anwendung dieser Symbolik müssen wir aber, um folgerichtig zu sein, als Symbol der allgemeinen infinitesimalen Transformation der Gruppe einen Ausdruck von der Form:

$$\sum_{1}^{r}{}_k \delta \omega_k X_k f$$

verwenden, unter $\delta \omega_1 \ldots \delta \omega_r$ willkürliche unendlich kleine Grössen verstanden.

Obwohl wir nun in Wahrheit noch keine infinitesimalen Transformationen: $X_1 f \ldots X_r f$ von der hier angenommenen Beschaffenheit kennen, so werden wir doch mit Hülfe der im vorigen Paragraphen gegebenen Vorschriften dazu gelangen, die infinitesimalen Transformationen der beiden Parametergruppen zu berechnen, die zu der Gruppe (11) gehören. Damit sind dann zugleich die infinitesimalen Transformationen zweier r-gliedriger reciproker einfach transitiver Gruppen von der Zusammensetzung c_{iks} gefunden.

Dass die Vorschriften des vorigen Paragraphen auf den gegenwärtigen Fall anwendbar sind, unterliegt nach S. 642 keinem Zweifel, denn die Gleichungen (11) verhalten sich ja in der Umgebung der Parameter: $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$ der identischen Transformation regulär und ausserdem erhält man, wenn man in (11) die Parameter λ_k unendlich klein, etwa $= \delta \lambda_k$ wählt, eine Schaar:

$$x_i' = x_i + \sum_{1}^{r}{}_k \delta \lambda_k \xi_{ki}(x_1 \ldots x_n) \quad (i = 1 \ldots n)$$

von infinitesimalen Transformationen, die wegen der Unabhängigkeit von: $X_1 f \ldots X_r f$ aus ∞^{r-1} verschiedenen Transformationen besteht.

§ 124.

Wir suchen zuerst die infinitesimalen Transformationen der *zweiten* Parametergruppe der Gruppe (11).

Nach der auf S. 641 gegebenen Regel finden wir diese infinitesi-

malen Transformationen folgendermassen: Wir führen zuerst die allgemeine infinitesimale Transformation: $\Sigma \delta\omega_k X_k f$ der Gruppe (11) aus und dann ihre allgemeine endliche Transformation: $\Sigma e_k X_k f$. Durch Nacheinanderausführung dieser beiden Transformationen müssen wir eine Transformation von der Form: $\Sigma(e_k + \delta e_k) X_k f$ erhalten, wo $\delta e_1 \ldots \delta e_r$ die unendlich kleinen Zuwachse sind, die $e_1 \ldots e_r$ bei der allgemeinen infinitesimalen Transformation der zweiten Parametergruppe bekommen.

Es handelt sich also darum, $\delta e_1 \ldots \delta e_r$ durch: $\delta\omega_1 \ldots \delta\omega_r$ auszudrücken; das aber gelingt uns durch ein Verfahren, das Lie schon 1878 in seinem norwegischen Archive entwickelt hat.

Wir lösen zunächst die umgekehrte Aufgabe, das heisst wir drücken die $\delta\omega_k$ durch die δe_k aus. Wir setzen: $e_k = \lambda_k t$ und definiren $\delta\lambda_k$ durch die Gleichung: $t\,\delta\lambda_k = \delta e_k$, dann kommt diese umgekehrte Aufgabe darauf hinaus, die infinitesimale Transformation: $\Sigma \delta\omega_k X_k f$ so zu bestimmen, dass durch Nacheinanderausführung der beiden Transformationen: $\Sigma \delta\omega_k X_k f$ und: $t\Sigma\lambda_k X_k f$ die Transformation:

$$t\,\Sigma(\lambda_k + \delta\lambda_k) X_k f$$

entsteht.

Um die Lösung dieser Aufgabe zu vereinfachen, führen wir an Stelle der x neue Veränderliche: $y_1 \ldots y_n$ ein, die so gewählt sind, dass der Ausdruck: $\Sigma\lambda_k X_k f$ die einfache Form:

$$\sum \lambda_k X_k f = \frac{\partial f}{\partial y_n} \tag{13}$$

bekommt. Das ist immer möglich und zwar hängen die neuen Veränderlichen ausser von den x natürlich auch noch von $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ ab. Wir können daher annehmen, dass $X_1 f \ldots X_r f$ in den neuen Veränderlichen die Form:

$$X_k f = \sum_1^n{}^i \eta_{ki}(y_1 \ldots y_n) \frac{\partial f}{\partial y_i} \quad (k = 1 \ldots r) \tag{14}$$

erhält, wo die η_{ki} ebenfalls von $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ abhängen.

In den neuen Veränderlichen hat die Transformation mit dem Symbole: $t\Sigma\lambda_k X_k f$ das Symbol:

$$t \sum_1^r{}^k \lambda_k X_k f = t \frac{\partial f}{\partial y_n}$$

(s. Abschn. I, S. 255), ihre Gleichungen lauten daher einfach:

$$y_1' = y_1, \ldots, y_{n-1}' = y_{n-1}, \quad y_n' = y_n + t. \tag{15}$$

Denken wir uns demnach zuerst die infinitesimale Transformation: $\Sigma \delta\omega_k X_k f$ und dann die endliche Transformation: $t\Sigma\lambda_k X_k f$ ausgeführt,

so finden wir eine Transformation, die in den neuen Veränderlichen geschrieben die Form:

$$(16)\qquad \begin{cases} y_n' = y_n + t + \sum_1^r{}^k \delta\omega_k \eta_{kn}(y_1 \dots y_{n-1},\ y_n) \\ y_i' = y_i \qquad + \sum_1^r{}^k \delta\omega_k \eta_{ki}(y_1 \dots y_{n-1},\ y_n) \\ \qquad\qquad\qquad (i = 1 \dots n-1) \end{cases}$$

besitzt.

Andrerseits erhält die Transformation mit dem Symbole:

$$t\,\Sigma(\lambda_k + \delta\lambda_k) X_k f$$

jetzt das Symbol:

$$t \sum_1^r{}^k (\lambda_k + \delta\lambda_k) X_k f = t\frac{\partial f}{\partial y_n} + t \sum_1^r{}^k \delta\lambda_k X_k f,$$

ihre Gleichungen sind demnach durch das simultane System:

$$(17)\qquad \begin{cases} \frac{dy_n'}{dt} = 1 + \sum_1^r{}^k \delta\lambda_k \eta_{kn}(y_1' \dots y_n') \\ \frac{dy_i'}{dt} = \qquad \sum_1^r{}^k \delta\lambda_k \eta_{ki}(y_1' \dots y_n') \\ \qquad\qquad (i = 1 \dots n-1) \end{cases}$$

mit den Anfangsbedingungen: $y_\nu' = y_\nu$ für $t = 0$ bestimmt.

Bei der Integration des simultanen Systems (17) müssen wir berücksichtigen, dass $\delta\lambda_1 \dots \delta\lambda_r$ unendlich kleine Grössen sind; wir brauchen also blos die Glieder von erster Ordnung in den $\delta\lambda$ mitzunehmen. Wären die $\delta\lambda$ gleich Null, so stellten die Gleichungen (15) die Integralgleichungen des simultanen Systems (17) dar; wollen wir daher die Integralgleichungen dieses simultanen Systems bis auf die Glieder von erster Ordnung in den $\delta\lambda$ genau haben, so müssen wir auf den rechten Seiten von (17) für $y_1' \dots y_n'$ die Werthe (15) einsetzen und dann von 0 bis t integriren. Die gewünschten Integralgleichungen lassen sich auf diese Weise in der Form:

$$(18)\qquad \begin{cases} y_n' = y_n + t + \sum_1^r{}^k \delta\lambda_k \int_0^t \eta_{kn}(y_1 \dots y_{n-1},\ y_n + t)\,dt \\ y_i' = y_i \qquad + \sum_1^r{}^k \delta\lambda_k \int_0^t \eta_{ki}(y_1 \dots y_{n-1},\ y_n + t)\,dt \\ \qquad\qquad\qquad (i = 1 \dots n-1) \end{cases}$$

darstellen.

Die zu erledigende Aufgabe kommt jetzt darauf hinaus, nachzuweisen, dass sich die $\delta\omega_k$ derart als Functionen von $\delta\lambda_1 \ldots \delta\lambda_r$ und t bestimmen lassen, dass die beiden Transformationen (16) und (18) zusammenfallen, dass also die Gleichungen:

$$(19)\quad \left\{ \sum_1^r{}^k \delta\omega_k \eta_{ki}(y_1 \ldots y_{n-1},\ y_n) = \sum_1^r{}^k \delta\lambda_k \int_0^t \eta_{ki}(y_1 \ldots y_{n-1},\ y_n + t)\, dt \right.$$
$$(i = 1 \ldots n)$$

zu Identitäten werden. Dieser Nachweis gelingt ziemlich leicht, weil es hier in unserm Falle möglich ist, die Integrale auf den rechten Seiten von (19) auszuführen.

Zu diesem Zwecke versuchen wir r Functionen: $\chi_1 \ldots \chi_r$ von t und den $\delta\lambda$ ausfindig zu machen, die n Gleichungen von der Form:

$$(20)\quad \left\{ \sum_1^r{}^k \delta\lambda_k \eta_{ki}(y_1 \ldots y_{n-1},\ y_n + t) = \sum_1^r{}^k \chi_k \eta_{ki}(y_1 \ldots y_n) \right.$$
$$(i = 1 \ldots n)$$

identisch befriedigen; ist uns das nämlich gelungen, so brauchen wir blos:

$$(21)\quad \delta\omega_k = \int_0^t \chi_k\, dt \qquad (k = 1 \ldots r)$$

zu setzen, um auch die Gleichungen (19) identisch zu erfüllen.

Die Gleichungen (20) bestehen offenbar dann und nur dann identisch, wenn die χ_k den Gleichungen:

$$\sum_1^r{}^k \delta\lambda_k \eta_{ki}(y_1 \ldots y_n) = \sum_1^r{}^k \chi_k \eta_{ki}(y_1 \ldots y_{n-1},\ y_n - t)$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, den Gleichungen:

$$(22)\quad \frac{\partial}{\partial t} \sum_1^r{}^k \chi_k \eta_{ki}(y_1 \ldots y_{n-1},\ y_n - t) = 0 \qquad (i = 1 \ldots n)$$

und den Anfangsbedingungen: $\chi_k = \delta\lambda_k$ für $t = 0$ genügen. Nun ist aber unter den gemachten Voraussetzungen:

$$\left(\sum_1^r{}^k \lambda_k X_k f,\ X_j f \right) = \sum_{ks}^{1 \ldots r} \lambda_k c_{kjs} X_s f$$

oder wegen (13):

$$\sum_1^n{}^i \frac{\partial \eta_{ji}(y_1 \ldots y_n)}{\partial y_n} \frac{\partial f}{\partial y_i} = \sum_{ks}^{1 \ldots r} \lambda_k c_{kjs} \sum_1^n{}^i \eta_{si}(y_1 \ldots y_n) \frac{\partial f}{\partial y_i},$$

woraus sich ergiebt:

$$(23) \qquad \left\{ \frac{\partial \eta_{ji}(y_1 \dots y_n)}{\partial y_n} = \sum_{ks}^{1 \dots r} \lambda_k c_{kjs} \eta_{si}(y_1 \dots y_n) \right. \qquad (j = 1 \dots r;\ i = 1 \dots n).$$

Auf Grund dieser Gleichungen erhält (22) bei Ausführung der Differentiation die Form:

$$\sum_1^r{}_k \frac{\partial \chi_k}{\partial t} \eta_{ki}(y_1 \dots y_{n-1},\ y_n - t) -$$

$$- \sum_{kjs}^{1 \dots r} \chi_k \lambda_j c_{jks} \eta_{si}(y_1 \dots y_{n-1},\ y_n - t) = 0$$

und diese Gleichungen zerfallen endlich, wegen der Unabhängigkeit der infinitesimalen Transformation: $X_1 f \dots X_r f$ in die folgenden:

$$(24) \qquad \frac{\partial \chi_k}{\partial t} = \sum_1^r{}_j \lambda_j \sum_1^r{}_s c_{jsk} \chi_s \qquad (k = 1 \dots r),$$

die zusammen mit den Anfangsbedingungen: $\chi_k = \delta \lambda_k$ für $t = 0$ die Functionen χ_k vollständig bestimmen.

Die Differentialgleichungen (24) erinnern lebhaft an die Differentialgleichungen:

$$(25) \qquad \frac{de_k'}{dt} + \sum_1^r{}_j \lambda_j \sum_1^r{}_s c_{jsk} e_s' = 0 \qquad (k = 1 \dots r),$$

die nach S. 273 von Abschn. I zusammen mit den Anfangsbedingungen: $e_k' = e_k$ für $t = 0$ die endlichen Gleichungen einer gewissen linearen homogenen Gruppe bestimmen, nämlich die endlichen Gleichungen der adjungirten Gruppe*), die zu den r-gliedrigen Gruppen von der Zusammensetzung c_{iks} gehört. In der That verwandeln sich die Differentialgleichungen (24) sofort in die Gleichungen (25), wenn man t durch $-t$ und χ_k durch e_k' ersetzt. Nehmen wir daher an, dass wir durch Integration von (25) die endlichen Gleichungen der adjungirten Gruppe in der Form:

$$(26) \qquad e_k' = \sum_1^r{}_j \varrho_{kj}(\lambda_1 t, \dots, \lambda_r t) e_j \qquad (k = 1 \dots r)$$

*) Dass hier die adjungirte Gruppe auftritt, kann nicht überraschen; denn führt man in die allgemeine infinitesimale Transformation: $\Sigma e_k X_k f$ der Gruppe: $X_1 f \dots X_r f$ neue Veränderliche ein vermöge der Transformation (15) dieser Gruppe, so erhält man nothwendig eine infinitesimale Transformation von der Form: $\Sigma e_k' X_k f$, wo die Beziehung zwischen den e_k' und den e_k durch eine Transformation der adjungirten Gruppe bestimmt ist (s. Abschn. I, S. 270 ff.).

gefunden haben — es ist das nebenbei bemerkt die kanonische Form dieser endlichen Gleichungen — so lauten die gesuchten Lösungen der Differentialgleichungen (24) folgendermassen:

$$\chi_k = \sum_1^r{}_j \varrho_{kj}(-\lambda_1 t, \ldots, -\lambda_r t)\, \delta\lambda_j \quad (k = 1 \ldots r). \tag{27}$$

Durch Einsetzen dieser Werthe von $\chi_1 \ldots \chi_r$ müssen sich die Gleichungen (20) in Identitäten verwandeln, wir haben also:

$$\begin{cases} \sum_1^r{}_k \delta\lambda_k \eta_{ki}(y_1 \ldots y_{n-1},\ y_n + t) \equiv \\ \equiv \sum_{kj}^{1 \ldots r} \delta\lambda_j \varrho_{kj}(-\lambda_1 t, \ldots, -\lambda_r t)\, \eta_{ki}(y_1 \ldots y_n) \\ \qquad\qquad (i = 1 \ldots n) \end{cases} \tag{20'}$$

für alle Werthe der $\delta\lambda_k$, der y_i und von t. Andrerseits bekommen wir nach (21) die Gleichungen:

$$\delta\omega_k = \sum_1^r{}_j \delta\lambda_j \int_0^t \varrho_{kj}(-\lambda_1 t, \ldots, -\lambda_r t)\, dt \quad (k = 1 \ldots r) \tag{28}$$

zur Bestimmung der $\delta\omega_k$.

Die Functionen $\varrho_{kj}(\lambda t)$ lassen sich durch ausführbare Operationen bestimmen. Da nämlich die Differentialgleichungen (25) linear und homogen sind und lauter constante Coefficienten haben, so kann man bekanntlich ihre Integration durchführen, sobald man die algebraische Gleichung:

$$\left| \varepsilon_{sk}\sigma + \sum_1^r{}_j c_{jsk}\lambda_j \right|_{(s,\,k = 1 \ldots r)} = 0 \tag{29}$$

aufgelöst hat, wo σ die Unbekannte ist und wo ε_{sk} wie gewöhnlich $= 0$ oder $= 1$ ist, jenachdem s und k ungleich oder gleich sind. Bezeichnen wir die von einander verschiedenen Wurzeln dieser Gleichung mit: $\sigma_1 \ldots \sigma_m$, so werden bekanntlich die $\varrho_{kj}(\lambda t)$ lineare Functionen der m Ausdrücke:

$$e^{\sigma_1 t} \ldots e^{\sigma_m t} \tag{30}$$

mit Coefficienten, die ihrerseits ganze Functionen von t und rationale Functionen der Grössen: $\lambda_1 \ldots \lambda_r$, $\sigma_1 \ldots \sigma_m$ sind.

Hieraus ergiebt sich ferner, dass auch die Integrale in den Glei-

chungen (28) ausführbar sind. In der That, es wird offenbar das Integral:

$$\int_0^t \varrho_{kj}(\lambda_1 t, \ldots, \lambda_r t)\, dt$$

wieder eine lineare Function der m Ausdrücke (30), mit Coefficienten, die ganze Functionen von t und rationale Functionen von $\lambda_1 \ldots \lambda_r$, $\sigma_1 \ldots \sigma_m$ sind. Bedenken wir überdies, dass dieses Integral für $t = 0$ verschwindet und dass ϱ_{kj} die Grössen t und $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ nur in den Verbindungen: $\lambda_1 t, \ldots, \lambda_r t$ enthält, so können wir setzen:

$$\int_0^t \varrho_{kj}(\lambda_1 t, \ldots, \lambda_r t)\, dt = t \,.\, \psi_{kj}(\lambda_1 t, \ldots, \lambda_r t), \tag{31}$$

wo die $\psi_{kj}(\lambda t)$ Functionen von genau derselben Beschaffenheit sind, wie die $\varrho_{kj}(\lambda t)$.

Durch Benutzung dieser Formeln ergeben sich aus den Identitäten (20′) die nachstehenden:

$$\left\{\begin{array}{l} \sum_1^r{}_k\, \delta\lambda_k \int_0^t \eta_{ki}(y_1 \ldots y_{n-1},\ y_n + t)\, dt \equiv \\ \equiv \sum_{kj}^{1\ldots r} t\,\delta\lambda_j\, \psi_{kj}(-\lambda_1 t, \ldots, -\lambda_r t)\, \eta_{ki}(y_1 \ldots y_n) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (i = 1 \ldots n), \end{array}\right. \tag{20″}$$

die ebenfalls für alle Werthe der $\delta\lambda_k$, der y_i und von t gültig sind. Ausserdem aber bekommen wir nach (28):

$$\delta\omega_k = \sum_1^r{}_j\, t\,\delta\lambda_j\, \psi_{kj}(-\lambda_1 t, \ldots, -\lambda_r t) \quad (k = 1 \ldots r) \tag{28′}$$

als endgültige Darstellung der $\delta\omega_k$.

Wir wollen hier gleich noch erwähnen, dass $\varrho_{kj}(\lambda t)$ für: $t = 0$ den Werth ε_{kj} annimmt, was unmittelbar einleuchtet und woraus offenbar folgt, dass für: $t = 0$ auch $\psi_{kj}(\lambda t) = \varepsilon_{kj}$ wird. Hierin liegt, dass die Determinante der $\psi_{kj}(\lambda t)$ nicht identisch verschwindet und für $t = 0$ den Werth 1 besitzt.

Durch die vorstehenden Entwicklungen ist Folgendes bewiesen: Wenn man zuerst die infinitesimale Transformation: $\Sigma\,\delta\omega_k X_k f$ ausführt, wo die $\delta\omega_k$ aus (28′) zu entnehmen sind, und dann die endliche Transformation (15), so ergiebt sich die Transformation (18). Kehren wir daher zu den ursprünglichen Veränderlichen: $x_1 \ldots x_n$

zurück und setzen wir wieder: $\lambda_k t = e_k$ und: $t \,.\, \delta\lambda_k = \delta e_k$, so können wir auch sagen:

Führt man zuerst die infinitesimale Transformation mit dem Symbole:

$$\sum_1^r{}^k \delta\omega_k \,.\, X_k f = \sum_{jk}^{1\ldots r} \delta e_j \psi_{kj}(-e_1, \ldots, -e_r)\, X_k f$$

aus und dann die endliche Transformation mit dem Symbole:

$$\sum_1^r{}^k e_k X_k f, \tag{12}$$

so erhält man eine Transformation, deren Symbol die Gestalt:

$$\sum_1^r{}^k (e_k + \delta e_k) X_k f$$

besitzt.

Was die Form der Functionen: ψ_{kj} angeht, so ist Folgendes zu bemerken: Die Grössen: $\sigma_1 \ldots \sigma_m$ sind algebraische Functionen von $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ und zwar sind sie homogen von erster Ordnung, demnach enthalten $\sigma_1 t, \ldots, \sigma_m t$ die λ und t nur in den Verbindungen: $\lambda_k t = e_k$ und werden, wenn man sie durch: $e_1 \ldots e_r$ ausdrückt, die m verschiedenen Wurzeln der Gleichung:

$$\left| \varepsilon_{sk}\sigma' + \sum_1^r{}^s c_{jsk} e_j \right| = 0. \tag{29'}$$
$$(s, k = 1 \ldots r)$$

Setzen wir daher: $\sigma_\mu t = \sigma'_\mu$, so werden die $\psi_{kj}(e_1 \ldots e_r)$ lineare Functionen der m Ausdrücke:

$$c^{\sigma_1'} \ldots c^{\sigma_m'}, \tag{30'}$$

mit Coefficienten, die ihrerseits rationale Functionen von: $e_1 \ldots e_r$ und: $\sigma_1' \ldots \sigma_m'$ sind.

Jetzt sind wir aber auch im Stande die infinitesimalen Transformationen der *zweiten* Parametergruppe anzugeben. Da nämlich die Determinante der $\psi_{kj}(\lambda t)$ nicht verschwindet, so sind die r Gleichungen:

$$\delta\omega_k = \sum_1^r{}^j \delta e_j \psi_{kj}(-e_1, \ldots, -e_r) \quad (k = 1 \ldots r) \tag{28''}$$

nach: $\delta e_1 \ldots \delta e_r$ auflösbar. Wir können also bei ganz beliebigen $\delta\omega_k$ stets die Transformation: $\Sigma(e_k + \delta e_k) X_k f$ berechnen, die durch Nacheinanderausführung der beiden Transformationen: $\Sigma \delta\omega_k X_k f$ und: $\Sigma e_k X_k f$ entsteht; die betreffenden Werthe von: $\delta e_1 \ldots \delta e_r$ stellen dann nach S. 644 die unendlich kleinen Zuwachse dar, die $e_1 \ldots e_r$

bei der allgemeinen infinitesimalen Transformation der zweiten Parametergruppe erhalten.

Um die Auflösung der Gleichungen (28″) durchzuführen, denken wir uns r^2 Functionen: $\alpha_{kj}(e_1 \dots e_r)$ aus den r^2 Gleichungen:

$$(32) \qquad \sum_1^r{}_k \alpha_{ks}(e_1 \dots e_r)\psi_{kj}(e_1 \dots e_r) = \varepsilon_{sj} \qquad (s, j = 1 \dots r)$$

berechnet. Diese Functionen werden in Folge der Beschaffenheit der ψ_{kj} rationale Functionen von: $e_1 \dots e_r$, $\sigma_1' \dots \sigma_m'$ und den Grössen (30′); mit ihrer Hülfe lassen sich die Auflösungen der Gleichungen (28″) in der Form:

$$(33) \qquad \delta e_s = \sum_1^r{}_k \delta\omega_k \alpha_{ks}(-e_1, \dots, -e_r) \qquad (s = 1 \dots r)$$

darstellen und es sind demnach:

$$(34) \qquad B_k f = \sum_1^r{}_s \alpha_{ks}(-e_1, \dots, -e_r)\frac{\partial f}{\partial e_s} \qquad (k = 1 \dots r)$$

infinitesimale Transformationen der *zweiten* Parametergruppe. Dass diese infinitesimalen Transformationen von einander unabhängig sind, ist von vornherein sicher, es folgt aber auch daraus, dass die Determinante der ψ_{kj} und also auch die der α_{ks} nicht identisch verschwindet.

§ 125.

Nunmehr wollen wir die infinitesimalen Transformationen der *ersten* Parametergruppe der Gruppe (11) berechnen. Dabei können wir uns etwas kürzer fassen als bei der *zweiten*.

Wir denken uns die Veränderlichen: $y_1 \dots y_n$ so gewählt wie auf S. 644, führen aber nun zuerst die endliche Transformation:

$$(15) \qquad y_1' = y_1, \dots, y_{n-1}' = y_{n-1}, \quad y_n' = y_n + t$$

aus und dann die infinitesimale: $\Sigma\delta\bar{\omega}_k X_k f$, so dass wir die Transformation:

$$(35) \qquad \begin{cases} y_n' = y_n + t + \sum_1^r{}_k \delta\bar{\omega}_k \eta_{kn}(y_1 \dots y_{n-1}, y_n + t) \\ y_i' = y_i \qquad + \sum_1^r{}_k \delta\bar{\omega}_k \eta_{ki}(y_1 \dots y_{n-1}, y_n + t) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (i = 1 \dots n-1) \end{cases}$$

erhalten. Die $\delta\bar{\omega}_k$ suchen wir so zu wählen, dass diese Transformation das Symbol: $t\Sigma(\lambda_k + \delta\lambda_k)X_k f$ und also die Form (18) erhält.

Zu diesem Zwecke ist es nöthig, die Gleichungen:

$$(36)\qquad \begin{cases} \sum_1^r{}_k \delta\bar{\omega}_k \eta_{ki}(y_1 \dots y_{n-1},\ y_n + t) = \\ = \sum_1^r{}_k \delta\lambda_k \int_0^t \eta_{ki}(y_1 \dots y_{n-1},\ y_n + t)\, dt \end{cases}$$

durch geeignete Wahl der $\delta\bar{\omega}_k$ zu befriedigen.

Wir erinnern zu diesem Zwecke an die Identitäten (20′) und (20″), vermöge deren die Gleichungen (36) offenbar die Form:

$$\sum_{kj}^{1\dots r} \delta\bar{\omega}_j \varrho_{kj}(-\lambda_1 t, \dots, -\lambda_r t)\, \eta_{ki}(y_1 \dots y_n) =$$

$$= \sum_{kj}^{1\dots r} t\, \delta\lambda_j \psi_{kj}(-\lambda_1 t_1, \dots, -\lambda_r t)\, \eta_{ki}(y_1 \dots y_n)$$

annehmen. Wegen der Unabhängigkeit der infinitesimalen Transformationen: $X_1 f \dots X_r f$ ergiebt sich hieraus:

$$(37)\qquad \left\{ \sum_1^r{}_j \delta\bar{\omega}_j \varrho_{kj}(-\lambda_1 t, \dots, -\lambda_r t) = \sum_1^r{}_j t\, \delta\lambda_j \psi_{kj}(-\lambda_1 t, \dots -\lambda_r t) \right.$$
$$(k = 1 \dots r).$$

Um diese Gleichungen nach den $\delta\bar{\omega}_j$ aufzulösen, bemerken wir, dass man durch Auflösung der Gleichungen (26) erhält:

$$(26')\qquad c_k = \sum_1^r{}_j \varrho_{kj}(-\lambda_1 t, \dots, -\lambda_r t)\, e_j' \qquad (k = 1 \dots r);$$

wir schliessen daraus, dass sich die Auflösungen der Gleichungen (37) in der Form:

$$(37')\qquad \left\{ \delta\bar{\omega}_k = \sum_{j\tau}^{1\dots r} t\, \delta\lambda_j \psi_{\tau j}(-\lambda_1 t, \dots, -\lambda_r t)\, \varrho_{k\tau}(\lambda_1 t, \dots, \lambda_r t) \right.$$
$$(k = 1 \dots r)$$

darstellen lassen.

Hiermit wären die $\delta\bar{\omega}_k$ gefunden, wir wollen aber gleich noch eine andre Darstellung für sie ableiten.

Wir differentiiren die Gleichungen (36) nach t, indem wir die $\delta\bar{\omega}_k$ als Functionen von t und die $\delta\lambda_k$ als Constanten betrachten:

$$\sum_1^r{}_k \frac{\partial \delta \bar{\omega}_k}{\partial t} \eta_{ki}(y_1 \ldots y_{n-1},\ y_n + t) +$$

$$+ \sum_1^r{}_k \delta \bar{\omega}_k \frac{\partial}{\partial t} \eta_{ki}(y_1 \ldots y_{n-1},\ y_n + t) =$$

$$= \sum_1^r{}_k \delta \lambda_k \eta_{ki}(y_1 \ldots y_{n-1},\ y_n + t).$$

Drückt man hier den Differentialquotienten von η_{ki} vermöge (23) aus, so ergeben sich Gleichungen, die sich ohne Weiteres in die folgenden zerlegen:

$$\frac{\partial \delta \bar{\omega}_k}{\partial t} = \delta \lambda_k - \sum_1^r{}_j \lambda_j \sum_1^r{}_s c_{jsk} \delta \bar{\omega}_s \quad (k = 1 \ldots r). \tag{38}$$

Durch diese Differentialgleichungen zusammen mit den Anfangsbedingungen: $\delta \bar{\omega}_k = 0$ für $t = 0$ sind die $\delta \bar{\omega}_k$ offenbar vollständig bestimmt.

Die Integration der Differentialgleichungen (38) ist sehr leicht durchzuführen. Differentiirt man nämlich nach t, so kommt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \delta \bar{\omega}_k}{\partial t} + \sum_1^r{}_j \lambda_j \sum_1^r{}_s c_{jsk} \frac{\partial \delta \bar{\omega}_s}{\partial t} = 0 \quad (k = 1 \ldots r),$$

was genau die Differentialgleichungen (25) sind; da sich nun aus (38) ergiebt:

$$\left[\frac{\partial \delta \omega_k}{\partial t}\right]_{t=0} = \delta \lambda_k,$$

so kommt einfach:

$$\frac{\partial \delta \bar{\omega}_k}{\partial t} = \sum_1^r{}_j \varrho_{kj}(\lambda_1 t, \ldots, \lambda_r t)\, \delta \lambda_j$$

und mit Benutzung von (31):

$$\delta \bar{\omega}_k = \sum_1^r{}_j t \delta \lambda_j \psi_{kj}(\lambda_1 t, \ldots, \lambda_r t), \tag{37''}$$

Gleichungen, die ganz den früher für die $\delta \omega_k$ gefundenen Gleichungen (28′) entsprechen.

Kehren wir jetzt zu den ursprünglichen Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$ zurück und setzen wir wieder: $\lambda_k t = e_k$ und: $t \delta \lambda_k = \delta e_k$, so können wir alles das so ausdrücken:

Führt man zuerst die endliche Transformation mit dem Symbole:

(12) $$\sum_1^r{}^k e_k X_k f$$

aus und dann die infinitesimale Transformation mit dem Symbole:

$$\sum_1^r{}^k \delta\bar{\omega}_k X_k f = \sum_{jk}^{1\ldots r} \delta e_j \psi_{kj}(e_1 \ldots e_r) X_k f,$$

so erhält man eine Transformation, die das Symbol:

$$\sum_1^r{}^k (e_k + \delta e_k) X_k f$$

besitzt.

Nach S. 641 erhalten wir daher die infinitesimalen Transformationen der *ersten* Parametergruppe, wenn wir hier $\delta\bar{\omega}_1 \ldots \delta\bar{\omega}_r$ als willkürliche unendliche kleine Grössen betrachten und $\delta e_1 \ldots \delta e_r$ durch sie ausdrücken. Das ist aber leicht gemacht. Die Auflösungen der Gleichungen:

(39) $$\delta\bar{\omega}_k = \sum_1^r{}^j \delta e_j \psi_{kj}(e_1 \ldots e_r) \quad (k = 1 \ldots r)$$

lauten nämlich offenbar:

(39′) $$\delta e_j = \sum_1^r{}^k \delta\bar{\omega}_k \alpha_{kj}(e_1 \ldots e_r) \quad (j = 1 \ldots r)$$

und es sind demnach:

(40) $$A_k f = \sum_1^r{}^j \alpha_{kj}(e_1 \ldots e_r) \frac{\partial f}{\partial e_j} \quad (k = 1 \ldots r)$$

r unabhängige infinitesimale Transformationen der *ersten* Parametergruppe.

§ 126.

Die gewünschten infinitesimalen Transformationen der zwei Parametergruppen der Gruppe (11) sind jetzt gefunden. Es ist nun zwar von vornherein sicher, dass diese Parametergruppen beide die Zusammensetzung c_{iks} besitzen, es empfiehlt sich aber doch, das sichtbar zu machen, indem man ermittelt, wie sich die $(A_i A_k)$ aus den $A_s f$ und die $(B_i B_k)$ aus den $B_s f$ linear zusammensetzen. Das lässt sich folgendermassen bewerkstelligen:

Bezeichnen wir die allgemeine Transformation: $\Sigma e_k X_k f$ der Gruppe (11) mit $S_{(e)}$, so können wir, wie oben gezeigt wurde, jede $S_{(e)}$ unendlich benachbarte Transformation: $S_{(e+\delta e)}$ dadurch erhalten, dass wir zuerst $S_{(e)}$ und dann die infinitesimale Transformation:

$$\sum_{jk}^{1\ldots r} \delta e_j \psi_{kj}(e) X_k f$$

ausführen. Nach S. 554 f. kommt das darauf hinaus, dass die x_i' in den Gleichungen:

$$x_i' = x_i + \sum_1^r{}^k e_k \xi_{ki}(x) + \cdots \quad (i = 1 \ldots n)$$

der Transformation $S_{(e)}$ den Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial x_i'}{\partial e_k} = \sum_1^r{}^j \psi_{jk}(e)\, \xi_{ji}(x')$$

genügen. Diese Differentialgleichungen aber lassen sich wegen (32) auch so schreiben:

$$\xi_{ki}(x') = \sum_1^r{}^j \alpha_{kj}(e) \frac{\partial x_i'}{\partial e_j};$$

da nun: $X_1 f \ldots X_r f$ nach unsrer Voraussetzung in den Beziehungen:

$$(X_i X_k) = \sum_1^r{}^s c_{iks} X_s f$$

stehen, so ergiebt sich hieraus nach S. 582, dass: $A_1 f \ldots A_r f$ die Gleichungen:

$$(41) \qquad (A_i A_k) = \sum_1^r{}^s c_{iks} A_s f \quad (i, k = 1 \ldots r)$$

identisch erfüllen.

Nimmt man hierzu noch die unmittelbar einleuchtende Thatsache, dass sich, sobald man: $-e_1, \ldots, -e_r$ an Stelle von $e_1 \ldots e_r$ als neue Veränderliche einführt, $A_k f$ in: $-B_k f$ verwandelt, so erkennt man, dass: $B_1 f \ldots B_r f$ ihrerseits in den Beziehungen:

$$(42) \qquad (B_i B_k) = \sum_1^r{}^s c_{kis} B_s f$$

stehen.

Endlich wollen wir noch einmal daran erinnern, dass unsre beiden Parametergruppen reciproke einfach transitive Gruppen sind, dass also die Gleichungen:

$$(43) \qquad (A_i B_k) = 0 \quad (i, k = 1 \ldots r)$$

identisch bestehen. Zugleich mag erwähnt werden, dass wir ihre infinitesimalen Transformationen gerade in der Form gefunden haben, die wir auf S. 379 von Abschn. I für die infinitesimalen Transformationen zweier beliebiger reciproker einfach transitiver Gruppen angenommen haben.

§ 127.

Wir kennen also jetzt die infinitesimalen Transformationen der beiden Parametergruppen, die zu der Gruppe (11) auf S. 643 gehören. Bei der Bestimmung dieser infinitesimalen Transformationen haben wir nur vorausgesetzt, dass die infinitesimalen Transformationen: $X_1 f \ldots X_r f$ der Gruppe (11) in den Beziehungen:

$$(2) \qquad (X_i X_k) = \sum_1^r{}_s c_{iks} X_s f \qquad (i, k = 1 \ldots r)$$

stehen und dass die Gruppe (11) die kanonische Form besitzt. Dagegen nahmen wir keineswegs an, dass uns r unabhängige infinitesimale Transformationen: $X_1 f \ldots X_r f$ von jener Beschaffenheit gegeben waren, sondern wir stützten uns nur auf den früher bewiesenen Satz, dass es stets, wenn die c_{iks} die Gleichungen (1) erfüllen, r solche infinitesimale Transformationen: $X_1 f \ldots X_r f$ giebt.

Nun sind die Ausdrücke, die wir für die infinitesimalen Transformationen unsrer beiden Parametergruppen gefunden haben, offenbar von der besondern Form der infinitesimalen Transformationen: $X_1 f \ldots X_r f$ ganz unabhängig, denn sie sind ja durch die Werthe der Constanten c_{iks} vollständig bestimmt. Demnach sehen wir, dass überhaupt jede r-gliedrige Gruppe von der Form (11), deren infinitesimale Transformationen: $X_1 f \ldots X_r f$ in den Beziehungen (2) stehen, die von uns gefundenen Gruppen zu Parametergruppen hat. Hierin liegt, dass unsre jetzigen Entwicklungen zugleich einen neuen Beweis für den Satz 1 auf S. 414 f. von Abschn. I enthalten; nur leisten sie natürlich viel mehr, da sie ausserdem nicht blos für die in diesem Satze erwähnte *erste* Parametergruppe die infinitesimalen Transformationen finden lehren, sondern auch für die *zweite*.

Da die beiden von uns gefundenen Parametergruppen zu einer r-gliedrigen Gruppe gehören, die die kanonische Form besitzt, so wollen wir sie als *kanonische Parametergruppen* bezeichnen. In diesem Sinne gehören allerdings zu jeder r-gliedrigen Gruppe unendlich viele Paare von kanonischen Parametergruppen, nämlich ebensoviele als die Gruppe kanonische Formen besitzt. Da aber aus einer kanonischen Form einer r-gliedrigen Gruppe jede andre durch eine lineare homogene Transformation der Parameter der Gruppe erhalten wird (s. S. 608 f.), so ist klar, dass man aus einem vorgelegten Paare von kanonischen Parametergruppen einer r-gliedrigen Gruppe jedes andre Paar dadurch ableiten kann, dass man in den beiden vorgelegten Parametergruppen

die Veränderlichen: $e_1 \dots e_r$ einer linearen homogenen Transformation unterwirft.

Aus dem oben Gesagten geht nun hervor, dass jedes Paar von kanonischen Parametergruppen einer r-gliedrigen Gruppe zugleich für jede andre r-gliedrige Gruppe von der betreffenden Zusammensetzung ein Paar von kanonischen Parametergruppen ist. Hierin liegt, dass die kanonischen Parametergruppen jeder r-gliedrigen Gruppe eine von der besondern Form dieser Gruppe ganz unabhängige Existenz haben und dass sie nur von der Zusammensetzung der betreffenden Gruppe abhängen. Wir können daher auch sagen:

Zu jeder Zusammensetzung, die eine r-gliedrige Gruppe haben kann, gehören unendlich viele Paare von kanonischen Parametergruppen. Kennt man ein solches Paar, so findet man alle andern, indem man die Veränderlichen der beiden bekannten kanonischen Parametergruppen in allgemeinster Weise linear und homogen transformirt.

Die unendlich vielen Paare von kanonischen Parametergruppen, die hier auftreten, entsprechen den unendlich vielen verschiedenen analytischen Darstellungen, die es für die Zusammensetzung einer jeden r-gliedrigen Gruppe giebt. Nach Abschn. I, S. 289 f. ist ja die Zusammensetzung einer r-gliedrigen Gruppe durch die Constanten c_{iks} in den Relationen (2) bestimmt, es giebt aber im Allgemeinen unendlich viele verschiedene Systeme von c_{iks}, die dieselbe Zusammensetzung bestimmen. Unsre obigen Entwicklungen zeigen nun, dass jedes dieser Systeme von c_{iks} ein ganz bestimmtes Paar von kanonischen Parametergruppen liefert. Ueberdies erhält man augenscheinlich alle Paare von kanonischen Parametergruppen, die zu einer bestimmten Zusammensetzung gehören, wenn man sich zu jedem einzelnen Systeme von c_{iks}, das die betreffende Zusammensetzung darstellt, das zugehörige Paar von kanonischen Parametergruppen aufgestellt denkt.

Wir fassen jetzt noch die Ergebnisse der letzten Paragraphen zusammen in dem

Theorem 52. *Kennt man ein System von r^3 Constanten c_{iks}, das die Gleichungen:*

$$(1) \qquad \begin{cases} c_{iks} + c_{kis} = 0 \\ \sum_1^r \{ c_{ik\tau} c_{\tau js} + c_{kj\tau} c_{\tau is} + c_{ji\tau} c_{\tau ks} \} = 0 \\ (i,k,j,s = 1 \dots r) \end{cases}$$

befriedigt und also nach dem dritten Fundamentalsatze (s. S. 597) *die Zusammensetzung gewisser r-gliedriger Gruppen darstellt,*

so braucht man blos eine algebraische Gleichung aufzulösen, um die infinitesimalen Transformationen zweier r-gliedriger reciproker einfach transitiver Gruppen von der Zusammensetzung c_{iks} aufstellen zu können. Wählt man r Grössen: $e_1 \dots e_r$ zu Veränderlichen, so wird die aufzulösende Gleichung durch Nullsetzen der Determinante:

$$\left| \varepsilon_{ks}\sigma' + \sum_{j}^{1\dots r} c_{jks} e_j \right|_{(k,\, s = 1 \dots r)}$$

erhalten, wo ε_{ks} wie gewöhnlich gleich 0 oder 1 ist, jenachdem k und s von einander verschieden oder gleich sind. Bezeichnet man nun die von einander verschiedenen Wurzeln dieser Gleichung mit: $\sigma_1' \dots \sigma_m'$, so haben die infinitesimalen Transformationen der ersten von den beiden gewünschten einfach transitiven Gruppen die Form:

$$(40) \qquad A_k f = \sum_{1}^{r}{}_j \alpha_{kj}(e_1 \dots e_r) \frac{\partial f}{\partial e_j} \quad (k = 1 \dots r),$$

wo die $\alpha_{kj}(e)$ gewisse rationale Functionen von: $e_1 \dots e_r$, von $\sigma_1' \dots \sigma_m'$ und von:

$$e^{\sigma_1'} \dots e^{\sigma_m'}$$

sind; andrerseits haben die infinitesimalen Transformationen der reciproken einfach transitiven Gruppe die Form:

$$(34) \qquad B_k f = \sum_{1}^{r}{}_j \alpha_{kj}(-e_1, \dots, -e_r) \frac{\partial f}{\partial e_j} \quad (k = 1 \dots r).$$

Die beiden Gruppen: $A_1 f \dots A_r f$ und $B_1 f \dots B_r f$ sind durch das gegebene System von c_{iks} vollständig bestimmt und bilden eines der zu der Zusammensetzung c_{iks} gehörigen Paare von kanonischen Parametergruppen.

§ 128.

Bevor wir unsre Ergebnisse auf die Bestimmung der r-gliedrigen transitiven Gruppen von gegebener Zusammensetzung anwenden, wollen wir noch einen Paragraphen einschalten.

Wir erwähnten schon auf S. 591 den ersten Beweis, den Lie für den zweiten Theil des zweiten Fundamentalsatzes veröffentlicht hat, und bemerkten, dass dieser Beweis auf gewissen Betrachtungen beruhe, die im gegenwärtigen Kapitel Verwerthung finden sollten. Gemeint waren damit die Betrachtungen des § 124, die — nach unsrer jetzigen

Ausdrucksweise — zur Bestimmung der infinitesimalen Transformationen der zweiten Parametergruppe führen. Wenn nun auch diese Betrachtungen hier in erster Linie zu andern Zwecken entwickelt sind als zu dem, die Grundlage für einen abermaligen Beweis der zweiten Hälfte des zweiten Fundamentalsatzes zu bilden, so kann es doch nur nützlich sein, wenn wir zeigen, dass sie auch zu diesem Zwecke sehr geeignet sind. Wir werden deshalb den Gedankengang jenes ältesten Beweises, den Lie für den erwähnten Satz geliefert hat, kurz wiedergeben*).

Wir denken uns in n Veränderlichen: $x_1 \dots x_n$ irgend r unabhängige infinitesimale Transformationen: $X_1 f \dots X_r f$ vorgelegt, die in den Beziehungen:

$$(X_i X_k) = \sum_1^r {}_s\, c_{iks} X_s f \qquad (i, k = 1 \dots r) \tag{2}$$

stehen. Um nun zu beweisen, dass unter dieser Voraussetzung die Schaar der Transformationen:

$$\left\{ x_i' = x_i + \sum_k^{1 \dots r} c_k \xi_{ki}(x) + \frac{1}{1 \cdot 2} \sum_{kj}^{1 \dots r} e_k e_j X_k \xi_{ji} + \cdots \right. \qquad (i = 1 \dots n) \tag{44}$$

eine Gruppe bildet, verfahren wir folgendermassen**):

Wir zeigen zunächst, dass man, wenn man erst die infinitesimale Transformation: $\Sigma \delta\omega_k X_k f$ und dann die Transformation: $\Sigma e_k X_k f$ ausführt, eine Transformation mit dem Symbole: $\Sigma(e_k + \delta e_k) X_k f$ erhält, wo die δe_k berechnet werden können. Der Beweis hierfür gestaltet sich ganz genau so wie in § 124, denn obwohl wir es damals als bekannt voraussetzten, dass die Schaar (44) eine Gruppe bildet, haben wir doch in § 124 von dieser unsrer Kenntniss gar keinen Gebrauch gemacht.

Erlauben wir uns mit den Symbolen: $\Sigma e_k X_k f$ u. s. w. ebenso zu

*) Die folgenden Auseinandersetzungen werden zeigen, dass der Liesche Beweis, wie wir auf S. 591 behaupteten, streng ist. Allerdings ist zu bemerken, dass er in der Fassung, die ihm Lie damals gegeben hat, dem Verständnisse einige Schwierigkeiten bereitet, weil die Bezeichnungen an Durchsichtigkeit zu wünschen übrig lassen. Auch ein kleines Versehen findet sich; es ist nämlich an einer Stelle (Archiv for Math. og Naturv. Bd. III, S. 98) die Reihenfolge zweier Transformationen, die nach einander ausgeführt werden, verwechselt, aber dieses Versehen hat auf die Strenge des Beweises selbst gar keinen Einfluss.

**) Wir wenden hier natürlich überall die uns jetzt geläufigen Bezeichnungen an, insbesondere benutzen wir daher den Ausdruck: $\Sigma e_k X_k f$ als Symbol für die Transformation (44), denn dieses Symbol bleibt offenbar auch noch in dem Falle anwendbar, dass die Schaar der Transformationen (44) keine Gruppe bildet.

rechnen wie die Substitutionentheorie mit den Symbolen: $S, T \ldots$ einzelner Substitutionen, so können wir unser Ergebniss durch die symbolische Gleichung:

$$(45) \qquad \sum \delta\omega_k X_k f \,.\, \sum e_k X_k f = \sum (e_k + \delta e_k) X_k f$$

ausdrücken, wo die δe_k aus den $\delta\omega_k$ mit Hülfe der Gleichungen:

$$(46) \qquad \delta e_j = \sum_1^r{}^k \delta\omega_k \alpha_{kj}(-e_1, \ldots, -e_r) \quad (j = 1 \ldots r)$$

zu berechnen sind (s. S. 651).

Setzen wir: $\delta\omega_k = -\lambda_k \delta t$, wo die λ_k endliche Grössen sind, und berücksichtigen wir, dass die beiden infinitesimalen Transformationen: $\Sigma \delta\omega_k X_k f$ und: $-\Sigma \delta\omega_k X_k f$ zu einander invers sind, so ergiebt sich, dass die Gleichung (45) auf die Form:

$$(45') \qquad \sum \lambda_k \delta t X_k f \,.\, \sum (e_k + \delta e_k) X_k f = \sum e_k X_k f$$

gebracht werden kann, wo die Beziehung zwischen den δe_k und den $\lambda_k \delta t$ durch die Gleichungen:

$$(46') \qquad \delta e_j = -\delta t \sum_1^r{}^k \lambda_k \alpha_{kj}(-e_1, \ldots, -e_r) \quad (j = 1 \ldots r)$$

bestimmt ist. Erinnern wir uns endlich, dass die Schaar der ∞^1 Transformationen: $\Sigma \lambda_k t X_k f$ mit dem willkürlichen Parameter t eine eingliedrige Gruppe bildet, dass also die Gleichung:

$$\sum \lambda_k t X_k f \,.\, \sum \lambda_k \delta t X_k f = \sum \lambda_k (t + \delta t) X_k f$$

besteht, so erkennen wir, dass aus (45′) die Gleichung:

$$(47) \qquad \sum \lambda_k (t + \delta t) X_k f \,.\, \sum (e_k + \delta e_k) X_k f = \sum \lambda_k t X_k f \,.\, \sum e_k X_k f$$

folgt.

Nunmehr fassen wir die Gleichungen (46′) als ein simultanes System auf und denken uns aus ihnen: $e_1 \ldots e_r$ als Functionen von t bestimmt, etwa mit Hülfe der Anfangsbedingungen: $e_k = e_k^0$ für: $t = 0$; dabei möge sich ergeben:

$$(48) \qquad e_k = \vartheta_k(\lambda_1 t, \ldots, \lambda_r t;\ e_1^0 \ldots e_r^0) \quad (k = 1 \ldots r).$$

Setzen wir diese Werthe der e_k in die Transformation:

$$(49) \qquad \sum \lambda_k t X_k f \,.\, \sum e_k X_k f$$

ein, so wird diese, wie die Gleichung (47) zeigt, von t unabhängig; wir können daher, ohne die Transformation (49) zu ändern, t den Werth Null ertheilen und erhalten so die Gleichung:

$$(50) \qquad \sum \lambda_k t X_k f \,.\, \sum e_k X_k f = \sum e_k^0 X_k f,$$

denn die Transformation: $\Sigma \lambda_k t X_k f$ fällt für: $t = 0$ mit der identischen Transformation zusammen.

Die Gleichung (50) wird durch die Substitution (48) identisch erfüllt. Nun aber lassen sich die Gleichungen (48) auch nach: $e_1^0 \ldots e_r^0$ auflösen und zwar lauten ihre Auflösungen einfach:

$$(48') \qquad e_k^0 = \vartheta_k(-\lambda_1 t, \ldots, -\lambda_r t;\ e_1, \ldots, e_r) \quad (k = 1 \ldots r)$$

(s. Abschn. I, S. 82 f.); demnach wird die Gleichung (50) auch dann zu einer Identität, wenn man rechts für: $e_1^0 \ldots e_r^0$ ihre aus (48′) folgenden Werthe einsetzt. Da alles das bei ganz beliebiger Wahl der $\lambda_k t$ und der e_k gilt, so ist hiermit bewiesen, dass zwei beliebige Transformationen der Schaar (44) nach einander ausgeführt stets wieder eine dieser Schaar angehörige Transformation liefern, dass also die Schaar (44) unter den gemachten Voraussetzungen eine Gruppe bildet.

Der vorstehende Beweis für den zweiten Theil des Fundamentalsatzes stammt, wie gesagt, aus dem Jahre 1878. Er zeichnet sich dadurch aus, dass er nur mit der kanonischen Form der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ operirt. So verschieden er nun auch von dem in Abschnitt I gelieferten Beweise zu sein scheint, so ist doch leicht zu sehen, dass beide Beweise im Grunde ziemlich nahe verwandt sind. Der Beweis in Abschnitt I beruht nämlich — so können wir es jetzt ausdrücken — auf der Bildung von r unabhängigen infinitesimalen Transformationen, die eine einfach transitive Gruppe von der Zusammensetzung c_{iks} erzeugen, unser jetziger Beweis aber beruht ebenfalls auf der Bildung von r solchen infinitesimalen Transformationen, nur sind es hier infinitesimale Transformationen von ganz besonderer Beschaffenheit, nämlich die der zweiten kanonischen Parametergruppe der Gruppe (44).

Wir wollen schliesslich noch erwähnen, dass unser jetziger Beweis unmittelbar auf den Fall anwendbar ist, dass die r infinitesimalen Transformationen: $X_1 f \ldots X_r f$, die in den Beziehungen:

$$(2) \qquad (X_i X_k) = \sum_1^r{}^s c_{iks} X_s f \quad (i, k = 1 \ldots r)$$

stehen, nicht von einander unabhängig sind. Die Betrachtungen des § 124 bleiben nämlich in allen wesentlichen Punkten auch für diesen Fall gültig und es sind nur ganz wenige formelle Aenderungen erforderlich. Hieraus geht hervor, dass man den eben geführten Beweis

auch benutzen kann, um die Uebereinstimmung zwischen den beiden Definitionen des meroedrischen Isomorphismus endlicher continuirlicher Gruppen in neuer Weise zu begründen (s. Abschn. I, Kap. 17 u. 21).

§ 129.

Wir wenden uns jetzt zur Erledigung der eigentlichen Aufgabe unsers Kapitels. Wir denken uns also r^3 Constanten c_{iks} vorgelegt, die den Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} c_{iks} + c_{kis} = 0 \\ \sum_{1}^{r}{}_{\tau} \left(c_{ik\tau}c_{\tau js} + c_{kj\tau}c_{\tau is} + c_{ji\tau}c_{\tau ks}\right) = 0 \\ (i, k, j, s = 1 \ldots r) \end{cases}$$

genügen, und suchen alle r-gliedrigen transitiven Gruppen von der Zusammensetzung c_{iks}.

Nach Anleitung der §§ 124 und 125 bestimmen wir zunächst die infinitesimalen Transformationen zweier r-gliedriger reciproker einfach transitiver Gruppen von der Zusammensetzung c_{iks}. Dazu ist, wie wir wissen, nur die Auflösung einer algebraischen Gleichung erforderlich; wir können daher die infinitesimalen Transformationen dieser beiden Gruppen als bekannt voraussetzen und annehmen, dass die der ersten die Form:

$$(40)\qquad A_k f = \sum_{1}^{r}{}_{j} \alpha_{kj}(e_1 \ldots e_r) \frac{\partial f}{\partial e_j} \quad (k = 1 \ldots r)$$

haben, während die der zweiten die Gestalt:

$$(34)\qquad B_k f = \sum_{1}^{r}{}_{j} \alpha_{kj}(-e_1, \ldots, -e_r) \frac{\partial f}{\partial e_j} \quad (k = 1 \ldots r)$$

besitzen.

Wollen wir nun für jeden Typus r-gliedriger transitiver Gruppen von der Zusammensetzung c_{iks} einen Repräsentanten haben, so ist, wie sich aus Kap. 22 von Abschn. I ergiebt, nur nöthig, dass wir die folgende Aufgabe lösen können: *Gegeben sind m unabhängige infinitesimale Transformationen:*

$$C_\mu f = \sum_{1}^{r}{}_{k} h_{\mu k} B_k f \quad (\mu = 1 \ldots m)$$

irgend einer m-gliedrigen Untergruppe der Gruppe: $B_1 f \ldots B_r f$, gesucht werden die Invarianten dieser Untergruppe, also mit andern Worten irgend $r - m$ unabhängige Lösungen des m-gliedrigen vollständigen Systems:

$$(51)\qquad C_1 f = 0, \ldots, C_m f = 0.$$

Sind nämlich: $u_1(e) \dots u_{r-m}(e)$ irgend $r-m$ unabhängige Lösungen dieses vollständigen Systems, so sind die $r(r-m)$ Ausdrücke: $A_k u_\nu$ Functionen von: $u_1 \dots u_{r-m}$ allein und die r infinitesimalen Transformationen:

$$(52) \qquad \left\{ \sum_1^{r-m} A_k u_\nu \frac{\partial f}{\partial u_\nu} = \sum_1^{r-m} \omega_{k\nu}(u_1 \dots u_{r-m}) \frac{\partial f}{\partial u_\nu} = U_k f \right. \quad (k = 1 \dots r)$$

erzeugen in den $r-m$ Veränderlichen: $u_1 \dots u_{r-m}$ eine transitive Gruppe, die, wenn sie r-gliedrig ist, die gegebene Zusammensetzung c_{iks} besitzt (s. Abschn. I, Theor. 78, S. 439). Ueberdies kann man (a. a. O. Theor. 79, S. 443) durch geeignete Wahl der Untergruppe: $C_1 f \dots C_m f$ stets erreichen, dass die Gruppe (52) mit jeder beliebigen r-gliedrigen transitiven Gruppe von der Zusammensetzung c_{iks} ähnlich wird. Da nun die Bestimmung der infinitesimalen Transformationen aller Untergruppen der Gruppe: $B_1 f \dots B_r f$ nur algebraische Operationen erfordert (a. a. O. Theor. 33, S. 210), so ist klar, dass wir die infinitesimalen Transformationen jeder r-gliedrigen transitiven Gruppe von der Zusammensetzung c_{iks} sofort angeben können, sobald es uns gelingt, die oben ausgesprochene Aufgabe für jede beliebige Untergruppe: $C_1 f \dots C_m f$ der Gruppe (34) zu lösen.

Die Lösung der in Rede stehenden Aufgabe ist äusserst einfach. Da nämlich die infinitesimalen Transformationen (40) und (34), die uns bekannt sind, zwei reciproke einfach transitive Gruppen erzeugen, so ist es nach Theor. 51, S. 634 möglich, die endlichen Gleichungen jeder dieser beiden Gruppen in kanonischer Form aufzustellen, und zwar sind dazu ausser algebraischen Operationen und Eliminationen nur noch soviele von einander unabhängige Quadraturen erforderlich, als die Gruppe (40) unabhängige ausgezeichnete infinitesimale Transformationen enthält. Wir können also annehmen, dass uns die endlichen Gleichungen jeder der beiden Gruppen (40) und (34) bekannt sind und zwar in der kanonischen Form.

Nunmehr sind wir aber nach S. 624 f. sofort im Stande, auch die endlichen Gleichungen der Untergruppe: $C_1 f \dots C_m f$ der Gruppe (34) aufzustellen und zwar ebenfalls in kanonischer Form; die Invarianten: $u_1 \dots u_{r-m}$ dieser Untergruppe finden wir dann in bekannter Weise durch Elimination. Sind endlich diese Invarianten gefunden, so erhalten wir wieder durch Elimination die infinitesimalen Transformationen der Gruppe (52).

Aber wir brauchen uns nicht mit den infinitesimalen Transfor-

mationen dieser Gruppe zu begnügen, wir können auch ihre endlichen Transformationen angeben.

In der That, sind:

$$e_k' = \mathfrak{A}_k(e_1 \ldots e_r;\ \lambda_1 \ldots \lambda_r) \quad (k = 1 \ldots r) \tag{53}$$

die endlichen Gleichungen der Gruppe (40), die wir nach dem Obigen als bekannt voraussetzen können, so müssen die $r - m$ Ausdrücke:

$$u_1(e_1' \ldots e_r') \ldots u_{r-m}(e_1' \ldots e_r')$$

bei der Substitution (53) eine solche Form erhalten, dass sie sich durch: $u_1(e) \ldots u_{r-m}(e)$ und $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ allein ausdrücken lassen, es müssen also vermöge (53) Relationen von der Form:

$$u_v(e') = \Omega_v(u_1(e) \ldots u_{r-m}(e);\ \lambda_1 \ldots \lambda_r) \quad (v = 1 \ldots r - m)$$

bestehen. Denkt man sich diese Relationen aufgestellt, was wiederum nur Eliminationen erfordert, so sind offenbar:

$$u_v' = \Omega_v(u_1 \ldots u_{r-m};\ \lambda_1 \ldots \lambda_r) \quad (v = 1 \ldots r - m) \tag{54}$$

die endlichen Gleichungen der Gruppe (52) und zwar ebenfalls in der kanonischen Form.

Wir können daher jetzt unter Berücksichtigung der Ergebnisse des Kap. 22 von Abschn. I das Theorem aussprechen:

Theorem 53. *Kennt man ein System von r^3 Constanten c_{iks}, das die Gleichungen:*

$$\left\{\begin{array}{c} c_{iks} + c_{kis} = 0 \\ \sum_1^r (c_{ik\tau}c_{\tau js} + c_{kj\tau}c_{\tau is} + c_{ji\tau}c_{\tau ks}) = 0 \\ (i, k, j, s = 1 \ldots r) \end{array}\right. \tag{1}$$

befriedigt und also eine mögliche Zusammensetzung einer r-gliedrigen Gruppe darstellt, so kann man stets durch sogenannte ausführbare Operationen die infinitesimalen Transformationen und auch die endlichen Gleichungen aller r-gliedrigen transitiven Gruppen von der Zusammensetzung c_{iks} aufstellen; die dazu erforderlichen ausführbaren Operationen sind erstens gewisse algebraische Operationen, zweitens gewisse Eliminationen und drittens soviele von einander unabhängige Quadraturen, als eine r-gliedrige Gruppe von der Zusammensetzung c_{iks} unabhängige ausgezeichnete infinitesimale Transformationen enthält. Man kann es insbesondere stets so einrichten, dass man für jeden Typus r-gliedriger Gruppen von der Zusammensetzung c_{iks} eine und nur eine Gruppe als Repräsentanten erhält

und dass man die endlichen Gleichungen jedes solchen Repräsentanten in kanonischer Form bekommt.

In Kapitel 29 werden wir sehen, dass die in Theorem 53 erwähnten Quadraturen erspart werden können, sobald man sich mit der Aufstellung der infinitesimalen Transformationen der gesuchten Gruppen begnügt.

Kapitel 28.

Allgemeines über die Zusammensetzung r-gliedriger Gruppen.

Der Ausgangspunkt für Lies allgemeine Untersuchungen über endliche continuirliche Gruppen war die Aufgabe: eine lineare homogene partielle Differentialgleichung erster Ordnung zu integriren, die bekannte infinitesimale Transformationen gestattet. Lie führte diese Aufgabe auf den besonderen Fall zurück, dass zwischen den bekannten infinitesimalen Transformationen Relationen von der Form:

$$(X_i X_k) = \sum_1^r{}_s c_{iks} X_s f \quad (i, k = 1 \ldots r)$$

bestehen. Damit war der Begriff der endlichen continuirlichen Gruppe gegeben und es galt nun insbesondere festzustellen, wie sich die Kenntniss von solchen infinitesimalen Transformationen, die eine vorgelegte lineare partielle Differentialgleichung invariant lassen und dabei eine endliche continuirliche Gruppe erzeugen, für die Integration dieser Differentialgleichung verwerthen lässt. Es stellte sich heraus, dass die Untersuchung über die Verwerthbarkeit der bekannten infinitesimalen Transformationen eine rein algebraische Aufgabe war, dass also die Schwierigkeit der noch erforderlichen Integrationen durch blose algebraische Operationen bestimmt werden konnte. Da die betreffenden algebraischen Operationen nur von den Constanten c_{iks} in den Relationen: $(X_i X_k) = \Sigma c_{iks} X_s f$ abhängen, so war hiermit auch der Begriff der Zusammensetzung einer endlichen continuirlichen Gruppe gegeben.

In der That, jedes Integrationsproblem, bei dem eine endliche continuirliche Gruppe auftritt, konnte auf die Integration einer Reihe von Hülfsgleichungen zurückgeführt werden, deren Ordnungen nur von der Zusammensetzung der betreffenden Gruppe abhingen. Lie wurde daher mit Nothwendigkeit darauf geführt, die endlichen con-

tinuirlichen Gruppen losgelöst von ihrer besonderen Form, blos auf ihre Zusammensetzung hin zu untersuchen, sich also auf den Standpunkt zu stellen, dass gleichzusammengesetzte Gruppen nicht als wesentlich verschieden betrachtet werden. Andrerseits behandelte er aber auch schon sehr früh die Aufgabe, alle Gruppen von gegebener Zusammensetzung zu bestimmen, und erledigte diese Aufgabe schon 1876 für die Gruppen von Berührungstransformationen*).

Auch in Lies ältesten Untersuchungen über die Transformationsgruppen der Ebene und des Raumes spielte der Begriff der Zusammensetzung und der daraus abgeleitete Begriff der adjungirten Gruppe eine sehr grosse Rolle. Als Lie in dem Jahre 1874 zum ersten Male alle endlichen Gruppen von Punkttransformationen und von Berührungstransformationen einer Ebene bestimmte, da gelangte er hauptsächlich dadurch zum Ziele, dass er eine Reihe von Sätzen über die Zusammensetzung von Gruppen und über die adjungirte Gruppe fortwährend anwendete und so schrittweise von den zwei-, drei- und viergliedrigen Gruppen zu Gruppen mit immer mehr Parametern aufstieg. Da aber das Operiren mit der adjungirten Gruppe der Darstellung nicht geringe Schwierigkeiten bereitet, indem es zu einem fortwährenden Wechseln zwischen verschiedenen Räumen nöthigt, so drängte Lie in seinen Abhandlungen nach und nach diese Methode immer mehr zurück, was ihm namentlich durch Einführung des Rechnens mit den Reihenentwicklungen der infinitesimalen Transformationen ermöglicht wurde. So kommt es, dass sich in Bd. III des norwegischen Archivs bei der Bestimmung der endlichen continuirlichen Gruppen der Ebene nur noch mehr oder minder deutliche Spuren jener älteren Methode finden und dass in Bd. 16 der Math. Annalen auch diese Spuren fast vollständig verschwunden sind. Nichtsdestoweniger benutzte Lie auch später noch in vielen Fällen jene ältere Methode, nur in seinen Veröffentlichungen trat sie sehr wenig hervor.

Es ist nicht unsre Absicht auf diese Methode einzugehen, doch werden wir einige von den Sätzen über Zusammensetzung, die Lie bei seinen ältesten gruppentheoretischen Untersuchungen fortwährend benutzte, in dem gegenwärtigen Kapitel mittheilen und zwar in Ver-

*) Norwegisches Archiv Bd. I in der 2. Abhandlung über Transformationsgruppen. Man sieht hieraus, dass Lie sich schon damals mit den beiden Problemen beschäftigte, alle Zusammensetzungen r-gliedriger Gruppen und alle r-gliedrigen Gruppen von gegebener Zusammensetzung zu bestimmen. Erst später hat Cayley auf die entsprechenden Probleme in der Theorie der Substitutionengruppen hingewiesen, uns scheint aber, dass man mit viel mehr Recht Galois und C. Jordan als die Urheber dieser substitutionentheoretischen Probleme bezeichnen kann.

bindung mit gewissen fundamentalen Sätzen über Zusammensetzung, die aus dem Jahre 1882 herrühren.

Das gegenwärtige Kapitel enthält mit einer einzigen später angegebenen Ausnahme nur solche Sätze über die Zusammensetzung, die Lie schon 1883 oder noch früher gefunden hat. Die neueren Untersuchungen über die Zusammensetzung, die von anderer Seite angestellt worden sind, werden hier nicht mit berücksichtigt, über sie werden wir in Kapitel 29 berichten.

Was die Gliederung des gegenwärtigen Kapitels anbetrifft, so ist Folgendes zu bemerken. In § 130 und 131 erinnern wir kurz an die adjungirte Gruppe und an die Untersuchungen des Abschnitts I über gewisse Gruppen, die wir jetzt integrable Gruppen nennen werden. In § 132 bestimmen wir die Zusammensetzungen aller r-gliedrigen einfachen Gruppen, deren grösste Untergruppen entweder $r-1$, oder $r-2$, oder $r-3$ Parameter haben. In § 133 und 134 entwickeln wir einige allgemeine Sätze über Untergruppen beliebiger Gruppen. In § 135 zeigen wir, dass zu jeder beliebigen Gruppe eine Reihe von Zusammensetzungen einfacher Gruppen gehört, und beweisen im Anschlusse daran einen allgemeinen Satz, der für die Integrationstheorie von der weittragendsten Bedeutung ist. Leider können wir auf die so wichtigen Beziehungen zwischen der Gruppentheorie und der Integration der Differentialgleichungen nur kurz eingehen.

Diesen allgemeinen Untersuchungen lassen wir dann noch einige von speciellerem Charakter folgen. In § 136 und 137 bestimmen wir nämlich die Zusammensetzungen aller zwei-, drei- und viergliedrigen Gruppen und in § 138 die Zusammensetzungen aller nicht integrabeln fünf- und sechsgliedrigen Gruppen.

Nach einigen Bemerkungen verschiedenen Inhalts in § 139 besprechen wir in § 140 noch kurz den Zusammenhang der höheren complexen Zahlen mit der Gruppentheorie.

§ 130.

Die adjungirte Gruppe einer r-gliedrigen Gruppe haben wir in Kap. 16 von Abschn. I definirt und näher untersucht. Wir wollen aber jetzt noch einmal auf sie zurückkommen und die früheren Betrachtungen etwas vervollständigen.

Es sei:

$$(1) \qquad x_i' = f_i(x_1 \dots x_n;\ a_1 \dots a_r) \quad (i = 1 \dots n)$$

irgend eine Form der endlichen Gleichungen einer r-gliedrigen Gruppe, die aus paarweise inversen Transformationen besteht und von den r

unabhängigen infinitesimalen Transformationen: $X_1 f \ldots X_r f$ erzeugt wird. Unter $S_{(a)}$ verstehen wir, wie gewöhnlich, die allgemeine endliche Transformation dieser Gruppe.

Wir denken uns irgend eine Transformation $S_{(\mathfrak{a})}$ unsrer Gruppe auf die allgemeine Transformation $S_{(a)}$ der Gruppe ausgeführt. Die Transformation, die wir auf diese Weise erhalten, lautet: $S_{(\mathfrak{a})}^{-1} S_{(a)} S_{(\mathfrak{a})}$ und gehört unter den gemachten Voraussetzungen wieder der Gruppe (1) an, sie kann also die Form: $S_{(a')}$ erhalten, wo die Parameter: $a_1' \ldots a_r'$ gewisse Functionen:

$$a_k' = \omega_k(a_1 \ldots a_r;\ \mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_r) \quad (k = 1 \ldots r) \tag{2}$$

der a und der $\mathfrak{a}$ sind. Führen wir weiter auf die Transformation $S_{(a')}$ die Transformation $S_{(\mathfrak{b})}$ aus, so erhalten wir die Transformation: $S_{(\mathfrak{b})}^{-1} S_{(a')} S_{(\mathfrak{b})}$, die auf die Form $S_{(a'')}$ gebracht werden kann, wo die a'' augenscheinlich durch die Gleichungen:

$$a_k'' = \omega_k(a_1' \ldots a_r';\ \mathfrak{b}_1 \ldots \mathfrak{b}_r) \quad (k = 1 \ldots r) \tag{3}$$

bestimmt sind. Nun aber ist:

$$S_{(a'')} = S_{(\mathfrak{b})}^{-1} S_{(a')} S_{(\mathfrak{b})} = S_{(\mathfrak{b})}^{-1} S_{(\mathfrak{a})}^{-1} S_{(a)} S_{(\mathfrak{a})} S_{(\mathfrak{b})}$$
$$= (S_{(\mathfrak{a})} S_{(\mathfrak{b})})^{-1} (S_{(a)} S_{(\mathfrak{a})} S_{(\mathfrak{b})})$$

und andrerseits besteht eine Gleichung von der Form: $S_{(\mathfrak{a})} S_{(\mathfrak{b})} = S_{(\mathfrak{c})}$, in der die $\mathfrak{c}_k$ sich in bekannter Weise:

$$\mathfrak{c}_k = \varphi_k(\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_r;\ \mathfrak{b}_1 \ldots \mathfrak{b}_r) \quad (k = 1 \ldots r) \tag{4}$$

durch die $\mathfrak{a}$ und die $\mathfrak{b}$ ausdrücken, demnach wird auch:

$$S_{(a'')} = S_{(\mathfrak{c})}^{-1} S_{(a)} S_{(\mathfrak{c})},$$

also ergiebt sich, dass zwischen den a_k und den a_k'' die Gleichungen:

$$a_k'' = \omega_k(a_1 \ldots a_r;\ \mathfrak{c}_1 \ldots \mathfrak{c}_r) \quad (k = 1 \ldots r) \tag{5}$$

bestehen. Die Gleichungen (5) sind also eine Folge der Gleichungen (2), (3) und (4).

Aus dem Gesagten geht hervor, dass die Gleichungen (2) mit den r Parametern $\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_r$ eine Gruppe in den r Veränderlichen $a_1 \ldots a_r$ darstellen. Diese Gruppe ist augenscheinlich mit der Gruppe (1) isomorph; sie giebt an, wie die ∞^r Transformationen der Gruppe (1) unter einander vertauscht werden, wenn man auf die Schaar dieser ∞^r Transformationen die allgemeine Transformation der Gruppe (1) ausführt.

Da die Gleichungen (1) der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ unbegränzt viele verschiedene Formen erhalten können (vgl. S. 607), so ist klar, dass zu der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ unbegränzt viele verschiedene Gruppen (2) gehören. Aber alle Gruppen (2), die man für die Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$

bilden kann, sind mit einander ähnlich, denn aus der Form (1) erhält man ja jede andre Form der endlichen Gleichungen der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$, indem man an Stelle der a neue Parameter einführt, und dabei verwandelt sich ja die Gruppe (1) in eine mit ihr ähnliche Gruppe.

Unter den Gruppen (2), die zu der r-gliedrigen Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ gehören, ist eine ausgezeichnet, die nämlich, die man erhält, wenn man die endlichen Gleichungen der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ in ihrer kanonischen Form:

$$x_i' = f_i(x_1 \ldots x_n;\ e_1 \ldots e_r) \quad (i = 1 \ldots n) \tag{1'}$$

zu Grunde legt. Wird der Uebergang von den Parametern: $a_1 \ldots a_r$ zu den kanonischen Parametern: $e_1 \ldots e_r$ durch die Gleichungen:

$$a_k = \mathfrak{A}_k(e_1 \ldots e_r) \quad (k = 1 \ldots r)$$

vermittelt, ist also:

$$f_i(x_1 \ldots x_n;\ \mathfrak{A}_1(e) \ldots \mathfrak{A}_r(e)) \equiv f_i(x_1 \ldots x_n;\ e_1 \ldots e_r)$$

(vgl. S. 610 f.), so wird die Gruppe (2), die zu der Form (1') der endlichen Gleichungen der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ gehört, durch die Gleichungen:

$$\mathfrak{A}_k(e_1' \ldots e_r') = \omega_k(\mathfrak{A}_1(e) \ldots \mathfrak{A}_r(e);\ \mathfrak{A}_1(e) \ldots \mathfrak{A}_r(e)) \quad (k = 1 \ldots r) \tag{2'}$$

dargestellt, unter den e Parameter verstanden.

Die Gruppe (2') ist nichts anderes als die adjungirte Gruppe der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ und zwar die adjungirte Gruppe in der kanonischen Form.

In der That, zu der adjungirten Gruppe der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ gelangten wir auf S. 270 ff. von Abschn. I dadurch, dass wir in die allgemeine infinitesimale Transformation: $\Sigma e_k X_k f$ vermöge (1) die neuen Veränderlichen: $x_1' \ldots x_n'$ einführten. Aus der Gleichung:

$$\sum_1^r{}_k\, e_k X_k f = \sum_1^r{}_k\, e_k' X_k' f, \tag{6}$$

die wir so erhielten, folgten gewisse Relationen:

$$e_k' = \sum_1^r{}_j\, \varrho_{kj}(a_1 \ldots a_r)\, e_j \quad (k = 1 \ldots r), \tag{7}$$

die eine Gruppe darstellten, eben die adjungirte Gruppe. Da wir nun den Ausdruck: $\Sigma e_k X_k f$ geradezu als Symbol der endlichen Transformation (1') auffassen können (a. a. O. S. 255), so ist klar, dass die adjungirte Gruppe (7) angiebt, wie die Schaar der ∞^r Transformationen (1') transformirt wird, wenn man auf sie die Transformation (1) ausführt. Hieraus aber folgt offenbar, dass die Gleichungen:

$$(7') \qquad e_k' = \sum_1^r{}_j \varrho_{kj}(\mathfrak{A}_1(\mathfrak{e}) \dots \mathfrak{A}_r(\mathfrak{e}))\, e_j \quad (k = 1 \dots r)$$

die Gruppe (2) darstellen, die zu der Form (1′) der endlichen Gleichungen der Gruppe: $X_1 f \dots X_r f$ gehört, dass also die Gleichungen (2′) die Form (7′) erhalten können. Endlich ist von vornherein klar, dass (7′) die kanonische Form der endlichen Gleichungen der adjungirten Gruppe darstellt, unsre oben aufgestellte Behauptung ist also vollständig bewiesen.

Wir sehen also, *dass zu jeder Form* (1) *der endlichen Gleichungen einer r-gliedrigen Gruppe eine ganz bestimmte isomorphe Gruppe* (2) *gehört; alle diese Gruppen* (2) *sind mit einander ähnlich und unter ihnen ist die adjungirte Gruppe der Gruppe:* $X_1 f \dots X_r f$ *enthalten.*

Diese Einführung der adjungirten Gruppe hat vor der in Abschn. I gewählten den Vorzug, dass sie die adjungirte Gruppe nicht als etwas ganz einzig dastehendes erscheinen lässt, sondern als ein allerdings ausgezeichnetes Glied in einer Kette von mit einander ähnlichen Gruppen. Die adjungirte Gruppe spielt offenbar unter diesen Gruppen genau dieselbe Rolle wie die beiden kanonischen Parametergruppen unter allen den Paaren von Parametergruppen, die zu einer r-gliedrigen Gruppe gehören (vgl. S. 656 f. u. Abschn. I, Kap. 21).

Wir werden jetzt die wichtigsten unter den Betrachtungen, die wir in Kap. 16 des Abschn. I an die adjungirte Gruppe angeknüpft haben, noch einmal kurz auseinandersetzen, um das Verständniss der späteren Paragraphen des gegenwärtigen Kapitels möglichst zu erleichtern.

Ist die Zusammensetzung der r-gliedrigen Gruppe: $X_1 f \dots X_r f$ durch die Relationen:

$$(8) \qquad (X_i X_k) = \sum_1^r{}_s c_{iks} X_s f \quad (i, k = 1 \dots r)$$

bestimmt, so wird die adjungirte Gruppe von den infinitesimalen Transformationen:

$$E_k f = \sum_{js}^{1 \dots r} c_{jks} e_j \frac{\partial f}{\partial e_s} \quad (k = 1 \dots r)$$

erzeugt, die ihrerseits in den Beziehungen:

$$(9) \qquad (E_i E_k) = \sum_1^s{}_s c_{iks} E_s f \quad (i\ k = 1 \dots r)$$

stehen. Enthält die Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ gerade l unabhängige ausgezeichnete infinitesimale Transformationen, so giebt es unter den infinitesimalen Transformationen $E_k f$ gerade $r - l$ von einander unabhängige und die adjungirte Gruppe ist gerade $(r - l)$-gliedrig.

Dass die infinitesimalen Transformationen $E_k f$ in den Beziehungen (9) stehen, folgt, wie schon in Abschn. I auf S. 295 bemerkt wurde, daraus, dass die c_{iks} die bekannten Gleichungen:

$$(10) \qquad \begin{cases} c_{iks} + c_{kis} = 0 \\ \sum_1^r {}_\tau (c_{ik\tau} c_{\tau js} + c_{kj\tau} c_{\tau is} + c_{ji\tau} c_{\tau ks}) = 0 \\ (i, k, j, s = 1 \ldots r) \end{cases}$$

erfüllen. Andrerseits wissen wir jetzt, dass es jedesmal, wenn die r^3 Constanten c_{iks} die Gleichungen (10) erfüllen, r-gliedrige Gruppen von der Zusammensetzung c_{iks} giebt. Demnach können wir auch von der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ ganz absehen und brauchen uns nur irgend r^3 Constanten c_{iks} gegeben zu denken, die (10) erfüllen; dann ist die Gruppe: $E_1 f \ldots E_r f$ die adjungirte Gruppe einer jeden Gruppe von der Zusammensetzung c_{iks} und kann daher füglich als *die zu der Zusammensetzung c_{iks} gehörige adjungirte Gruppe bezeichnet werden.*

Man wird diesen Standpunkt immer dann einnehmen, wenn es sich darum handelt, eine Gruppe blos auf ihre Zusammensetzung hin zu untersuchen, also ihre Untergruppen zu bestimmen oder ähnliche Aufgaben zu lösen. Ist nämlich diese Untersuchung für eine Gruppe durchgeführt, so ist sie es zugleich für jede gleichzusammengesetzte Gruppe, man wird daher gut thun, nicht eine einzelne Gruppe zu bevorzugen, sondern sofort alle gleichzusammengesetzten Gruppen zusammenzufassen, indem man von dem Begriffe der Zusammensetzung c_{iks} Gebrauch macht. Zur Erleichterung der Darstellung wird man freilich auch dann immer von einer r-gliedrigen Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ sprechen, deren infinitesimale Transformationen in den Beziehungen (8) stehen, nur hat man sich unter dieser Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ nicht eine bestimmte Gruppe in einem bestimmten Raume zu denken, sondern schlechthin die r-gliedrige Gruppe von der Zusammensetzung c_{iks}, soweit diese Gruppe Eigenschaften besitzt, die von ihrer analytischen Darstellung als Transformationsgruppe in einem bestimmten Raume unabhängig sind; mit einem Worte: man hat sich unter der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ die r-gliedrige Gruppe von Operationen zu denken, deren Zusammensetzung durch das gegebene System der c_{iks} bestimmt wird.

Obwohl die adjungirte Gruppe, die zu einer gegebenen Zusammensetzung c_{iks} von r-gliedrigen Gruppen gehört, nicht immer r-gliedrig

ist, so giebt ihre Untersuchung doch ein vollständiges Bild aller wesentlichen Eigenschaften der betreffenden Zusammensetzung. Das beruht darauf, dass man die infinitesimalen Transformationen der r-gliedrigen Gruppe von der Zusammensetzung c_{iks} als Individuen auffassen kann, die von der adjungirten Gruppe unter einander vertauscht werden. Bei dieser Auffassung, die wir bereits auf S. 287 von Abschn. I kennen gelernt haben, müssen wir jetzt etwas verweilen, weil sie damals eigentlich nur beiläufig erwähnt worden ist.

In der allgemeinen infinitesimalen Transformation:

$$e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$$

der r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ von der Zusammensetzung c_{iks} deuten wir die Grössen $e_1 \ldots e_r$ als homogene Punktcoordinaten eines $(r-1)$-fach ausgedehnten ebenen Raumes R_{r-1}. Jede infinitesimale Transformation: $\Sigma \lambda_k X_k f$ unsrer Gruppe wird dann in dem R_{r-1} durch einen ganz bestimmten Punkt abgebildet, umgekehrt ist jeder Punkt des R_{r-1} das Bild einer ganz bestimmten infinitesimalen Transformation der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ und zwei verschiedene Punkte des R_{r-1} sind die Bilder von zwei unabhängigen infinitesimalen Transformationen der Gruppe.

Durch die eben beschriebene Abbildung bekommen wir aber auch eine Abbildung der infinitesimalen Transformationen der adjungirten Gruppe: $E_1 f \ldots E_r f$, die zu der Zusammensetzung c_{iks} gehört. Jeder Punkt: $\lambda_1 : \cdots : \lambda_r$ des R_{r-1} repräsentirt nämlich zu gleicher Zeit die infinitesimale Transformation $\Sigma \lambda_k X_k f$ der r-gliedrigen Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ und die infinitesimale Transformation: $\Sigma \lambda_k E_k f$ der adjungirten Gruppe, nur brauchen zwei verschiedenen Punkten des R_{r-1} nicht immer zwei unabhängige infinitesimale Transformationen der adjungirten Gruppe zu entsprechen.

Bei unsrer Abbildung werden die infinitesimalen Transformationen jeder m-gliedrigen Untergruppe der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ durch eine $(m-1)$-fach ausgedehnte ebene Mannigfaltigkeit E_{m-1} des R_{r-1} abgebildet, wir können daher E_{m-1} geradezu als Bild der betreffenden m-gliedrigen Untergruppe auffassen. Die E_{m-1} ist dann offenbar zugleich das Bild einer gewissen Untergruppe der adjungirten Gruppe, nur braucht diese Untergruppe nicht auch m-gliedrig zu sein.

Denken wir uns jetzt den Raum R_{r-1} durch die endlichen Transformationen der adjungirten Gruppe: $E_1 f \ldots E_r f$ transformirt, so werden seine Punkte genau so unter einander vertauscht, wie die ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen: $\Sigma \lambda_k X_k f$ unter einander vertauscht werden, wenn man auf sie die endlichen Transformationen

der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ ausführt. Hieraus lassen sich mehrere wichtige Schlüsse ziehen, deren Begründung wir wohl nicht auszuführen brauchen. Es sind die folgenden:

Eine ebene $(m-1)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit E_{m-1} des R_{r-1} stellt dann und nur dann eine m-gliedrige Untergruppe der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ dar, wenn sie bei allen den infinitesimalen Transformationen der adjungirten Gruppe invariant bleibt, deren Bilder ihre Punkte sind. Hieraus ergiebt sich insbesondere, dass jeder Punkt des R_{r-1} bei der infinitesimalen Transformation der Adjungirten invariant bleibt, deren Bild er ist, ein Ergebniss, das man auch leicht analytisch beweisen kann. In der That, der Ausdruck:

$$\sum_{k}^{1 \ldots r} e_k E_k f = \sum_{s}^{1 \ldots r} \left\{ \sum_{kj}^{1 \ldots r} c_{jks} e_j e_k \right\} \frac{\partial f}{\partial e_s}$$

verschwindet wegen der Relationen: $c_{kjs} + c_{jks} = 0$ identisch*), der Punkt: $\lambda_1 : \cdots : \lambda_r$ bleibt also wirklich bei der infinitesimalen Transformation: $\Sigma \lambda_k E_k f$ invariant.

Ist eine $(m-1)$-fach ausgedehnte ebene Mannigfaltigkeit E_{m-1} das Bild einer m-gliedrigen Untergruppe g_m der r-gliedrigen Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$, so stellen die $(m-1)$-fach ausgedehnten ebenen Mannigfaltigkeiten, in die E_{m-1} bei den endlichen Transformationen der adjungirten Gruppe übergeht, alle innerhalb der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ mit g_m gleichberechtigten m-gliedrigen Untergruppen dar. Bei Berücksichtigung des früher Gesagten ergiebt sich daher, dass eine $(m-1)$-fach ausgedehnte ebene Mannigfaltigkeit des R_{r-1} stets dann aber auch nur dann eine m-gliedrige invariante Untergruppe der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ darstellt, wenn sie bei der adjungirten Gruppe invariant bleibt.

Da jede infinitesimale Transformation: $\Sigma e_k X_k f$ im R_{r-1} durch einen Punkt abgebildet wird, so ist es bequem, kurz von dem Punkte: $\Sigma e_k X_k f$ zu reden und also den Ausdruck: $\Sigma e_k X_k f$ je nach Bedarf als Symbol einer infinitesimalen Transformation oder als Symbol des Punktes: $e_1 : \cdots : e_r$ zu betrachten. Denken wir uns nun auf den Punkt $\Sigma e_k X_k f$ die infinitesimale Transformation: $\Sigma \lambda_k E_k f$ der adjungirten Gruppe ausgeführt, so geht er in den unendlich benachbarten Punkt:

$$\sum_{k}^{1 \ldots r} e_k X_k f + \delta t \sum_{kjs}^{1 \ldots r} c_{kjs} e_k \lambda_j X_s f$$

*) Hieraus folgt, nebenbei bemerkt, dass die adjungirte Gruppe $E_1 f \ldots E_r f$ als Gruppe des r-fach ausgedehnten Raumes $e_1 \ldots e_r$ betrachtet immer intransitiv ist.

über, also mit andern Worten in den Punkt:

$$\sum_1^r e_k X_k f + \delta t \left(\sum_1^r e_k X_k f, \sum_1^r \lambda_j X_j f \right)$$

(vgl. Abschn. I, S. 288). Von dieser Bemerkung wollen wir noch eine Anwendung machen.

Es sei:

$$Y_\mu f = \sum_1^r h_{\mu k} X_k f \qquad (\mu = 1 \ldots m)$$

oder kurz g_m eine m-gliedrige Untergruppe der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ und E_{m-1} sei das Bild von g_m. Soll nun g_m in einer $(m+1)$-gliedrigen Untergruppe von $X_1 f \ldots X_r f$ stecken, so ist jedenfalls nothwendig, dass bei der Untergruppe der adjungirten Gruppe, deren Bild E_{m-1} ist, eine durch E_{m-1} gehende m-fach ausgedehnte ebene Mannigfaltigkeit E_m invariant bleibt. Diese nothwendige Bedingung ist aber zugleich hinreichend.

In der That, es gebe eine Mannigfaltigkeit E_m von jener Beschaffenheit und $\Sigma \lambda_k X_k f = Zf$ sei ein nicht auf E_{m-1} liegender Punkt von E_m. Dann liegt der Punkt:

$$Zf + \delta t (Z Y_\mu),$$

in den der Punkt: Zf bei der infinitesimalen Transformation: $\Sigma h_{\mu j} E_j f$ der adjungirten Gruppe übergeht, ebenfalls auf E_m, es bestehen also m Relationen von der Form:

$$(Z Y_\mu) = a_\mu Zf + \sum_1^m b_{\mu\nu} Y_\nu f \qquad (\mu = 1 \ldots m),$$

wo die a und b Constanten sind, das aber heisst, dass: $Y_1 f \ldots Y_m f, Zf$ eine $(m+1)$-gliedrige Untergruppe der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ erzeugen. Wir haben daher den

Satz 1. *Ist g_m eine m-gliedrige Untergruppe der r-gliedrigen Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ und ist E_{m-1} die $(m-1)$-fach ausgedehnte ebene Mannigfaltigkeit, durch die g_m in dem $(r-1)$-fach ausgedehnten Raume der ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen: $\Sigma e_k X_k f$ abgebildet wird, so steckt g_m dann aber auch nur dann in einer $(m+1)$-gliedrigen Untergruppe der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$, wenn die Untergruppe der adjungirten Gruppe: $E_1 f \ldots E_r f$, die durch E_{m-1} abgebildet wird, eine durch E_{m-1} gehende m-fach ausgedehnte ebene Mannigfaltigkeit invariant lässt.*

Wir sahen oben, dass jede ebene Mannigfaltigkeit des R_{r-1}, die bei der adjungirten Gruppe invariant bleibt, eine invariante Untergruppe

der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ darstellt. Aber auch die krummen Mannigfaltigkeiten, die bei der adjungirten Gruppe invariant bleiben, haben eine begriffliche Bedeutung. Jede *kleinste* bei der adjungirten Gruppe invariante Mannigfaltigkeit ist nämlich das Bild eines Typus von eingliedrigen Untergruppen oder, was auf dasselbe hinauskommt, das Bild eines Typus von infinitesimalen Transformationen der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ (vgl. Abschn. I, S. 282 ff.). Unter einer *kleinsten* invarianten Mannigfaltigkeit verstehen wir dabei (a. a. S. 224 f.) eine solche invariante Mannigfaltigkeit, die für jeden ihrer Punkte von allgemeiner Lage die kleinste invariante Mannigfaltigkeit ist, der der betreffende Punkt angehört. Wir können daher eine kleinste invariante Mannigfaltigkeit auch als eine solche invariante Mannigfaltigkeit definiren, deren Punkte bei der adjungirten Gruppe transitiv transformirt werden.

Besonders wichtig unter den kleinsten bei der adjungirten Gruppe invarianten Mannigfaltigkeiten sind alle die, die isolirt liegen, die also keiner continuirlichen Schaar von invarianten Mannigfaltigkeiten angehören.

Ist M eine kleinste bei der adjungirten Gruppe invariante Mannigfaltigkeit, so können auf M immer noch invariante Mannigfaltigkeiten von geringerer Dimensionenzahl liegen; das heisst dann, dass der durch M repräsentirte Typus von eingliedrigen Gruppen ausarten kann. Die einfachsten Typen von eingliedrigen Gruppen sind daher die, die durch solche kleinste invariante Mannigfaltigkeiten repräsentirt werden, auf denen keine invariante Mannigfaltigkeit von geringerer Dimensionenzahl liegt. Unter diesen Typen sind aber offenbar wiederum die die wichtigsten, deren Bildmannigfaltigkeiten isolirt liegen.

Man sieht hieraus, dass unter allen bei der adjungirten Gruppe invarianten Mannigfaltigkeiten in erster Linie die Beachtung verdienen, die isolirt liegen und keine invarianten Mannigfaltigkeiten von geringerer Dimensionenzahl enthalten. In der That haben wir auch schon bei verschiedenen Gelegenheiten aus der Betrachtung derartiger Mannigfaltigkeiten Nutzen gezogen. Wir erinnern namentlich an die Bestimmung der grössten projectiven Gruppen in der Ebene, wo die Mannigfaltigkeit aller infinitesimalen projectiven Transformationen, die mit den infinitesimalen Translationen gleichberechtigt sind, eine sehr grosse Rolle spielt (s. S. 89 ff.). In Kap. 26 von Abschn. I beruht ebenfalls fast Alles auf der Betrachtung dieser Mannigfaltigkeit*).

*) In seinen Veröffentlichungen aus dem Jahre 1884 benutzte Lie bei vielen Gelegenheiten die bei der adjungirten Gruppe invarianten Mannigfaltigkeiten und lenkte wiederholt die Aufmerksamkeit stark auf sie.

Die Aufgabe alle bei der adjungirten Gruppe invarianten Mannigfaltigkeiten des R_{r-1} zu finden, kommt darauf hinaus, in den Veränderlichen: $e_1 \dots e_r$ alle Gleichungensysteme zu bestimmen, die bei der Gruppe: $E_1 f \dots E_r f$, Ef invariant bleiben, unter Ef die infinitesimale Transformation:

$$Ef = \sum_1^r {}_k\, e_k \frac{\partial f}{\partial e_k}$$

verstanden. Die Lösung dieser Aufgabe erfordert jedenfalls nur ausführbare Operationen, nämlich die Auflösung einer algebraischen Gleichung und ausserdem noch gewisse Eliminationen (s. Abschn. I, S. 282 ff.). Selbstverständlich hat es grosses Interesse, Methoden zu kennen, die die Lösung dieser Aufgabe in jedem einzelnen Falle vereinfachen, wir können uns aber hier nicht auf diesen Punkt einlassen, sondern begnügen uns mit der Mittheilung eines schönen Satzes, der allerdings im Folgenden keine Anwendung findet. Doch heben wir hervor, dass sich eine Reihe analoger Sätze aufstellen lassen.

Wir betrachten den Fall, dass die adjungirte Gruppe den Raum R_{r-1} transitiv transformirt. Dieser Fall tritt offenbar dann und nur dann ein, wenn die Gruppe: $E_1 f \dots E_r f$, Ef in den r Veränderlichen $e_1 \dots e_r$ transitiv ist, wenn also in der Matrix:

$$\begin{vmatrix} e_{11} & \cdot & e_{1r} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ e_{r1} & \cdot & e_{rr} \\ e_1 & \cdot & e_r \end{vmatrix} \tag{11}$$

in der e_{ks} den Ausdruck:

$$e_{ks} = \sum_1^r {}_j\, c_{jks}\, e_j \qquad (k, s = 1 \dots r) \tag{12}$$

bedeutet, nicht alle r-reihigen Determinanten verschwinden.

Es ist leicht, die r-reihigen Determinanten der Matrix (11) in einfacher Form hinzuschreiben, setzen wir nämlich:

$$\Delta = \Sigma \pm e_{11} \dots e_{rr},$$

so erhalten wir ausser Δ selbst nur noch die r Determinanten:

$$\Delta_k = \sum_1^r {}_s\, e_s \frac{\partial \Delta}{\partial e_{ks}} \qquad (k = 1 \dots r). \tag{13}$$

Da nun nach S. 673 der Ausdruck $\Sigma e_k E_k f$ identisch verschwindet und infolgedessen von Δ dasselbe gilt, so dürfen unter den gemachten Voraussetzungen $\Delta_1 \dots \Delta_r$ nicht sämmtlich verschwinden, demnach ist:

$$\Delta_1 = 0, \dots, \Delta_r = 0 \tag{14}$$

ein bei der Gruppe: $E_1 f \ldots E_r f$, Ef invariantes Gleichungensystem oder, was auf dasselbe hinauskommt, eine bei der adjungirten Gruppe invariante Mannigfaltigkeit des Raumes R_{r-1}.

Aus (13) ergiebt sich durch Multiplication mit $e_{k\mu}$ und Summation nach k:

$$\sum_1^r{}^k e_{k\mu} \Delta_k = \sum_1^r{}^s e_s \sum_1^r{}^k e_{k\mu} \frac{\partial \Delta}{\partial e_{ks}}$$
$$= e_\mu \Delta = 0,$$

andrerseits ist aber auch:

$$\sum_1^r{}^k e_{k\mu} e_k = 0$$

und da unter den gemachten Voraussetzungen nicht alle $(r-1)$-reihigen Unterdeterminanten von Δ verschwinden können, so folgt hieraus:

$$\Delta_1 : \Delta_2 : \cdots : \Delta_r = e_1 : e_2 : \cdots : e_r.$$

Demnach ist jedes Δ_k durch e_k theilbar und es wird:

$$\Delta_k = e_k \cdot g(e_1 \ldots e_r) \quad (k = 1 \ldots r),$$

wo g eine von k unabhängige ganze Function $(r-1)$-ten Grades von $e_1 \ldots e_r$ ist.

Da das Verschwinden aller e keine geometrische Bedeutung hat, so reducirt sich das invariante Gleichungensystem (14) einfach auf: $g = 0$, diese Gleichung stellt also eine bei der adjungirten Gruppe invariante Mannigfaltigkeit des R_{r-1} dar. Wir können hinzufügen, dass jede andre bei der adjungirten Gruppe invariante Mannigfaltigkeit des R_{r-1} nothwendig ganz auf der Mannigfaltigkeit: $g = 0$ liegt.

Da die Gleichung: $g = 0$ bei der Gruppe: $E_1 f \ldots E_r f$, Ef invariant bleibt und da die infinitesimalen Transformationen $E_k f$ linear und homogen sind, so müssen r Identitäten von der Form:

$$E_k g \equiv c_k \cdot g \quad (k = 1 \ldots r)$$

bestehen, wo die c_k Constanten sind. Hieraus folgt aber:

$$\sum_1^r{}^k e_k E_k g \equiv 0 \equiv g \sum_1^r{}^k c_k c_k,$$

was nur möglich ist, wenn alle c_k verschwinden. Demnach ergiebt sich noch, dass g eine Invariante der adjungirten Gruppe: $E_1 f \ldots E_r f$ ist. Da die r Gleichungen: $E_k f = 0$ in unserm Falle nur eine Lösung gemein haben, so ist offenbar jede andre Invariante der adjungirten Gruppe eine Function von g allein. Wir haben somit den

Satz 2*). *Es sei:*

$$E_k f = \sum_{js}^{1\ldots r} c_{jks} e_j \frac{\partial f}{\partial e_s} = \sum_{s}^{1\ldots r} e_{ks} \frac{\partial f}{\partial e_s} \quad (k = 1 \ldots r)$$

die adjungirte Gruppe einer r-gliedrigen Gruppe von der Zusammensetzung c_{iks}, ferner sei:

$$Ef = \sum_{s}^{1\ldots r} e_s \frac{\partial f}{\partial e_s},$$

und endlich setze man die Determinante:

$$\sum \pm e_{11} \ldots e_{rr},$$

die immer identisch verschwindet, gleich Δ. Verschwinden dann die r übrigen r-reihigen Determinanten:

$$\Delta_k = \sum_{1}^{r} e_s \frac{\partial \Delta}{\partial e_{ks}} \quad (k = 1 \ldots r)$$

der Matrix:

$$\begin{vmatrix} e_{11} & . & e_{1r} \\ . & . & . \\ e_{r1} & . & e_{rr} \\ e_1 & . & e_r \end{vmatrix} \tag{11}$$

nicht alle identisch, so ist:

$$\frac{\Delta_1}{e_1} \equiv \frac{\Delta_2}{e_2} \equiv \ldots \equiv \frac{\Delta_r}{e_r}$$

gleich einer ganzen Function $g(e_1 \ldots e_r)$ $(r-1)$-Grades von den e. Die Gleichung: $g = 0$ ist in diesem Falle die einzige bei der Gruppe: $E_1 f \ldots E_r f$, Ef invariante Gleichung, überdies ist die ganze Function g eine Invariante der adjungirten Gruppe: $E_1 f \ldots E_r f$ und jede andre Invariante dieser Gruppe ist durch g allein ausdrückbar.

§ 131.

Ist: $X_1 f \ldots X_r f$ oder kurz G_r eine r-gliedrige Gruppe, so erzeugen alle $(X_i X_k)$ eine invariante Untergruppe der G_r (s. Abschn. I, S. 261, Satz 6). Wir wollen diese invariante Untergruppe als die *derivirte* oder *abgeleitete* Gruppe der G_r bezeichnen oder auch kurz als ihre *Derivirte*. Den Ausdruck abgeleitete Gruppe haben wir übrigens schon auf S. 597 von Abschn. I gelegentlich gebraucht.

---

*) Dieser von Lie herrührende Satz ist neueren Datums, denn er stammt aus dem Winter 1892. Dem Beweis für die Invarianz von g hat Engel die jetzige einfache Form gegeben.

Die derivirte Gruppe der G_r hat ihrerseits eine derivirte Gruppe, die wir als die *zweite derivirte* oder *zweite abgeleitete* Gruppe der G_r bezeichnen. Im Gegensatz dazu nennen wir die derivirte Gruppe der G_r auch deren *erste* Derivirte. Was unter der m-ten derivirten Gruppe einer Gruppe zu verstehen ist, leuchtet hiernach unmittelbar ein.

Bei Anwendung der eingeführten Bezeichnung kann der Satz 7 auf S. 262 von Abschn. I kurz so ausgesprochen werden:

Satz 3. *Die derivirte Gruppe einer invarianten Untergruppe einer r-gliedrigen Gruppe ist stets in der r-gliedrigen invariant.*

Es ist somit klar, dass alle derivirten Gruppen der G_r: $X_1 f \ldots X_r f$ in der G_r invariant sind.

Fällt die erste Derivirte einer r-gliedrigen Gruppe G_r mit der G_r selbst zusammen, ist also, wie wir uns ausdrücken wollen, *die G_r ihre eigene Derivirte*, so fallen auch alle folgenden Derivirten der G_r mit dieser zusammen. Man könnte den von Herrn G. Cantor in seiner Theorie der Punktmengen benutzten Ausdruck: perfect auf die Gruppentheorie übertragen und derartige Gruppen *perfect* nennen; wir glauben jedoch, dass es besser ist, abzuwarten, ob nicht ein bezeichnenderer Ausdruck gefunden werden kann.

Ist eine r-gliedrige Gruppe G_r nicht ihre eigne Derivirte, so denke man sich der Reihe nach ihre erste, ihre zweite, ... derivirte Gruppe aufgestellt. Da die Gliederzahl der m-ten Derivirten niemals grösser ist als die der $(m-1)$-ten, so muss einmal, etwa zuerst bei der q-ten Derivirten der Fall eintreten, dass die $(q+1)$-te Derivirte mit der q-ten zusammenfällt, dass also die q-te Derivirte ihre eigne Derivirte ist. Hier sind aber noch zwei Möglichkeiten denkbar, entweder nämlich besteht die q-te Derivirte blos aus der identischen Transformation, die infinitesimalen Transformationen der $(q-1)$-ten Derivirten sind also paarweise vertauschbar, oder die q-te Derivirte hat noch eine von Null verschiedene Gliederzahl.

Wir wollen aus später zu erörternden Gründen *jede r-gliedrige Gruppe, deren soundsovielte Derivirte blos aus der identischen Transformation besteht, als integrabel bezeichnen, jede r-gliedrige Gruppe dagegen, von der keine Derivirte blos aus der identischen Transformation besteht, als nicht integrabel*).* Dann gelten die folgenden Sätze:

Satz 4. *Jede Untergruppe einer integrabeln Gruppe ist ebenfalls integrabel.*

*) Den *Begriff* integrable Gruppe führte Lie in den Verh. d. Ges. d. W. zu Christiania 1874 ein. Den Begriff derivirte Gruppe verwerthete er zum ersten Male in Bd. 8 seines norwegischen Archivs for Math., Christiania 1883.

Satz 5. *Ist eine $(r-m)$-gliedrige Gruppe mit einer r-gliedrigen integrabeln Gruppe meroedrisch isomorph, so ist sie selbst integrabel.*

Der erste dieser beiden Sätze bedarf keines Beweises, der Beweis des zweiten liegt auf der Hand. Ist nämlich: $X_1 f \dots X_r f$ die r-gliedrige integrable Gruppe und sind:

$$(X_i X_k) = \sum_1^r{}^s c_{iks} X_s f \qquad (i, k = 1 \dots r)$$

die Gleichungen, die ihre Zusammensetzung bestimmen, so kann man in der $(r-m)$-gliedrigen meroedrisch isomorphen Gruppe r infinitesimale Transformationen: $Y_1 f \dots Y_r f$ so auswählen, dass sich unter ihnen gerade $r-m$ unabhängige befinden und dass die Relationen:

$$(Y_i Y_k) = \sum_1^r{}^s c_{iks} Y_s f \qquad (i, k = 1 \dots r)$$

bestehen. Da nun die soundsovielte, etwa die q-te Derivirte der Gruppe $X_1 f \dots X_r f$ blos aus der identischen Transformation besteht, kann offenbar auch die q-te Derivirte der Gruppe: $Y_1 f \dots Y_r f$ nur aus der identischen Transformation bestehen.

Der Name: integrable Gruppe ist zwar neu, aber der Begriff ist uns schon früher begegnet. In der That, wir haben auf S. 265 ff. von Abschn. I eine Klasse von Gruppen betrachtet, die mit der Klasse der integrabeln Gruppen zusammenfällt. Bei Anwendung unsrer jetzigen Bezeichnungen können wir daher den Satz 12, S. 270 a. a. O. etwas kürzer so aussprechen:

Satz 6. *Die r-gliedrige Gruppe: $X_1 f \dots X_r f$ ist stets dann aber auch nur dann integrabel, wenn sich in ihr r unabhängige infinitesimale Transformationen: $Y_1 f \dots Y_r f$ so auswählen lassen, dass Relationen von der Form:*

$$(15) \qquad (Y_i Y_{i+k}) = \sum_1^{i+k-1}{}^s c_{i,\,i+k,\,s} Y_s f \qquad (i = 1 \dots r-1;\ k = 1 \dots r-i)$$

bestehen, dass also $Y_1 f \dots Y_i f$ jedesmal eine i-gliedrige Untergruppe erzeugen, die in der $(i+1)$-gliedrigen: $Y_1 f \dots Y_{i+1} f$ invariant ist.

Ueber die Gruppen von der Zusammensetzung (15) haben wir aber in Kap. 27 von Abschn. I noch mehrere andre Sätze aufgestellt, die sich jetzt viel bequemer aussprechen lassen. Wir meinen den Satz 4 auf S. 589 und die Theor. 107 und 108 auf S. 595 und 597. Es verlohnt sich, diese Sätze neu zu formuliren:

Satz 7. *Jede integrable projective Gruppe des n-fach ausgedehnten Raumes lässt mindestens einen Punkt in Ruhe, ferner eine durch diesen gehende Gerade, eine durch die Gerade gehende zweifach ausgedehnte ebene Mannigfaltigkeit, ... endlich eine durch alle diese Mannigfaltigkeiten gehende $(n-1)$-fach ausgedehnte ebene Mannigfaltigkeit.*

Satz 8. *Jede $(r-m)$-gliedrige integrable Untergruppe einer r-gliedrigen Gruppe steckt in mindestens einer $(r-m+1)$-gliedrigen Untergruppe der r-gliedrigen.*

Satz 9. *Eine r-gliedrige Gruppe: $X_1 f \dots X_r f$ ist dann und nur dann integrabel, wenn sich in ihr r unabhängige infinitesimale Transformationen: $Y_1 f \dots Y_r f$ so auswählen lassen, dass Relationen von der Form:*

$$(16) \qquad (Y_i Y_{i+k}) = \sum_1^i{}^s c_{i,\, i+k,\, s}\, Y_s f \qquad (i = 1 \dots r-1;\ k = 1 \dots r-i)$$

bestehen, dass also $Y_1 f \dots Y_i f$ jedesmal eine i-gliedrige Untergruppe erzeugen, die in der r-gliedrigen invariant ist.

Es fällt uns selbstverständlich nicht ein, alle diese Sätze nochmals zu beweisen; nur dem Beweise des zweiten von ihnen wollen wir noch ein paar Worte widmen, um daran die Anwendung der adjungirten Gruppe zu erläutern.

Es sei: $X_1 f \dots X_{r-m} f$ die $(r-m)$-gliedrige integrable Untergruppe der G_r: $X_1 f \dots X_r f$ und E_{r-m-1} sei die $(r-m-1)$-fach ausgedehnte ebene Mannigfaltigkeit, durch die die Gruppe: $X_1 f \dots X_{r-m} f$ in dem R_{r-1} der ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen: $\Sigma e_k X_k f$ abgebildet wird. Dann lässt die Untergruppe: $E_1 f \dots E_{r-m} f$ der Adjungirten der G_r die Mannigfaltigkeit E_{r-m-1} invariant (vgl. S. 673) und transformirt das ebene Bündel der ∞^{m-1} hindurchgehenden $(r-m)$-fach ausgedehnten ebenen Mannigfaltigkeiten des R_{r-1} durch eine isomorphe projective Gruppe g. Nun ist die Gruppe: $X_1 f \dots X_{r-m} f$ integrabel, die mit ihr isomorphe Gruppe: $E_1 f \dots E_{r-m} f$ nach Satz 5 ebenfalls, also ist auch g integrabel und lässt nach Satz 7 mindestens eine $(r-m)$-fach ausgedehnte ebene Mannigfaltigkeit durch E_{r-m-1} in Ruhe. Daraus aber folgt nach Satz 1, S. 674, dass die Gruppe: $X_1 f \dots X_{r-m} f$ wirklich in einer $(r-m+1)$-gliedrigen Untergruppe der G_r steckt. Der Satz 8 ist also bewiesen.

Wir erwähnen noch, dass der Satz 8 das Theorem 106 auf S. 593 von Abschn. I als besonderen Fall umfasst, denn alle eingliedrigen und ebenso alle zweigliedrigen Gruppen sind augenscheinlich integrabel.

Schliesslich wollen wir noch einen Satz aufstellen, der in Abschn. I

nicht besonders formulirt worden ist, obwohl er aus den Entwicklungen des dortigen Kap. 27 unmittelbar folgt. Er lautet so:

Satz 10. *Jede invariante $(r-m)$-gliedrige Untergruppe einer r-gliedrigen integrabeln Gruppe ist in mindestens einer $(r-m+1)$-gliedrigen invarianten Untergruppe der r-gliedrigen enthalten.*

Der Beweis ist sehr einfach. Hat nämlich E_{r-m-1} dieselbe Bedeutung wie oben, so bleibt E_{r-m-1} bei der adjungirten Gruppe: $E_1 f \ldots E_r f$ der r-gliedrigen invariant (s. S. 673) und die ∞^{m-1} durch E_{r-m-1} gehenden $(r-m)$-fach ausgedehnten ebenen Mannigfaltigkeiten werden bei der Adjungirten durch eine isomorphe projective Gruppe transformirt, die offenbar integrabel ist und daher mindestens eine von ihnen invariant lässt; jede solche invariante Mannigfaltigkeit stellt dann eine $(r-m+1)$-gliedrige invariante Untergruppe der r-gliedrigen dar.

§ 132.

Im Laufe unsrer Untersuchungen sind uns verschiedene Male Gruppen begegnet, von denen sich herausstellte, dass sie einfach waren (s. Abschn. I, S. 560, Theor. 97; Abschn. II, S. 521 f.; Abschn. III, S. 357, Theor. 29). Wir wollen jetzt die verschiedenen Klassen von einfachen Gruppen, zu denen wir auf diese Weise geführt worden sind, zusammenstellen*).

Theorem 54. *Die einfachen Gruppen, die uns bisher begegnet sind, zerfallen in vier Klassen; jede dieser vier Klassen umfasst unendlich viele verschiedene Zusammensetzungen von einfachen Gruppen und zwar ist die Mannigfaltigkeit der in einer solchen Klasse enthaltenen verschiedenen Zusammensetzungen von derselben Mächtigkeit wie die Mannigfaltigkeit der positiven ganzen Zahlen.*

Jede der ersten *Klasse angehörige einfache Gruppe ist mit der allgemeinen projectiven Gruppe eines bestimmten Raumes gleichzusammengesetzt; ist dieser Raum n-fach ausgedehnt, so ist die Gruppe $n(n+2)$-gliedrig, wo n jede positive ganze Zahl sein kann.*

Der zweiten *Klasse gehört jede Gruppe an, die mit der grössten continuirlichen projectiven Gruppe eines nicht ausgearteten linearen Complexes in einem Raume von ungerader*

*) Lie hat schon längst auf das Vorhandensein dieser vier Klassen von einfachen Gruppen hingewiesen (s. Math. Ann. Bd. 25, S. 130 (1885); Norw. Archiv Bd. X, S. 413 (1885); Leipz. Ber. 1889, S. 325.

Dimensionenzahl gleichzusammengesetzt ist. Ist dieser Raum $(2n-1)$*-fach ausgedehnt, so hat die betreffende Gruppe* $n(2n+1)$ *Parameter, wo n ebenfalls jede positive ganze Zahl sein kann.*

Gehört eine einfache Gruppe der dritten *Klasse an, so ist sie gleichzusammengesetzt mit der grössten continuirlichen projectiven Gruppe, die eine nicht ausgeartete Mannigfaltigkeit zweiten Grades in einem Raume von ungerader Dimensionenzahl invariant lässt. Ist dieser Raum* $(2n-1)$*-fach ausgedehnt, so hat die Gliederzahl der Gruppe den Werth* $n(2n-1)$*, wo n jede positive ganze Zahl sein kann, mit Ausschluss*) des Werthes:* $n=2$.

Endlich ist jede der vierten *Klasse angehörige einfache Gruppe gleichzusammengesetzt mit der grössten projectiven Gruppe, die eine nicht ausgeartete Mannigfaltigkeit zweiten Grades in einem Raume von gerader Dimensionenzahl invariant lässt. Ist dieser Raum* $2n$*-fach ausgedehnt, so hat die Gruppe* $n(2n+1)$ *Parameter und zwar kann hier n wieder jede positive ganze Zahl sein.*

Unter den in Theorem 54 aufgezählten Gruppen giebt es allerdings einige, die zwei oder gar drei von unsern vier Klassen angehören. Die erste, zweite und vierte Klasse liefern nämlich für $n=1$ drei gleichzusammengesetzte Gruppen, ebenso liefern die erste und dritte Klasse für $n=3$ zwei Gruppen von derselben Zusammensetzung und endlich erhält man für $n=2$ in der zweiten und vierten Klasse zwei gleichzusammengesetzte Gruppen. Damit sind aber, wie sich zeigen lässt, alle Fälle erschöpft, in denen eine Gruppe zwei verschiedenen unsrer vier Klassen angehören kann; man erhält also lauter verschiedene Zusammensetzungen einfacher Gruppen, wenn man bei der zweiten Klasse den Fall: $n=1$, bei der dritten den Fall: $n=3$ und bei der vierten die Fälle: $n=1$ und $n=2$ ausschliesst.

Ob es ausser diesen vier Klassen noch andre Klassen von einfachen Gruppen giebt oder ob es überhaupt noch andre einfache Gruppen giebt, das ist eine Frage, die wir an dieser Stelle unberührt lassen.

---

*) Der Werth $n=1$ braucht nicht ausgeschlossen zu werden, denn nach unsrer Definition der einfachen Gruppen (s. Abschn. I, S. 264) müssen wir auch jede eingliedrige Gruppe als einfach bezeichnen. Allerdings nimmt die eingliedrige Gruppe unter den einfachen Gruppen insofern eine besondere Stellung ein, als sie eine ausgezeichnete infinitesimale Transformation enthält. Man sollte deshalb, wenn man allgemeine Sätze über einfache Gruppen aufstellt, immer ausdrücklich hervorheben, ob sie auch für die eingliedrigen Gruppen gelten oder nicht.

Wir begnügen uns damit, einige Sätze über solche r-gliedrige einfache Gruppen zusammenzustellen, deren grösste Untergruppen entweder $r-1$ oder $r-2$ oder $r-3$ Parameter enthalten.

Alle diese Sätze beruhen auf dem folgenden allgemeinen

Satz 11. *Enthält eine r-gliedrige einfache Gruppe G_r eine Untergruppe mit $r-q$ Parametern, nicht aber eine mit mehr als $r-q$ Parametern, so giebt es in einem Raume von weniger als q Dimensionen niemals eine r-gliedrige Gruppe von Punkttransformationen, die mit G_r gleichzusammengesetzt ist; dagegen giebt es in einem Raume von q Dimensionen immer derartige Gruppen und zwar sind alle diese Gruppen primitiv.*

Dieser Satz ist eigentlich nur die Zusammenfassung früherer Resultate. Gäbe es nämlich in einem Raume von $m < q$ Dimensionen eine r-gliedrige Gruppe von Punkttransformationen, die mit G_r gleichzusammengesetzt wäre, so müsste G_r nach Abschn. I, S. 206, Satz 3 eine Untergruppe mit mindestens $r-m$ Parametern enthalten, was der Voraussetzung widerspräche. Dass es andrerseits in einem Raume von q Dimensionen r-gliedrige Gruppen von Punkttransformationen giebt, die mit G_r gleichzusammengesetzt sind, folgt aus Theor. 81 auf S. 446 f. von Abschn. I, denn, da G_r einfach ist, so kann die $(r-q)$-gliedrige Untergruppe der G_r weder selbst in der G_r invariant sein, noch eine Untergruppe enthalten, die in der G_r invariant ist. Dass endlich eine mit G_r gleichzusammengesetzte Gruppe von Punkttransformationen im q-fach ausgedehnten Raume nicht imprimitiv sein kann, sieht man so ein: Wäre sie imprimitiv, so zerfiele der betreffende Raum in ∞^{q-m} m-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten $(0 < m < q)$, die entweder alle einzeln invariant blieben oder durch eine mit G_r gleichzusammengesetzte Gruppe unter einander vertauscht würden. Der zweite Fall ist nach dem Früheren ausgeschlossen; im ersten Falle würden nach Abschn. I, S. 310, Satz 8 die ∞^m Punkte jeder invarianten m-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit durch eine mit G_r gleichzusammengesetzte Gruppe transformirt werden, also kann auch dieser Fall nicht eintreten.

Will man übrigens im Raume von q Dimensionen eine mit G_r gleichzusammengesetzte Gruppe von Punkttransformationen aufstellen, so kann man folgendermassen verfahren: Die $(r-q)$-gliedrige Untergruppe der G_r wird in dem R_{r-1} der ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen der G_r durch eine $(r-q-1)$-fach ausgedehnte ebene Mannigfaltigkeit E_{r-q-1} dargestellt. Da die Untergruppe in keiner grösseren Untergruppe der G_r invariant ist und da die adjungirte

Gruppe der G_r r-gliedrig ist, so bleibt E_{r-q-1} nur bei der $(r-q)$-gliedrigen Untergruppe der Adjungirten invariant, deren Bild sie ist. Demnach nimmt E_{r-q-1} bei den ∞^r endlichen Transformationen der Adjungirten gerade ∞^q verschiedene Lagen an (s. Abschn. I, S. 482, Satz 10), die durch eine mit G_r gleichzusammengesetzte Gruppe unter einander vertauscht werden. Führt man diese ∞^q Lagen als Punkte in einem q-fach ausgedehnten Raume ein, so erhält man in diesem Raume die verlangte mit G_r gleichzusammengesetzte Gruppe von Punkttransformationen. Diese Methode versagt allerdings für $r=1$.

Kennt man in einem Raume von q Dimensionen alle endlichen continuirlichen primitiven Gruppen von Punkttransformationen, so kann man dem Satze 11 zufolge sofort die Zusammensetzungen aller r-gliedrigen einfachen Gruppen angeben, die eine Untergruppe mit $r-q$, nicht aber eine mit mehr Parametern enthalten; man braucht ja blos unter den betreffenden primitiven Gruppen alle die auszuwählen, die einfach sind. Nun haben wir alle primitiven Gruppen auf der Geraden, in der Ebene und im gewöhnlichen Raume bestimmt (s. S. 6, Theor. 1; S. 35, Theor. 5 und S. 139, Theor. 9) und unter diesen giebt es nur folgende, die einfach sind: auf der Geraden die eingliedrige Gruppe der Translationen und die dreigliedrige allgemeine projective Gruppe, in der Ebene die achtgliedrige allgemeine projective Gruppe, im gewöhnlichen Raume endlich die fünfzehngliedrige allgemeine projective Gruppe und ausserdem die conforme Gruppe und die projective Gruppe eines linearen Complexes, die beide zehngliedrig und überdies gleichzusammengesetzt sind (s. S. 140, Theor. 10).

Wir wollen diese Ergebnisse wegen ihrer grossen Wichtigkeit in drei verschiedenen Theoremen aussprechen*):

Theorem 55. *Enthält eine r-gliedrige einfache Gruppe eine Untergruppe mit $r-1$ Parametern, so ist sie entweder eingliedrig oder sie ist dreigliedrig und mit der allgemeinen projectiven Gruppe auf der Geraden gleichzusammengesetzt.*

Theorem 56. *Enthält eine r-gliedrige einfache Gruppe eine $(r-2)$-gliedrige Untergruppe, nicht aber eine $(r-1)$-gliedrige, so ist sie achtgliedrig und mit der allgemeinen projectiven Gruppe der Ebene gleichzusammengesetzt.*

Theorem 57. *Enthält eine r-gliedrige einfache Gruppe eine*

*) Lie, Ges. d. Wiss. zu Christiania 1883; Math. Ann. Bd. 25, S. 132—134 (1885).

Untergruppe mit $r-3$ Parametern, nicht aber eine mit mehr als $r-3$, so ist sie entweder fünfzehngliedrig oder zehngliedrig und zwar im ersten Falle gleichzusammengesetzt mit der allgemeinen projectiven Gruppe des gewöhnlichen Raumes, im zweiten Falle gleichzusammengesetzt mit der conformen Gruppe dieses Raumes oder, was auf dasselbe hinauskommt, mit der projectiven Gruppe eines nicht ausgearteten linearen Complexes in diesem Raume.

§ 133.

Die im vorigen Paragraphen entwickelten Sätze über r-gliedrige einfache Gruppen, deren grösste Untergruppen entweder $r-1$ oder $r-2$ oder $r-3$ Parameter enthalten, sind besondere Fälle gewisser Sätze über beliebige r-gliedrige Gruppen von dieser Beschaffenheit. Wir müssen aber bei Ableitung dieser allgemeinen Sätze den Fall, dass die grössten Untergruppen einer r-gliedrigen Gruppe $(r-1)$-gliedrig sind, besonders behandeln.

Es sei G_r eine r-gliedrige Gruppe, die eine $(r-1)$-gliedrige nicht invariante Untergruppe G_{r-1} enthält; E_{r-2} sei die ebene $(r-2)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, durch die G_{r-1} in dem R_{r-1} der ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen der G_r dargestellt wird. Unter diesen Voraussetzungen bleibt E_{r-2} nur bei den infinitesimalen Transformationen der adjungirten Gruppe der G_r invariant, die durch die Punkte von E_{r-2} abgebildet werden, es nimmt daher bei der adjungirten Gruppe ∞^1 verschiedene Lagen an und diese ∞^1 Lagen werden von der adjungirten Gruppe durch eine mit G_r isomorphe Gruppe γ unter einander vertauscht.

Als Gruppe einer einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit kann γ höchstens dreigliedrig sein, folglich enthält G_r eine $(r-q)$-gliedrige invariante Untergruppe G_{r-q}, wo q einen der Werthe 1, 2, 3 besitzt. Ist E_{r-q-1} das Bild dieser invarianten G_{r-q}, so lassen alle infinitesimalen Transformationen der adjungirten Gruppe, die durch Punkte von E_{r-q-1} abgebildet werden, jede einzelne der ∞^1 Lagen von E_{r-2} invariant, mithin ist E_{r-q-1} in E_{r-2} und ebenso in jeder der ∞^1 Lagen von E_{r-2} enthalten, das heisst die invariante Untergruppe G_{r-q} der G_r ist der Schnitt der ∞^1 $(r-1)$-gliedrigen Untergruppen von G_r, die innerhalb G_r mit G_{r-1} gleichberechtigt sind.

Da G_{r-1} keine invariante Untergruppe von G_r sein sollte, ergiebt sich hieraus zunächst, dass q niemals den Werth 1 haben kann. Ist nun $q=2$, so wird die invariante Untergruppe G_{r-q} im R_{r-1} durch

eine ebene $(r-3)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit E_{r-3} dargestellt. Durch E_{r-3} gehen innerhalb des R_{r-1} gerade ∞^1 ebene $(r-2)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten, die ein ebenes Büschel bilden und unter denen natürlich alle die ∞^1 Lagen von E_{r-2} enthalten sind. Da diese ∞^1 Lagen bei der adjungirten Gruppe in unserm Falle grade zweigliedrig transformirt werden, so wird das ebene Büschel der ∞^1 durch E_{r-3} gehenden $(r-2)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten durch eine zweigliedrige projective Gruppe transformirt, es bleibt also (s. Theor. 2, S. 17) eine aber auch nur eine Mannigfaltigkeit des Büschels in Ruhe, mit andern Worten: die invariante Untergruppe G_{r-2} der G_r steckt in einer aber auch nur in einer invarianten $(r-1)$-gliedrigen Untergruppe der G_r. Diese invariante $(r-1)$-gliedrige Untergruppe bildet einen Gränzfall der ∞^1 mit G_{r-1} gleichberechtigten Untergruppen.

Wir sehen hieraus, dass im Falle $q=2$ die Zusammensetzung unsrer G_r durch Gleichungen von der Form:

$$(17)\qquad \begin{cases} (X_k\, Y_1) = \sum_1^{r-2 s} a_{ks}\, X_s f \\ (X_k\, Y_2) = \sum_1^{r-2 s} b_{ks}\, X_s f \\ (X_k\, X_j) = \sum_1^{r-2 s} c_{kjs} X_s f \\ (Y_1\, Y_2) = \omega\, Y_2 f + \sum_1^{r-2 s} c_s\, X_s f \\ \qquad\qquad (k, j = 1 \ldots r-2) \end{cases}$$

dargestellt wird, wo ω von Null verschieden ist und daher $=1$ gemacht werden kann. Die ∞^1 mit G_{r-1} gleichberechtigten Untergruppen der G_r haben die Form: $X_1 f \ldots X_{r-2} f$, $Y_1 f + \lambda\, Y_2 f$, unter λ einen Parameter verstanden; die $(r-2)$-gliedrige invariante Untergruppe der G_r wird von $X_1 f \ldots X_{r-2} f$ und die $(r-1)$-gliedrige invariante von: $X_1 f \ldots X_{r-2} f$, $Y_2 f$ erzeugt.

Ist andrerseits $q=3$, so werden die ∞^1 Lagen von E_{r-2} bei der adjungirten Gruppe durch eine dreigliedrige Gruppe transformirt, die mit der allgemeinen projectiven Gruppe auf der Geraden gleichzusammengesetzt und mit der G_r isomorph ist. Die Zusammensetzung der G_r lautet daher, wie man leicht sieht, folgendermassen:

$$(18)\qquad \begin{cases} (X_k Y_\mu) = \sum_1^{r-3} a_{k\mu s} X_s f \\ (X_k X_j) = \sum_1^{r-3} b_{kjs} X_s f \\ (Y_1 Y_2) = Y_1 f + \sum_1^{r-3} a_s X_s f \\ (Y_1 Y_3) = 2\, Y_2 f + \sum_1^{r-3} b_s X_s f \\ (Y_2 Y_3) = Y_3 f + \sum_1^{r} c_s X_s f \\ (k, j = 1 \ldots r-3;\ \mu = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Alles das fassen wir jetzt zusammen in dem

Theorem 58*). *Enthält eine r-gliedrige Gruppe G_r eine $(r-1)$-gliedrige nicht invariante Untergruppe G_{r-1}, so enthält sie ∞^1 mit G_{r-1} gleichberechtigte Untergruppen, die bei der adjungirten Gruppe der G_r entweder durch eine zweigliedrige oder durch eine dreigliedrige mit G_r isomorphe Gruppe unter einander vertauscht werden. Tritt der erste von diesen beiden Fällen ein, so enthält G_{r-1} eine $(r-2)$-gliedrige invariante Untergruppe G_{r-2}, die zugleich in G_r invariant ist und die überdies in einer $(r-1)$-gliedrigen invarianten Untergruppe der G_r steckt; die Zusammensetzung der G_r wird in diesem Falle durch Gleichungen von der Form* (17) *dargestellt, wo $\omega = 1$ gesetzt werden kann. Tritt der zweite Fall ein, so enthält G_{r-1} eine $(r-3)$-gliedrige invariante Untergruppe G_{r-3}, die zugleich in G_r invariant ist; die Zusammensetzung der G_r wird dann durch Gleichungen von der Form* (18) *dargestellt.*

Wir wenden uns jetzt zur Untersuchung der r-gliedrigen Gruppen, deren grösste Untergruppen weniger als $r-1$ Parameter enthalten. Bei der Behandlung dieser Gruppen werden wir uns auf das folgende allgemeine Theorem stützen:

Theorem 59. *Enthält eine r-gliedrige Gruppe G_r eine $(r-m)$-gliedrige Untergruppe G_{r-m}, jedoch keine Untergruppe mit*

*) Lie, Math. Ann. Bd. 25, S. 133, Satz 18.

mehr als $r-m$ Parametern und ist $m>1$, so giebt es in G_r gerade ∞^m verschiedene $(r-m)$-gliedrige Untergruppen, die innerhalb G_r mit G_{r-m} gleichberechtigt sind und die bei der adjungirten Gruppe der G_r durch eine mit G_r isomorphe Gruppe γ unter einander vertauscht werden. Ist diese Gruppe γ q-gliedrig, so ist $q>m$ und es giebt in G_r eine $(r-q)$-gliedrige invariante Untergruppe, die in G_{r-m} und in allen damit gleichberechtigten Untergruppen von G_r enthalten ist. Ausserdem ist noch zu bemerken, dass γ zwar $(q-m)$-gliedrige Untergruppen enthält, aber keine mit mehr als $q-m$ Parametern, woraus insbesondre folgt, dass γ die ∞^m mit G_{r-m} gleichberechtigten Untergruppen von G_r primitiv transformirt.

Den Beweis dieses Theorems führen wir so:

G_{r-m} steckt unter den gemachten Voraussetzungen in keiner grösseren Untergruppe von G_r, es kann daher auch in keiner grösseren Untergruppe von G_r invariant sein. Ebensowenig ist G_{r-m} in G_r selbst invariant, denn dann erzeugte augenscheinlich jede in G_{r-m} nicht enthaltene infinitesimale Transformation von G_r zusammen mit den infinitesimalen Transformationen von G_{r-m} eine $(r-m+1)$-gliedrige Untergruppe von G_r.

Ist nun E_{r-m-1} die ebene $(r-m-1)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, durch die G_{r-m} in dem R_{r-1} der ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen von G_r abgebildet wird, so bleibt E_{r-m-1} wegen der Beschaffenheit von G_{r-m} nur bei den infinitesimalen Transformationen der adjungirten Gruppe von G_r invariant, die den Punkten von E_{r-m-1} entsprechen. Hieraus folgt, dass die adjungirte Gruppe von G_r gerade m unabhängige infinitesimale Transformationen enthält, die E_{r-m-1} nicht invariant lassen und aus denen keine infinitesimale Transformation linear ableitbar ist, die E_{r-m-1} invariant lässt. Demnach (s. Abschn. I, S. 482, Satz 10) nimmt E_{r-m-1} bei der adjungirten Gruppe der G_r gerade ∞^m verschiedene Lagen an; das aber heisst nichts andres, als dass es in G_r gerade ∞^m verschiedene $(r-m)$-gliedrige Untergruppen giebt, die innerhalb G_r mit G_{r-m} gleichberechtigt sind.

Die ∞^m Lagen von E_{r-m-1}, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die ∞^m mit G_{r-m} gleichberechtigten Untergruppen von G_r werden bei der adjungirten Gruppe von G_r durch eine mit G_r isomorphe Gruppe γ transformirt, deren Gliederzahl den Werth q haben mag. Dann giebt es nothwendig in G_r eine $(r-q)$-gliedrige invariante Untergruppe G_{r-q}, deren sämmtlichen Transformationen die identische Transformation entspricht, sobald man G_r und γ isomorph auf ein-

ander bezieht (s. Abschn. I, S. 300 ff.). Ist daher E_{r-q-1} das Bild von G_{r-q} im R_{r-1}, so lässt jede infinitesimale Transformation der adjungirten Gruppe, die im R_{r-1} durch einen Punkt von E_{r-q-1} abgebildet wird, jede einzelne der ∞^m Lagen von E_{r-m-1} invariant. Hieraus aber folgt wegen der oben angegebenen Eigenschaften von E_{r-m-1}, dass E_{r-q-1} auf E_{r-m-1} liegt, dass also die invariante Untergruppe G_{r-q} der G_r in G_{r-m} und natürlich auch in jeder mit G_{r-m} gleichberechtigten Untergruppe von G_r enthalten ist. Da überdies G_{r-m} keine invariante Untergruppe von G_r ist, so muss $r-q<r-m$ sein, also: $q>m$.

Dass γ $(q-m)$-gliedrige Untergruppen enthält, liegt auf der Hand, denn E_{r-m-1} bleibt bei der $(r-m)$-gliedrigen Untergruppe G_{r-m} von G_r invariant und der Untergruppe G_{r-m} entspricht innerhalb γ eine $(q-m)$-gliedrige mit G_{r-m} isomorphe Gruppe, weil ja G_{r-m} die invariante $(r-q)$-gliedrige Untergruppe G_{r-q} enthält, die der identischen Transformation entspricht, wenn man G_r und γ isomorph auf einander bezieht (a. a. O. S. 302 f.). Aus den Entwicklungen a. a. O. ergiebt sich ferner, dass γ keine Untergruppe mit mehr als $q-m$ Parametern enthalten kann, denn träte eine solche Untergruppe auf, so könnte man sofort eine Untergruppe von G_r angeben, die mehr als $r-m$ Parameter enthielte, das aber wäre gegen die Voraussetzung. Endlich ist nunmehr auch klar, dass γ die ∞^m Lagen von E_{r-m-1} primitiv unter einander vertauscht, denn transformirte es die Schaar dieser ∞^m Lagen imprimitiv, so enthielte es sicher eine Untergruppe mit mehr als $q-m$ Parametern.

Damit ist das Theorem 59 vollständig bewiesen.

Will man die Zusammensetzungen aller r-gliedrigen Gruppen G_r bestimmen, die eine $(r-m)$-gliedrige Untergruppe G_{r-m}, nicht aber eine Untergruppe mit $r-m+1$ oder noch mehr Parametern enthalten $(m>1)$, so ist es nöthig oder doch wenigstens vortheilhaft, in m Veränderlichen alle endlichen continuirlichen primitiven Gruppen von Punkttransformationen zu kennen, deren grösste Untergruppen gerade m Parameter weniger enthalten als die Gruppen selbst. Nach Theorem 59 ist ja die dort definirte Gruppe γ immer eine primitive Gruppe des m-fach ausgedehnten Raumes, die die eben geschilderte Beschaffenheit hat.

Für die beiden Fälle $m=2$ und $m=3$ sind wir nun in der Lage, alle primitiven Gruppen von der geschilderten Beschaffenheit zu kennen. In der Ebene giebt es nur eine r-gliedrige primitive Gruppe, die keine $(r-1)$-gliedrige Untergruppe enthält, nämlich die

achtgliedrige allgemeine projective Gruppe, während die sechsgliedrige allgemeine lineare Gruppe gewisse fünfgliedrige Untergruppen enthält und die fünfgliedrige specielle lineare Gruppe gewisse viergliedrige (s. S. 35, Theor. 5 u. Kap. 5). Andrerseits giebt es im gewöhnlichen dreifach ausgedehnten Raume nur drei r-gliedrige primitive Gruppen, die keine Untergruppen mit mehr als $r-3$ Parametern enthalten, nämlich die fünfzehngliedrige allgemeine projective Gruppe, die zehngliedrige conforme Gruppe und endlich die mit der letztern gleichzusammengesetzte projective Gruppe eines nicht ausgearteten linearen Complexes (s. S. 139, Theor. 9, Abschn. I, S. 569 u. Abschn. II, S. 455). Demnach erhalten wir aus Theorem 59 ohne Weiteres noch die beiden nachstehenden Theoreme*):

Theorem 60. *Enthält eine r-gliedrige Gruppe G_r eine $(r-2)$-gliedrige Untergruppe G_{r-2}, nicht aber eine $(r-1)$-gliedrige Untergruppe, so ist $r \leqq 8$ und es giebt in der G_{r-2} eine $(r-8)$-gliedrige Untergruppe, die in der G_r invariant ist. Die Zusammensetzung der G_r wird durch Relationen von der Form:*

$$(19)\qquad \begin{cases} (Y_\mu\, Y_\nu) = \sum_1^{r-8}{}_\tau\, a_{\mu\nu\tau} X_\tau f + \sum_1^{8}{}_s\, c_{\mu\nu s}\, Y_s f \\ (Y_\mu\, X_k) = \sum_1^{r-8}{}_\tau\, b_{\mu k\tau} X_\tau f \\ (X_k\, X_j) = \sum_1^{r-8}{}_\tau\, h_{kj\tau}\, X_\tau f \\ \qquad (\mu, \nu = 1 \ldots 8;\ k, j = 1 \ldots r-8) \end{cases}$$

bestimmt, und zwar sind hier die $c_{\mu\nu s}$ so beschaffen, dass die Gleichungen:

$$(20)\qquad (\mathfrak{Y}_\mu \mathfrak{Y}_\nu) = \sum_1^{8}{}_s\, c_{\mu\nu\tau}\, \mathfrak{Y}_\tau f \qquad (\mu, \nu = 1 \ldots 8)$$

die Zusammensetzung der achtgliedrigen allgemeinen projectiven Gruppe der Ebene darstellen.

Theorem 61. *Enthält eine r-gliedrige Gruppe G_r eine $(r-3)$-gliedrige Untergruppe G_{r-3}, nicht aber eine Untergruppe mit mehr als $r-3$ Parametern, so ist r mindestens gleich 10. Es können aber zwei Fälle eintreten. Entweder nämlich enthält die G_{r-3} eine $(r-10)$-gliedrige Untergruppe, die in der G_r*

*) Lie, Math. Ann. Bd. 25, S. 134, Theor. VI u. VII.

invariant ist, oder sie enthält eine $(r-15)$-gliedrige Untergruppe, die in der G_r invariant ist. Der zweite Fall kann nur eintreten, wenn $r \geqq 15$ ist. In beiden Fällen wird die Zusammensetzung der G_r durch Relationen von der Form:

$$(21)\qquad \begin{cases} (Y_\mu Y_\nu) = \sum_1^{r-n} {}_\tau\, a_{\mu\nu\tau} X_\tau f + \sum_1^{n} {}_s\, c_{\mu\nu s} Y_s f \\ (Y_\mu X_k) = \sum_1^{r-n} {}_\tau\, b_{\mu k\tau} X_\tau f \\ (X_k X_j) = \sum_1^{r-n} {}_\tau\, h_{kj\tau} X_\tau f \end{cases} \qquad (\mu, \nu = 1 \ldots n;\ k, j = 1 \ldots r-n)$$

bestimmt und zwar ist im ersten Falle $n = 10$ und die Gleichungen:

$$(22)\qquad (\mathfrak{Y}_\mu \mathfrak{Y}_\nu) = \sum_1^{n} {}_s\, c_{\mu\nu s}\, \mathfrak{Y}_s f \qquad (\mu, \nu = 1 \ldots n)$$

stellen die Zusammensetzung der zehngliedrigen projectiven Gruppe eines nicht ausgearteten linearen Complexes im gewöhnlichen Raume dar, im zweiten Falle aber ist $n = 15$ und die Gleichungen (22) stellen die Zusammensetzung der fünfzehngliedrigen allgemeinen projectiven Gruppe des gewöhnlichen Raumes dar.

Wir wollen hier noch einen Satz einschalten, der zwar mit den Sätzen dieses Paragraphen in keinem directen Zusammenhange steht, der aber doch insofern etwas mit ihnen gemein hat, als er von einer invarianten Untergruppe einer r-gliedrigen Gruppe handelt. Der Satz lautet*):

Satz 12. *Ist: $X_1 f \ldots X_r f$ eine r-gliedrige Gruppe von der Zusammensetzung:*

$$(X_i X_k) = \sum_1^{r} {}_s\, c_{iks} X_s f \qquad (i, k = 1 \ldots r)$$

und verschwinden die r Ausdrücke:

*) Lie hat ihn zuerst veröffentlicht in Bd. X seines norw. Archivs auf S. 86 ff. Die hier benutzte Beweismethode hat Lie in dem Jahrbuche über die Fortschr. d. Math. angegeben (1884, S. 325).

$$\sum_1^r{}^s c_{kss} \quad (k = 1 \dots r) \tag{23}$$

nicht sämmtlich, so erzeugen die ∞^{r-2} *infinitesimalen Transformationen:* $\Sigma e_k X_k f$, *die der Bedingung:*

$$\sum_1^r{}^k e_k \sum_1^r{}^s c_{kss} = 0 \tag{24}$$

genügen, eine $(r-1)$*-gliedrige invariante Untergruppe der Gruppe:* $X_1 f \dots X_r f$.

Um diesen Satz zu beweisen, betrachten wir die adjungirte Gruppe:

$$E_k f = \sum_{js}^{1 \dots r} c_{jks} c_j \frac{\partial f}{\partial e_s} \quad (k = 1 \dots r)$$

der Gruppe: $X_1 f \dots X_r f$. Die infinitesimalen Transformationen dieser adjungirten Gruppe sind linear und homogen; diejenigen unter ihnen, die der speciellen linearen homogenen Gruppe des Raumes $e_1 \dots e_r$ angehören, erzeugen daher eine invariante Untergruppe der adjungirten Gruppe (s. Abschn. I, S. 574 f.). Nun aber werden die infinitesimalen Transformationen: $\Sigma u_k E_k f$ der adjungirten Gruppe, die der speciellen linearen homogenen Gruppe angehören, augenscheinlich durch die Gleichung:

$$\sum_1^r{}^s \sum_1^r{}^k c_{sks} u_k = 0$$

bestimmt. Da andrerseits diese infinitesimalen Transformationen eine invariante Untergruppe der Adjungirten erzeugen, so ist klar, dass die Gleichung:

$$\sum_1^r{}^s \sum_1^r{}^k c_{sks} e_k = 0,$$

die nur eine andre Form der Gleichung (24) ist, bei der adjungirten Gruppe invariant bleibt. Hieraus endlich geht hervor, dass die Gleichung (24) eine $(r-1)$-gliedrige invariante Untergruppe der Gruppe: $X_1 f \dots X_r f$ darstellt, es müsste denn sein, dass sie sich auf $0 = 0$ reducirte, was offenbar nur eintritt, wenn die r Ausdrücke (23) sämmtlich verschwinden.

Wir wollen noch erwähnen, dass für eine r-gliedrige Gruppe, die keine $(r-1)$-gliedrige invariante Untergruppe enthält, die r Ausdrücke (23) natürlich alle verschwinden müssen. Hieraus folgt zugleich, *dass eine r-gliedrige Gruppe nur dann ihre eigne Derivirte sein kann, wenn die Ausdrücke* (23) *alle gleich Null sind.*

§ 134.

Im vorigen Paragraphen haben wir den Fall betrachtet, dass eine r-gliedrige Gruppe vorliegt, deren grösste Untergruppen $(r-m)$-gliedrig sind, und haben gezeigt, dass dann jede solche $(r-m)$-gliedrige Untergruppe eine kleinere Untergruppe enthält, die in der ganzen r-gliedrigen Gruppe invariant ist. Wir wollen jetzt die etwas allgemeinere Annahme machen, dass unsre r-gliedrige Gruppe eine solche $(r-m)$-gliedrige Untergruppe enthält, die in keiner grösseren Untergruppe der r-gliedrigen steckt. Wir werden zeigen, dass dann unter gewissen später anzugebenden Voraussetzungen die betreffende $(r-m)$-gliedrige Untergruppe wieder eine invariante Untergruppe enthält; es bleibt dagegen unentschieden, unter welchen Bedingungen die invariante Untergruppe der $(r-m)$-gliedrigen zugleich auch in der r-gliedrigen invariant ist.

Wir behandeln wieder den Fall $m=1$ zuerst und zwar deshalb, weil er mit ganz elementaren Hülfsmitteln erledigt werden kann. Im Falle $m=1$ kommen wir nämlich mit der Bildung Jacobischer Identitäten aus, während wir für $m>1$ einen andern Weg einschlagen müssen.

Für $m=1$ lautet der zu beweisende Satz wie folgt:

Satz 13. *Enthält eine r-gliedrige Gruppe G_r eine nicht invariante $(r-1)$-gliedrige Untergruppe G_{r-1}, so enthält G_{r-1} stets eine invariante $(r-2)$-gliedrige Untergruppe. Dasselbe gilt von jeder $(r-1)$-gliedrigen Untergruppe der G_r, die innerhalb G_r mit G_{r-1} gleichberechtigt ist.*

In der That, es seien $X_1 f \dots X_{r-1} f$, Yf unabhängige infinitesimale Transformationen der G_r und $X_1 f \dots X_{r-1} f$ sei die nicht invariante G_{r-1}. Dann bestehen Relationen von der Form:

$$(25) \qquad (X_i X_k) = \sum_1^{r-1} {}_s\, c_{iks} X_s f \quad (i, k = 1 \dots r-1)$$

und ausserdem sind die $r-1$ Ausdrücke $(X_i Y)$ nicht alle von Yf frei, wir können uns daher $X_1 f \dots X_{r-1} f$ immer so gewählt denken, dass $(X_1 Y) \dots (X_{r-2} Y)$ von Yf frei sind:

$$(25') \qquad (X_\mu Y) = \sum_1^{r-1} {}_s\, a_{\mu s} X_s f \quad (\mu = 1 \dots r-2),$$

während $(X_{r-1} Y)$ das Yf enthält:

$$(25'') \qquad (X_{r-1} Y) = Yf + \sum_1^{r-1} {}_s\, b_s X_s f.$$

Dass hier der Factor von Yf auf der rechten Seite gleich 1 gesetzt werden darf, wie wir es gethan haben, liegt auf der Hand, denn man kann ja $X_{r-1}f$ mit jedem beliebigen endlichen Factor multipliciren.

Wir bilden jetzt die Identität zwischen $X_\mu f$, $X_\nu f$ und Yf für $\mu, \nu = 1 \ldots r-2$:

$$((X_\mu X_\nu) Y) + ((X_\nu Y) X_\mu) + ((Y X_\mu) X_\nu) \equiv 0,$$

berücksichtigen aber nur das Glied mit Yf und finden so:

$$c_{\mu,\,\nu,\,r-1} = 0 \quad (\mu, \nu = 1 \ldots r-2).$$

Demnach erzeugen $X_1 f \ldots X_{r-2} f$ eine $(r-2)$-gliedrige Gruppe. Um nun noch zu beweisen, dass diese $(r-2)$-gliedrige Gruppe in der G_{r-1}: $X_1 f \ldots X_{r-2} f$, $X_{r-1} f$ invariant ist, bilden wir für $\mu = 1 \ldots r-2$ die Identität:

$$((X_\mu X_{r-1}) Y) + ((X_{r-1} Y) X_\mu) + ((Y X_\mu) X_{r-1}) \equiv 0.$$

Hier liefert der Faktor von Yf sofort: $c_{\mu,\,r-1,\,r-1} = 0$, für $\mu = 1 \ldots r-2$, also ist die Gruppe: $X_1 f \ldots X_{r-2} f$ wirklich in der G_{r-1} invariant. Daraus aber folgt, dass auch jede innerhalb G_r mit G_{r-1} gleichberechtigte Untergruppe eine $(r-2)$-gliedrige invariante Untergruppe enthält; unser Satz ist also bewiesen.

Wir betrachten jetzt den allgemeinen Fall. Es sei G_r eine r-gliedrige Gruppe mit einer $(r-m)$-gliedrigen Untergruppe G_{r-m}, die in keiner grösseren Untergruppe von G_r steckt. Um den Fall $m = 1$ mitzunehmen, müssen wir noch die Forderung hinzufügen, dass für $m = 1$ die G_{r-m} nicht in der G_r invariant sei. Für $m > 1$ ist das überflüssig, denn es ergiebt sich da genau so wie auf S. 689, dass G_{r-m} weder in einer grösseren Untergruppe von G_r noch in G_r selbst invariant sein kann.

Da die G_{r-m} in keiner grösseren Untergruppe der G_r und auch nicht in G_r selbst invariant ist, so nimmt die $(r-m-1)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit E_{r-m-1}, durch die G_{r-m} in dem R_{r-1} der ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen von G_r abgebildet wird, bei der adjungirten Gruppe von G_r gerade ∞^m verschiedene Lagen an (vgl. S. 689), es giebt also innerhalb der G_r gerade ∞^m verschiedene mit G_{r-m} gleichberechtigte Untergruppen. Dabei sind aber zwei verschiedene Fälle denkbar. Entweder erfüllen die ∞^m Lagen von E_{r-m-1} den ganzen R_{r-1}, so dass durch jeden Punkt von allgemeiner Lage in dem R_{r-1} eine discrete Anzahl von den ∞^m Lagen vom E_{r-m-1} hindurchgeht, oder sie erfüllen den R_{r-1} nicht, sie liegen also sämmtlich auf einer Mannigfaltigkeit von höchstens $r-2$ Dimensionen.

Allerdings ist zu bemerken, dass hier für $m = 1$ der zweite Fall überhaupt nicht eintreten kann.

Ist zunächst $m = 1$, so schneiden sich je zwei unendlich benachbarte unter den ∞^1 Lagen von E_{r-2} in einer ebenen $(r-3)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit; die ∞^1 Lagen von E_{r-2} besitzen daher ein Umhüllungsgebilde, das von jeder der ∞^1 Lagen von E_{r-2} in einer ebenen $(r-3)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit berührt wird. Da der Inbegriff der ∞^1 Lagen von E_{r-2} bei der adjungirten Gruppe der G_r invariant bleibt, so muss auch dieses Umhüllungsgebilde bei der adjungirten Gruppe invariant bleiben. Betrachten wir nun insbesondere die Untergruppe der Adjungirten, die durch E_{r-2} abgebildet wird. Diese Untergruppe lässt E_{r-2} und zugleich das vorhin besprochene Umhüllungsgebilde in Ruhe, folglich lässt sie auch die ebene $(r-3)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit E_{r-3} in Ruhe, längs der E_{r-2} das Umhüllungsgebilde berührt. Hieraus aber ergiebt sich sofort, dass E_{r-3} eine $(r-2)$-gliedrige invariante Untergruppe von G_{r-1} darstellt. Ebenso giebt es natürlich in jeder der ∞^1 Untergruppen von G_r, die innerhalb G_r mit G_{r-1} gleichberechtigt sind, eine $(r-2)$-gliedrige invariante Untergruppe.

Damit sind wir wieder zu dem Satze 13, S. 694 gelangt, wir haben aber jetzt diesen Satz in einer neuen Weise abgeleitet, in einer Weise, die auch für $m > 1$ anwendbar ist.

In der That, gelingt es uns auch für $m \geqslant 1$ nachzuweisen, dass die ∞^m Lagen von E_{r-m-1} ein Umhüllungsgebilde besitzen, so können wir dieselben Ueberlegungen anstellen wie für $m = 1$. Dieses Umhüllungsgebilde bleibt nämlich bei der adjungirten Gruppe invariant und hat mit jeder der ∞^m Lagen von E_{r-m-1} eine krumme oder ebene Mannigfaltigkeit gemein, die mindestens aus einem Punkte besteht und andrerseits höchstens $(r-m-2)$-fach ausgedehnt ist. Ist diese Mannigfaltigkeit eben, so ergiebt sich wie vorhin, dass jede der ∞^m Untergruppen von G_r, die innerhalb G_r mit G_{r-m} gleichberechtigt sind, eine invariante Untergruppe enthält, die höchstens $(r-m-1)$-gliedrig ist, die aber andrerseits auch nicht blos aus der identischen Transformation besteht.

Es fragt sich jetzt nur noch, unter welchen Bedingungen die ∞^m Lagen unsrer E_{r-m-1} ein derartiges Umhüllungsgebilde besitzen. Wir werden nachher zeigen, dass sie wenigstens immer dann eines besitzen, wenn der erste der beiden oben unterschiedenen Fälle eintritt, wenn also die ∞^m Lagen von E_{r-m-1} den ganzen R_{r-1} erfüllen. Wir wollen daher jetzt gleich das Theorem aussprechen, das sich hieraus durch Verbindung mit den obigen Betrachtungen ergiebt:

Theorem 62*). *Enthält eine r-gliedrige Gruppe G_r eine $(r-m)$-gliedrige Untergruppe G_{r-m}, die in keiner grösseren Untergruppe der G_r steckt und ist diese Untergruppe ausserdem so beschaffen, dass jede infinitesimale Transformation von allgemeiner Lage der G_r mindestens einer $(r-m)$-gliedrigen Untergruppe von G_r angehört, die innerhalb der G_r mit G_{r-m} gleichberechtigt ist, so enthält G_r eine Schaar von infinitesimalen Transformationen, die bei der adjungirten Gruppe der G_r invariant bleibt und die mit G_{r-m} mindestens eine und höchstens ∞^{r-m-2} infinitesimale Transformationen gemein hat. Bilden die infinitesimalen Transformationen, die G_{r-m} mit dieser Schaar gemein hat, eine ebene Mannigfaltigkeit, so erzeugen sie eine invariante Untergruppe von G_{r-m}. Entsprechendes gilt von jeder innerhalb G_r mit G_{r-m} gleichberechtigten Untergruppe.*

Wir müssen jetzt noch zeigen, dass die ∞^m Lagen von E_{r-m-1} unter der oben gemachten Voraussetzung wirklich immer ein Umhüllungsgebilde besitzen. Wir thun das, indem wir den folgenden allgemeinen Satz beweisen, der an und für sich von grossem Interesse ist und der in dieser Allgemeinheit neu sein dürfte**):

Satz 14. *Hat man in einem $(n+1)$-fach ausgedehnten Raume R_{n+1} eine Schaar von ∞^{m+1} $(n-m)$-fach ausgedehnten ebenen Mannigfaltigkeiten und ist diese Schaar so beschaffen, dass sie den ganzen Raum erfüllt, dass also durch jeden Punkt von allgemeiner Lage eine discrete Anzahl von Mannigfaltigkeiten hindurchgeht, so besitzt diese Schaar immer ein Umhüllungsgebilde, das mit jeder Mannigfaltigkeit M der Schaar eine krumme oder ebene Mannigfaltigkeit M' gemein hat und das jedesmal von M längs der Mannigfaltigkeit M' in einem gewissen Sinne berührt wird.*

Um diesen Satz zu beweisen, wählen wir $z, x_1 \ldots x_n$ zu rechtwinkligen Coordinaten der Punkte des R_{n+1} und zwar, was immer

*) Für $m = 1$ geht dieses Theorem in den Satz 13 auf S. 694 über, nur stellt es die Existenz einer invarianten Untergruppe der G_{r-1} nicht so unbedingt fest wie jener Satz. Dass wir in das Theorem nicht die Voraussetzung mit aufgenommen haben, die G_{r-m} solle für $m = 1$ nicht in der G_r invariant sein, hat darin seinen Grund, dass diese Voraussetzung durch die später in dem Theoreme gemachten Voraussetzungen vollständig ersetzt wird.

**) Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung des längst bekannten Satzes, dass im gewöhnlichen dreifach ausgedehnten Raume jede Schar von ∞^2 Geraden, die den ganzen Raum erfüllt, eine Brennfigur besitzt, also entweder eine Brennfläche oder eine Brenncurve oder einen Brennpunkt.

möglich ist, derart, dass nicht alle Mannigfaltigkeiten unsrer Schaar der z-Axe parallel sind. So wird die Schaar durch Gleichungen von der Form:

$$(26)\qquad \begin{cases} z = \sum_{1}^{n-m}{}_{k}\, a_{m+k}\, x_{m+k} + c, \\ x_\mu = \sum_{1}^{n-m}{}_{k}\, b_{\mu k}\, x_{m+k} \quad + a_\mu \\ \qquad (\mu = 1 \ldots m) \end{cases}$$

dargestellt, wo die a und b gewisse Functionen von $m+1$ Parametern $u_1 \ldots u_{m+1}$ sind und für allgemeine Werthe dieser Parameter endlich bleiben.

Unser Verfahren besteht nun darin, dass wir die Schaar der $(n-m)$-fach ausgedehnten Punktmannigfaltigkeiten (26) als eine Schaar von Elementmannigfaltigkeiten des R_{n+1} auffassen und sie durch eine Berührungstransformation des R_{n+1} in eine Schaar von Elementmannigfaltigkeiten überführen, die aus lauter n-fach ausgedehnten Punktmannigfaltigkeiten besteht.

Als Elementmannigfaltigkeit des R_{n+1} aufgefasst wird die Punktmannigfaltigkeit (26) durch die $n+1$ Gleichungen:

$$(27)\qquad \begin{cases} z = \sum_{1}^{n-m}{}_{k}\, a_{m+k} x_{m+k} + c \\ x_\mu = \sum_{1}^{n-m}{}_{k}\, b_{\mu k}\, x_{m+k} \quad + a_\mu \\ p_{m+j} = a_{m+j} - \sum_{1}^{m}{}_{\nu}\, b_{\nu j}\, p_\nu \\ \qquad (\mu = 1 \ldots m;\ j = 1 \ldots n-m) \end{cases}$$

dargestellt (s. Abschn. II, S. 103 ff.). Führen wir auf diese Elementmannigfaltigkeit die Berührungstransformation:

$$(28)\qquad \begin{cases} z' = z - \sum_{1}^{m}{}_{\mu}\, x_\mu p_\mu \\ x_\nu' = -p_\nu, \quad p_\nu' = x_\nu \\ x_{m+k}' = x_{m+k}, \quad p_{m+k}' = p_{m+k} \\ \qquad (\nu = 1 \ldots m;\ k = 1 \ldots n-m) \end{cases}$$

aus (a. a. O. S. 115 f.), so erhalten wir eine Elementmannigfaltigkeit, die als Punktmannigfaltigkeit n-fach ausgedehnt ist und durch die Gleichung:

$$(29) \qquad z' = \sum_1^m{}_{\mu} \sum_1^{n-m}{}_{k} b_{\mu k} x_{\mu}' x_{m+k}' + \sum_1^n{}_{\tau} a_{\tau} x_{\tau}' + c$$

dargestellt wird. Unsre Berührungstransformation (28) führt also die ∞^{m+1} $(n - m)$-fach ausgedehnten ebenen Mannigfaltigkeiten (26) in ∞^{m+1} n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten zweiten Grades über.

Von der Schaar (29) lässt sich nun nachweisen, dass sie im Allgemeinen eine im Endlichen liegende Umhüllungsmannigfaltigkeit besitzt. In der That, die Umhüllungsmannigfaltigkeit der Schaar (29) wird erhalten, wenn man $u_1 \ldots u_{m+1}$ aus (29) mit Hülfe der Gleichungen:

$$(30) \qquad \left\{ \sum_1^m{}_{\mu} \sum_1^{n-m}{}_{k} \frac{\partial b_{\mu k}}{\partial u_i} x_{\mu}' x_{m+k}' + \sum_1^n{}_{\tau} \frac{\partial a_{\tau}}{\partial u_i} x_{\tau}' + \frac{\partial c}{\partial u_i} = 0 \right.$$
$$(i = 1 \ldots m+1)$$

wegschafft. Soll daher eine im Endlichen liegende Umhüllungsmannigfaltigkeit vorhanden sein, so ist nothwendig und hinreichend, dass die $m + 1$ Mannigfaltigkeiten zweiten Grades (30) sich für allgemeine Werthe der u in einer im Endlichen liegenden Mannigfaltigkeit schneiden. Das aber tritt dann und nur dann ein, wenn in dem ebenen Bündel von ∞^m Mannigfaltigkeiten zweiten Grades, das durch die $m + 1$ Mannigfaltigkeiten (30) bestimmt wird, die unendlich ferne n-fach ausgedehnte Ebene des R_{n+1} nicht doppeltzählend vorkommt, wenn also nicht alle $(m + 1)$-reihigen Determinanten der Matrix:

$$(31) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial b_{\mu k}}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial b_{\mu k}}{\partial u_{m+1}} \\ \frac{\partial a_{\tau}}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial a_{\tau}}{\partial u_{m+1}} \end{vmatrix}$$
$$(k = 1 \ldots n-m;\ \mu = 1 \ldots m;\ \tau = 1 \ldots n)$$

identisch verschwinden.

Nehmen wir daher an, dass nicht alle $(m + 1)$-reihigen Determinanten dieser Matrix identisch verschwinden, so ist sicher, dass die ∞^{m+1} Mannigfaltigkeiten (29) eine im Endlichen liegende Umhüllungsmannigfaltigkeit besitzen. Es ist zugleich klar, dass diese Umhüllungsmannigfaltigkeit nicht aus lauter Parallelen zur z-Axe besteht, dass sie also als Elementmannigfaltigkeit aufgefasst durch die Elementcoordinaten z', $x_1' \ldots x_n'$, $p_1' \ldots p_n'$ darstellbar ist. Führen wir endlich auf diese Umhüllungsmannigfaltigkeit die Berührungstransformation (28) rückwärts aus, so erhalten wir eine im Endlichen gelegene Mannigfaltigkeit, die von allen ∞^{m+1} ebenen Mannigfaltigkeiten (26) umhüllt wird.

Jetzt bleibt noch der Fall übrig, dass alle $(m+1)$-reihigen Determinanten der Matrix (31) identisch verschwinden. Tritt dieser Fall ein, so sind die $m+1$ Parameter $u_1 \ldots u_{m+1}$ in den Coefficienten:

$$a_\tau,\ b_{\mu k} \quad (\tau = 1 \ldots n;\ \mu = 1 \ldots m;\ k = 1 \ldots n-m)$$

augenscheinlich nicht wesentlich, die Schaar der ∞^{m+1} ebenen Mannigfaltigkeiten (26) schneidet daher auf der unendlich fernen n-fach ausgedehnten Ebene des R_{n+1} nicht eine Schaar von ∞^{m+1}, sondern höchstens eine Schaar von ∞^m ebenen Mannigfaltigkeiten aus. Hieraus folgt, dass diese unendlich ferne Ebene der Schaar (26) gegenüber keine allgemeine Lage besitzt. Verlegt man daher durch eine geeignete projective Transformation die unendlich ferne n-fach ausgedehnte Ebene des R_{n+1} ins Endliche, so kann man immer den hier betrachteten besonderen Fall auf den allgemeinen zurückführen, dass nicht alle $(m+1)$-reihigen Determinanten der Matrix (31) identisch verschwinden.

Die ∞^{m+1} ebenen Mannigfaltigkeiten (26) besitzen also immer ein Umhüllungsgebilde. Jede Mannigfaltigkeit M der Schaar (26) hat mit diesem Umhüllungsgebilde eine krumme oder ebene Mannigfaltigkeit M' gemein. Fasst man nun M und das Umhüllungsgebilde als Elementmannigfaltigkeiten des R_{n+1} auf, so berührt M das Umhüllungsgebilde längs der Mannigfaltigkeit M', das heisst die beiden Elementmannigfaltigkeiten: M und das Umhüllungsgebilde haben in jedem Punkte von M' mindestens ein Element des R_{n+1} gemein. Dagegen ist nicht nöthig, dass M im althergebrachten Sinne eine Tangentialebene des Umhüllungsgebildes ist.

Unser Satz ist demnach bewiesen. Wir erwähnen noch, dass die hier benutzte Methode auch dann noch anwendbar bleibt, wenn man im R_{n+1} eine Schaar von ∞^{m+1} $(n-m)$-fach ausgedehnten algebraischen Mannigfaltigkeiten hat, die den ganzen Raum erfüllt. Während aber, wenn diese Schaar aus ebenen Mannigfaltigkeiten besteht, immer eine Umhüllungsmannigfaltigkeit existirt, lässt sich, wenn die Schaar aus beliebigen algebraischen Mannigfaltigkeiten besteht, nur zeigen, dass im Allgemeinen eine Umhüllungsmannigfaltigkeit vorhanden ist*).

*) Man vgl. hierzu die Abhandlung von Lie über part. Diffgl. 1. O. in Bd. 9 der Math. Ann. Dort entwickelt Lie auf S. 264—268 allgemeine Sätze über die Existenz von Umhüllungsgebilden einer Schaar von Elementmannigfaltigkeiten des $(n+1)$-fach ausgedehnten Raumes. Unser Satz 14 geht nur insofern weiter, als er ausspricht, dass unter den darin gemachten Voraussetzungen immer eine Umhüllungsfigur auftritt, während aus den Entwicklungen in Bd. 9 der Ann. nur folgt, dass unter den Voraussetzungen unsers Satzes im Allgemeinen eine solche Umhüllungsfigur vorhanden ist.

§ 135.

Auf den SS. 300—305 von Abschn. I haben wir untersucht, was für verschiedene Zusammensetzungen eine Gruppe haben kann, die mit einer r-gliedrigen Gruppe G_r von bekannter Zusammensetzung meroedrisch isomorph ist*). Wir fanden, dass es ebensoviele Zusammensetzungen dieser Art giebt, als die G_r invariante Untergruppen enthält, und dass die Zusammensetzung jeder m-gliedrigen mit der G_r meroedrisch isomorphen Gruppe dadurch erhalten wird, dass man allen Transformationen einer ganz bestimmten $(r-m)$-gliedrigen invarianten Untergruppe der G_r die identische Transformation entsprechen lässt.

Waren:

$$(X_i X_k) = \sum_1^r{}_s c_{iks} X_s f \quad (i, k = 1 \ldots r)$$

die Gleichungen für die Zusammensetzung der G_r und waren:

$$\sum_1^r{}_k h_{\mu k} X_k f \quad (\mu = 1 \ldots r-m)$$

unabhängige infinitesimale Transformationen einer $(r-m)$-gliedrigen invarianten Untergruppe der G_r, so fand man die durch diese invariante Untergruppe bestimmte Zusammensetzung m-gliedriger mit der G_r meroedrisch isomorpher Gruppen folgendermassen: Man drückte vermöge der Gleichungen:

$$\sum_1^r{}_k h_{\mu k} \mathfrak{X}_k f = 0 \quad (\mu = 1 \ldots r-m)$$

$r-m$ von den infinitesimalen Transformationen: $\mathfrak{X}_1 f \ldots \mathfrak{X}_r f$ durch

*) Sind die beiden Gruppen: A und B isomorph und sind ebenso die beiden Gruppen: B und C isomorph, so folgt daraus keineswegs, dass auch A und C isomorphe Gruppen sind; ein derartiger Schluss wäre nur dann erlaubt, wenn der Isomorphismus beide Male holoedrisch wäre. Man sieht hieraus, dass der allgemeine Begriff des Isomorphismus kein Gleichheitsbegriff ist, denn es fehlt ihm das wesentliche Merkmal eines solchen, nämlich die Möglichkeit, bei Vergleichung isomorpher Gruppen isomorphe Gruppen durch isomorphe Gruppen zu ersetzen. Um dieser Eigenschaft des Begriffes Isomorphismus gerecht zu werden, muss man in der Ausdrucksweise besonders vorsichtig sein; *man darf daher, wenn man von zwei meroedrisch isomorphen Gruppen spricht, nur sagen, dass die kleinere dieser beiden Gruppen mit der grösseren meroedrisch isomorph ist, nicht aber dass die grössere mit der kleineren meroedrisch isomorph ist.* Thut man das, so sind Missverständnisse ausgeschlossen. Leider haben wir es bei der Einführung des Begriffes Isomorphismus (s. Abschn. I, S. 292 f.) versäumt, darauf hinzuweisen, doch glauben wir, dass wir uns in allen besondern Fällen, wo isomorphe Gruppen auftreten, in der richtigen Weise ausgedrückt haben.

die m übrigen aus und setzte die gefundenen Werthe in die Gleichungen:

$$(\mathfrak{X}_i \mathfrak{X}_k) = \sum_1^r{}_s c_{iks} \mathfrak{X}_s f \quad (i, k = 1 \dots r)$$

ein, die so entstehenden Relationen zwischen jenen m der infinitesimalen Transformationen: $\mathfrak{X}_1 f \dots \mathfrak{X}_r f$ stellten die gewünschte Zusammensetzung dar.

Ist die r-gliedrige Gruppe G_r einfach, so giebt es nur eine mit ihr meroedrisch isomorphe Gruppe, die nämlich, die blos aus der identischen Transformation besteht. Ist dagegen G_r *nicht einfach**), so giebt es auch Gruppen, die meroedrisch isomorph mit ihr sind, ohne auf die identische Transformation zusammenzuschrumpfen. Es liegt nahe zu fragen, ob eine solche mit der G_r meroedrisch isomorphe Gruppe einfach sein kann und unter welchen Bedingungen sie es ist.

Um diese Frage zu beantworten, wollen wir uns der Einfachheit wegen die infinitesimalen Transformationen unsrer G_r so gewählt denken, dass: $X_{m+1} f \dots X_r f$ eine $(r - m)$-gliedrige invariante Untergruppe erzeugen. Die Gleichungen für die Zusammensetzung der G_r haben dann die Form:

$$(32) \quad \begin{cases} (X_\mu X_\nu) = \sum_1^m{}_s c_{\mu\nu s} X_s f + \sum_1^{r-m}{}_\tau c_{\mu\nu, m+\tau} X_{m+\tau} f \\ (X_\mu X_{m+k}) = \sum_1^{r-m}{}_\tau c_{\mu, m+k, m+\tau} X_{m+\tau} f \\ (X_{m+k} X_{m+j}) = \sum_1^{r-m}{}_\tau c_{m+k, m+j, m+\tau} X_{m+\tau} f \end{cases}$$

$$(\mu, \nu = 1 \dots m;\ k, j = 1 \dots, r - m)$$

und die durch unsre invariante Untergruppe bestimmten m-gliedrigen mit der G_r meroedrisch isomorphen Gruppen haben die Zusammensetzung:

$$(33) \quad (\mathfrak{X}_\mu \mathfrak{X}_\nu) = \sum_1^m{}_s c_{\mu\nu s} \mathfrak{X}_s f \quad (\mu, \nu = 1 \dots m).$$

---

*) Wir haben zwar nach dem Vorgange der Substitutionentheorie auf S. 264 von Abschn. I für die nicht einfachen Gruppen die Benennung „zusammengesetzt" eingeführt, es dürfte jedoch das Beste sein, von dieser Benennung keinen Gebrauch zu machen, sondern sowohl bei continuirlichen als bei discontinuirlichen Gruppen die ausdrucksvollere und überdies kürzere Bezeichnung „nicht einfach" anzuwenden.

Sind nun die Gruppen von der Zusammensetzung (33) nicht einfach, so enthalten sie invariante Untergruppen, die nicht blos aus der identischen Transformation bestehen, und wir können annehmen, dass: $\mathfrak{X}_{l+1}f \ldots \mathfrak{X}_m f$ $(0<l<m)$ eine solche invariante Untergruppe erzeugen. Dann aber erzeugen offenbar: $X_{l+1}f \ldots X_m f$, $X_{m+1}f \ldots X_r f$ eine $(r-l)$-gliedrige invariante Untergruppe der G_r und die $(r-m)$-gliedrige invariante Untergruppe: $X_{m+1}f \ldots X_r f$ der G_r steckt in dieser $(r-l)$-gliedrigen. Ist andrerseits die invariante Untergruppe: $X_{m+1}f \ldots X_r f$ der G_r in einer grösseren invarianten Untergruppe der G_r enthalten, etwa in der $(r-h)$-gliedrigen: $X_{h+1}f \ldots X_r f$ $(0<h<m)$, so erzeugen augenscheinlich: $\mathfrak{X}_{h+1}f \ldots \mathfrak{X}_m f$ eine $(m-h)$-gliedrige invariante Untergruppe einer jeden Gruppe von der Zusammensetzung (33) und diese Gruppen sind daher sicher nicht einfach. Hieraus ergiebt sich, dass die Antwort auf die oben gestellte Frage folgende Fassung erhalten kann:

Satz 15. *Eine m-gliedrige Gruppe G_m, die mit einer gegebenen r-gliedrigen Gruppe G_r $(r>m)$ meroedrisch isomorph ist, ist stets dann aber auch nur dann einfach, wenn ihre Zusammensetzung aus der Zusammensetzung der G_r dadurch erhalten wird, dass man einer solchen $(r-m)$-gliedrigen invarianten Untergruppe der G_r, die in keiner grösseren invarianten Untergruppe der G_r steckt, die identische Transformation entsprechen lässt.*

Der eben gefundene Satz erlaubt uns aus der Zusammensetzung jeder r-gliedrigen Gruppe die Zusammensetzungen einer Reihe von einfachen Gruppen abzuleiten.

In der That ist G eine r-gliedrige Gruppe, so können wir uns eine Reihe von Untergruppen: $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_3 \ldots$ der Gruppe G derart ausgewählt denken, dass $\mathfrak{G}_1$ in G invariant ist, aber in keiner grösseren invarianten Untergruppe von G steckt und dass jedes $\mathfrak{G}_{k+1}$ in $\mathfrak{G}_k$ invariant ist, aber in keiner grösseren invarianten Untergruppe von $\mathfrak{G}_k$ steckt. Dann liefert $\mathfrak{G}_1$ die Zusammensetzung einer einfachen mit G isomorphen Gruppe, ferner bestimmt $\mathfrak{G}_2$ die Zusammensetzung einer einfachen mit $\mathfrak{G}_1$ isomorphen Gruppe, und so fort. Kurz wir erhalten wirklich die Zusammensetzungen einer Reihe von einfachen Gruppen; sind die Gliederzahlen der Gruppen: $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2 \ldots$ der Reihe nach gleich: r_1, $r_2 \ldots$, so haben die Gliederzahlen dieser einfachen Gruppen der Reihe nach die Werthe: $r-r_1$, r_1-r_2, $r_2-r_3, \ldots$.

Da die Zahl r endlich ist und da jede der Zahlen: r, r_1, $r_2 \ldots$ kleiner ist als die vorhergehende, so muss die Reihe der Gruppen $\mathfrak{G}_k$ einmal abbrechen und zwar muss die letzte, etwa $\mathfrak{G}_m$ blos aus der

identischen Transformation bestehen, während die vorletzte, $\mathfrak{G}_{m-1}$ einfach ist. Hieraus folgt, dass auch die Reihe der eben definirten einfachen Gruppen einmal abbricht, man erhält im Ganzen m solche einfache Gruppen, deren Gliederzahlen zusammengenommen gleich der Gliederzahl r von G sind und zwar ist die letzte dieser Gruppen offenbar mit $\mathfrak{G}_{m-1}$ gleichzusammengesetzt. Ist G selbst schon einfach, so hat natürlich m den Werth 1.

Wir wollen die Reihe der Gruppen: G, $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2 \ldots$ als eine *Normalreihe von Untergruppen der Gruppe G* bezeichnen. Solcher Normalreihen giebt es im Allgemeinen mehrere; denn schon $\mathfrak{G}_1$ braucht nicht die einzige invariante Untergruppe von G zu sein, die in keiner grösseren invarianten Untergruppe von G steckt, Entsprechendes gilt von $\mathfrak{G}_2$ in Bezug auf $\mathfrak{G}_1$, von $\mathfrak{G}_3$ in Bezug auf $\mathfrak{G}_2$ und so weiter. Man sieht also, dass man im Allgemeinen mehrere verschiedene Normalreihen von Untergruppen der Gruppe G herstellen kann.

So verschieden nun auch alle diese Normalreihen von einander sein mögen, so lassen sich doch gewisse Eigenschaften angeben, die allen Normalreihen von Untergruppen der Gruppe G gemeinsam sind. Eine dieser Eigenschaften bildet den Inhalt des nachstehenden Theorems:

Theorem 63*). *Es sei G eine r-gliedrige Gruppe und G, $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2 \ldots$ sei eine Normalreihe von Untergruppen von G, ausserdem mögen mit $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$, $\mathfrak{l}_3 \ldots$ gewisse zu dieser Normalreihe gehörige positive ganze Zahlen bezeichnet werden, die folgendermassen definirt sind: $\mathfrak{l}_1$ ist der Unterschied zwischen der Gliederzahl von G und der Gliederzahl einer solchen möglichst grossen in G enthaltenen Untergruppe, in der $\mathfrak{G}_1$ steckt, $\mathfrak{l}_2$ ist der Unterschied zwischen der Gliederzahl von $\mathfrak{G}_1$ und der Gliederzahl einer solchen möglichst grossen in $\mathfrak{G}_1$ enthaltenen Untergruppe, in der $\mathfrak{G}_2$ steckt, und so fort. Unter diesen Voraussetzungen sind die Zahlen: $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2 \ldots$, wenn man von ihrer Reihenfolge absieht, ganz von der Wahl der Normalreihe:*

*) In der Substitutionentheorie kennt man das entsprechende Theorem schon längst (s. Camille Jordan, traité des substitutions, Paris 1870) und gerade durch den betreffenden Jordanschen Satz ist Lie auf das Theorem 63 geführt worden; es ist das übrigens der einzige Fall, in dem Lie einen Satz über endliche continirliche Gruppen *unmittelbar* durch Uebertragung aus der Substitutionentheorie gefunden hat.

Lie hat den Inhalt des Theorems 63 im August 1888 in den Abhandl. der Leipz. Ges. d. Wiss. ohne Beweis veröffentlicht (Bd. 14, S. 562). Ein ausgeführter Beweis des Theorems ist zuerst auf directe Veranlassung Lies von Vessiot in seiner Thèse gegeben worden (s. Ann. de l'Ecole Normale, 1892, S. 203—206).

$G, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2 \ldots$ unabhängig; mit andern Worten: Ist: $G, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ irgend eine andre Normalreihe von Untergruppen von G und sind: $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$ die zu dieser Normalreihe gehörigen ganzen Zahlen, die ebenso definirt sind, wie vorhin: $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2 \ldots$, so kommt jede Zahl der Reihe: $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2 \ldots$ auch in der Reihe: $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$ vor und zwar in beiden Reihen gleich oft.

Unser Theorem ist bewiesen, sobald es uns gelingt, seine Richtigkeit für zwei beliebige Normalreihen: $G, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2 \ldots$ und: $G, \Gamma_1, \Gamma_2 \ldots$ darzuthun. Dabei können wir offenbar voraussetzen, dass die beiden Untergruppen: $\mathfrak{G}_1$ und Γ_1 von einander verschieden sind.

Wir wollen zunächst den besondern Fall erledigen, dass $\mathfrak{G}_1$ und Γ_1 keine infinitesimale Transformation gemein haben.

Tritt dieser Fall ein und sind: $\mathfrak{Y}_1 f \ldots \mathfrak{Y}_{\mathfrak{r}_1} f$ die infinitesimalen Transformationen von $\mathfrak{G}_1$ und: $Y_1 f \ldots Y_{\varrho_1} f$ die von Γ_1, so verschwinden nach Abschn. I, S. 264, Satz 11 alle Ausdrücke: $(\mathfrak{Y}_i Y_j)$ identisch, die $\mathfrak{r}_1 + \varrho_1$ von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

$$\mathfrak{Y}_1 f \ldots \mathfrak{Y}_{\mathfrak{r}_1} f, \quad Y_1 f \ldots Y_{\varrho_1} f$$

erzeugen mithin eine $(\mathfrak{r}_1 + \varrho_1)$-gliedrige Untergruppe von G, die augenscheinlich in G invariant ist und sowohl $\mathfrak{G}_1$ als Γ_1 enthält. Da nun aber weder $\mathfrak{G}_1$ noch Γ_1 in einer grösseren invarianten Untergruppe von G steckt, so muss diese Gruppe mit G zusammenfallen, es muss also $\mathfrak{r}_1 + \varrho_1 = r$ sein. Zugleich ergiebt sich, dass $\mathfrak{G}_1$ und Γ_1 einfach sind; denn wäre zum Beispiel: $Y_1 f \ldots Y_h f$ $(0 < h < \varrho_1)$ eine invariante Untergruppe von Γ_1, so wäre:

$$\mathfrak{Y}_1 f \ldots \mathfrak{Y}_{\mathfrak{r}_1} f, \quad Y_1 f \ldots Y_h f$$

im Widerspruch mit unsern Voraussetzungen eine invariante Untergruppe von G, in der $\mathfrak{G}_1$ steckte. Hieraus folgt, dass in unserm Falle $\mathfrak{G}_2$ und Γ_2 blos aus der identischen Transformation bestehen und dass jede der beiden Zahlenreihen: $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2 \ldots$ und: $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$ blos zwei Zahlen enthält. Wir können sogar schliessen, dass in unserm Falle die beiden Reihen: $G, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$ und G, Γ_1, Γ_2 die einzigen Normalreihen von Untergruppen von G sind, denn $\mathfrak{G}_1$ und Γ_1 sind augenscheinlich die einzigen invarianten Untergruppen von G, die nicht blos aus der identischen Transformation bestehen.

Ist jetzt: $Y_1 f \ldots Y_\varkappa f$ $(\varkappa < \varrho_1)$ eine Untergruppe von Γ_1 mit möglichst vielen Parametern und: $\mathfrak{Y}_1 f \ldots \mathfrak{Y}_\mathfrak{t} f$ $(\mathfrak{t} < \mathfrak{r}_1)$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}_1$ mit möglichst vielen Parametern, so ist offenbar:

$$\mathfrak{Y}_1 f \ldots \mathfrak{Y}_{\mathfrak{r}_1} f, \quad Y_1 f \ldots Y_\varkappa f$$

eine möglichst grosse Untergruppe von G, in der $\mathfrak{G}_1$ steckt und:

$$Y_1 f \ldots Y_{\varrho_1} f, \quad \mathfrak{Y}_1 f \ldots \mathfrak{Y}_{\mathfrak{r}} f$$

ist eine möglichst grosse Untergruppe von G, in der Γ_1 steckt. Wir finden daher:

$$\mathfrak{l}_1 = r - (\mathfrak{r}_1 + \varkappa) = \varrho_1 - \varkappa, \quad \mathfrak{l}_2 = \mathfrak{r}_1 - \mathfrak{k}$$

und:

$$\lambda_1 = r - (\varrho_1 + \mathfrak{k}) = \mathfrak{r}_1 - \mathfrak{k}, \quad \lambda_2 = \varrho_1 - \varkappa,$$

damit ist aber offenbar die Richtigkeit unsers Theorems für den betrachteten besondern Fall erwiesen.

Nunmehr wollen wir annehmen, dass $\mathfrak{G}_1$ und Γ_1 eine gewisse Anzahl, etwa gerade h unabhängige infinitesimale Transformationen gemein haben, so dass also $\mathfrak{G}_1$ auf die Form:

$$\mathfrak{Y}_1 f \ldots \mathfrak{Y}_{\mathfrak{r}_1 - h} f, \quad Z_1 f \ldots Z_h f$$

gebracht werden kann und Γ_1 auf die Form:

$$Y_1 f \ldots Y_{\varrho_1 - h} f, \quad Z_1 f \ldots Z_h f,$$

wo die $\mathfrak{Y} f$ und $Y f$ von einander unabhängig sind. Unter diesen Voraussetzungen erzeugen: $Z_1 f \ldots Z_h f$ eine invariante Untergruppe H von G (s. Abschn. I, S. 264, Satz 10). Ausserdem lassen sich alle $(\mathfrak{Y}_i Y_j)$ aus $Z_1 f \ldots Z_h f$ allein linear ableiten, also erzeugen die $\mathfrak{r}_1 + \varrho_1 - h$ unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

$$\mathfrak{Y}_1 f \ldots \mathfrak{Y}_{\mathfrak{r}_1 - h} f, \quad Y_1 f \ldots Y_{\varrho_1 - h} f, \quad Z_1 f \ldots Z_h f$$

eine Untergruppe von G, die augenscheinlich in G invariant ist und also mit G zusammenfallen muss; demnach ist: $r = \mathfrak{r}_1 + \varrho_1 - h$. Endlich ist noch zu bemerken, dass H, das natürlich sowohl in $\mathfrak{G}_1$ als in Γ_1 invariant ist, weder in einer grösseren invarianten Untergruppe von $\mathfrak{G}_1$ noch in einer grösseren invarianten Untergruppe von Γ_1 stecken kann. Wäre nämlich etwa:

$$\mathfrak{Y}_1 f \ldots \mathfrak{Y}_d f, \quad Z_1 f \ldots Z_h f \quad (0 < d < \mathfrak{r}_1 - h)$$

eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}_1$, in der H steckte, so wäre:

$$Y_1 f \ldots Y_{\varrho_1 - h} f, \quad \mathfrak{Y}_1 f \ldots \mathfrak{Y}_d f, \quad Z_1 f \ldots Z_h f$$

eine invariante Untergruppe von G, in der Γ_1 steckte.

Ist nun: H, H_1, $H_2 \ldots H_q$ eine Normalreihe von Untergruppen von H, so sind augenscheinlich: G, $\mathfrak{G}_1$, H, $H_1 \ldots H_q$ und: G, Γ_1, $H_1 \ldots H_q$ zwei neue Normalreihen von Untergruppen von G. Wir werden zeigen, dass unser Theorem für diese beiden Normalreihen gültig ist.

In der That, ist:

$$Z_1 f \ldots Z_h f, \quad \mathfrak{Y}_1 f \ldots \mathfrak{Y}_{\mathfrak{t}} f \quad (\mathfrak{t} < \mathfrak{r}_1 - h)$$

eine möglichst grosse Untergruppe von $\mathfrak{G}_1$, in der H steckt und ist:

$$Z_1 f \dots Z_h f, \quad Y_1 f \dots Y_\varkappa f \quad (\varkappa < \varrho_1 - h)$$

eine möglichst grosse Untergruppe von Γ_1, in der H steckt, so ist:

$$Y_1 f \dots Y_{\varrho_1 - h} f, \quad Z_1 f \dots Z_h f, \quad \mathfrak{Y}_1 f \dots \mathfrak{Y}_t f$$

eine Γ_1 enthaltende Untergruppe von G mit möglichst vielen Parametern und:

$$\mathfrak{Y}_1 f \dots \mathfrak{Y}_{r_1 - h} f, \quad Z_1 f \dots Z_h f, \quad Y_1 f \dots Y_\varkappa f$$

ist eine $\mathfrak{G}_1$ enthaltende Untergruppe von G mit möglichst vielen Parametern. Ist daher: $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \dots \mathfrak{h}_q$ die Reihe der ganzen Zahlen, die im Sinne unsers Theorems zu der Normalreihe: $H, H_1, H_2 \dots H_q$ gehört, so lautet die Zahlenreihe, die zu der Normalreihe: $G, \mathfrak{G}_1, H, H_1 \dots H_q$ gehört, folgendermassen:

$$r - (r_1 + \varkappa) = \varrho_1 - (h + \varkappa), \quad r_1 - (h + \mathfrak{k}), \quad \mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \dots \mathfrak{h}_q,$$

während die zu: $G, \Gamma_1, H, H_1 \dots H_q$ gehörige Zahlenreihe diese ist:

$$r - (\varrho_1 + \mathfrak{k}) = r_1 - (h + \mathfrak{k}), \quad \varrho_1 - (h + \varkappa), \quad \mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \dots \mathfrak{h}_q.$$

Da hier offenbar beide Male genau dieselben ganzen Zahlen auftreten, so ist unser Theorem für die hier betrachteten beiden Normalreihen bewiesen.

Um den Beweis unsers Theorems zum Abschluss zu bringen, brauchen wir jetzt nur noch zu zeigen, dass das Theorem sowohl für die beiden Normalreihen: $G, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2 \dots$ und: $G, \mathfrak{G}_1, H, H_1 \dots$ als für die beiden Normalreihen: $G, \Gamma_1, \Gamma_2 \dots$ und: $G, \Gamma_1, H, H_1 \dots$ gültig ist. Das aber kommt offenbar darauf hinaus, die Richtigkeit unsers Theorems für die beiden Gruppen: $\mathfrak{G}_1$ und Γ_1 zu beweisen. Behandelt man nun jede dieser beiden Gruppen genau in derselben Weise, wie wir G behandelt haben, und wiederholt man dieses Verfahren genügend oft nach einander, so kommt man schliesslich stets entweder auf eine Gruppe, die nur eine einzige Normalreihe von Untergruppen besitzt, oder auf eine Gruppe, bei der der oben erledigte besondere Fall eintritt. Unser Theorem ist somit allgemein bewiesen.

Obwohl wir uns hier auf die Integrationstheorie nicht näher einlassen können, wollen wir doch versuchen dem Leser eine Vorstellung davon zu verschaffen, worin die Bedeutung des eben bewiesenen Theorems für die Integrationstheorie besteht.

Auf S. 665 erwähnten wir schon das allgemeine Problem, das den Ausgangspunkt von Lies Untersuchungen über Integrationstheorie und über Gruppentheorie gebildet hat, das Problem nämlich, *aus gegebenen infinitesimalen Transformationen, die eine vorgelegte lineare par-*

tielle Differentialgleichung erster Ordnung invariant lassen, für die Integration dieser Differentialgleichung möglichst grossen Nutzen zu ziehen. Dieses allgemeine Problem lässt sich, wie Lie gezeigt hat, auf das folgende Normalproblem zurückführen:

Eine vorgelegte lineare Differentialgleichung:

$$Af = \sum_1^{r+1}{}_\nu \alpha_\nu(x_1 \dots x_{r+1}) \frac{\partial f}{\partial x_\nu} = 0 \tag{34}$$

in den $r+1$ Veränderlichen $x_1 \dots x_{r+1}$ gestattet r bekannte unabhängige infinitesimale Transformationen:

$$X_k f = \sum_1^{r+1}{}_\nu \xi_{k\nu}(x_1 \dots x_{r+1}) \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \quad (k = 1 \dots r),$$

die in den Beziehungen:

$$(X_i X_k) = \sum_1^r{}_s c_{iks} X_s f \quad (i, k = 1 \dots r) \tag{35}$$

stehen und also eine r-gliedrige Gruppe erzeugen; überdies besteht zwischen Af und den $X_k f$ keine lineare Identität von der Form:

$$\varphi(x) Af + \sum_1^r{}_k \varphi_k(x) X_k f \equiv 0, \tag{36}$$

in der die Functionen φ, $\varphi_1 \dots \varphi_r$ nicht sämmtlich verschwinden. Die bekannten infinitesimalen Transformationen: $X_1 f \dots X_r f$ sollen so viel wie möglich für die Integration der Gleichung (34) *ausgenutzt werden.*

Wir wollen der Einfachheit wegen zunächst annehmen, dass die Gruppe: $X_1 f \dots X_r f$ integrabel ist und dass ihre infinitesimalen Transformationen schon so gewählt sind, dass: $X_1 f \dots X_i f$ für jeden Werth von i eine i-gliedrige Gruppe erzeugen, die in der $(i+1)$-gliedrigen: $X_1 f \dots X_{i+1} f$ invariant ist (s. § 131 u. Abschn. I, § 75). Dann bilden die r Gleichungen:

$$Af = 0, \quad X_1 f = 0, \dots, X_{r-1} f = 0 \tag{37}$$

augenscheinlich ein r-gliedriges vollständiges System, das die infinitesimale Transformation $X_r f$ gestattet. Ist daher v die unbekannte Lösung des vollständigen Systems (37), so ist: $X_r v = \omega(v)$, wo die Function $\omega(v)$ sicher nicht verschwindet, weil sonst gegen die Voraussetzung eine Identität von der Form (36) bestände. Denkt man sich nun eine geeignete Function von v als neues v eingeführt, so kann man erreichen, dass $X_r v = 1$ wird, und erhält daher für v die Gleichungen:

(38) $$Av = 0, \quad X_1 v = 0, \ldots, X_{r-1} v = 0, \quad X_r v = 1,$$

aus denen man die $r + 1$ Differentialquotienten von v als Functionen von $x_1 \ldots x_{r+1}$ berechnen kann; v selbst findet man demnach durch eine Quadratur.

Führt man jetzt v zusammen mit r von den x, etwa mit $x_1 \ldots x_r$ an Stelle von $x_1 \ldots x_{r+1}$ als neue Veränderliche ein, so werden Af und $X_1 f \ldots X_{r-1} f$ von v frei und man erhält in den r Veränderlichen: $x_1 \ldots x_r$ die lineare partielle Differentialgleichung: $Af = 0$, die bei der $(r-1)$-gliedrigen integrabeln Gruppe: $X_1 f \ldots X_{r-1} f$ invariant bleibt; überdies besteht zwischen Af und $X_1 f \ldots X_{r-1} f$ sicher keine lineare Identität. Demnach kann man das eben angewendete Verfahren wieder anwenden. Auf diese Weise ergiebt sich schliesslich, dass man r unabhängige Lösungen der vorgelegten Gleichung (34) durch r Quadraturen bestimmen kann. Hierin liegt zugleich die Rechtfertigung für den Namen: *integrable Gruppe.*

In dem eben erledigten Falle kamen wir dadurch zum Ziele, dass wir die Integration der Gleichung (34) auf die Integration einer Reihe von vollständigen Systemen zurückführten. Genau so verfahren wir nun auch dann, wenn die Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ eine beliebige Zusammensetzung hat, also nicht gerade integrabel ist.

Wir wählen unter den Untergruppen der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ eine aus, die möglichst viele Parameter hat, etwa die m-gliedrige Untergruppe: $X_1 f \ldots X_m f$, und stellen die Gleichungen:

(39) $$Af = 0, \quad X_1 f = 0, \ldots, X_m f = 0$$

auf, die augenscheinlich ein $(m+1)$-gliedriges vollständiges System bilden. Dieses vollständige System gestattet von den infinitesimalen Transformationen der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ jedenfalls die m: $X_1 f \ldots X_m f$, deren Kenntniss aber augenscheinlich für die Integration unsers vollständigen Systems nutzlos ist. Soll das vollständige System ausser $X_1 f \ldots X_m f$ noch andre infinitesimale Transformationen der G_r: $X_1 f \ldots X_r f$ gestatten, so muss offenbar die Untergruppe: $X_1 f \ldots X_m f$ in einer grösseren Untergruppe der G_r invariant sein. Da aber $X_1 f \ldots X_m f$ eine Untergruppe mit möglichst vielen Parametern sein sollte, so kann dieser Fall nur dann eintreten, wenn $m = r - 1$ ist und wenn die Gruppe: $X_1 f \ldots X_{r-1} f$ in der G_r invariant ist.

Ist $m = r - 1$ und ist die Gruppe: $X_1 f \ldots X_{r-1} f$ in der G_r invariant, so kann wie oben die Integration des vollständigen Systems (39) durch eine Quadratur geleistet werden. In allen andern Fällen aber kommt man jedenfalls nicht mit einer einzigen Quadratur aus,

weil man da keine infinitesimalen Transformationen kennt, die das vollständige System (39) invariant lassen und die für die Integration dieses Systems verwerthbar sind. Allerdings kann man auch in diesen Fällen die Integration des vollständigen Systems vereinfachen, weil man nämlich die Kenntniss der infinitesimalen Transformationen: $X_{m+1}f \ldots X_rf$ benutzen kann, um das vollständige System (39) auf ein andres zurückzuführen, das eine gewisse kanonische Form besitzt, aber auf diesen Punkt können wir nicht eingehen.

Wir denken uns jetzt das vollständige System (39) integrirt, also $r - m$ von einander unabhängige unter seinen Lösungen bestimmt, etwa die Lösungen: $u_1 \ldots u_{r-m}$. Da unser vollständiges System $(m+1)$-gliedrig ist und $r+1$ Veränderliche enthält, so ist diese Integrationsoperation gleichbedeutend mit der Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung $(r-m)$-ter Ordnung zwischen zwei Veränderlichen, wir bezeichnen sie daher kurz als eine *Integrationsoperation* von der Ordnung: $r - m$.

Da $u_1 \ldots u_{r-m}$ Lösungen der Differentialgleichung: $Af = 0$ sind und da diese Differentialgleichung die infinitesimalen Transformationen: $X_{m+1}f \ldots X_rf$ gestattet, so sind auch die Ausdrücke:

$$(40) \qquad \begin{cases} X_{m+k}u_1, \ldots, X_{m+k}u_{r-m} \\ X_{m+k}X_{m+j}u_1, \ldots, X_{m+k}X_{m+j}u_{r-m} \\ \cdots \end{cases}$$

Lösungen von $Af = 0$. Ist nun die Untergruppe: $X_1f \ldots X_mf$ nicht in der G_r invariant, was sie für $m < r-1$ sicher nicht ist, so erhält man durch Bildung der Ausdrücke (40) nothwendig neue von $u_1 \ldots u_{r-m}$ unabhängige Lösungen von: $Af = 0$ und es lässt sich zeigen, dass man auf diese Weise alle Lösungen des $(l+1)$-gliedrigen vollständigen Systems:

$$(41) \qquad Af = 0, \quad X_1f = 0, \ldots, X_lf = 0$$

bekommt, wo $X_1f \ldots X_lf$ die grösste in der Untergruppe: $X_1f \ldots X_mf$ enthaltene Gruppe bedeutet, die in der G_r invariant ist. Sollte daher die G_r einfach sein, so würde durch die Integration des vollständigen Systems (39) zugleich die Integration von: $Af = 0$ vollständig geleistet sein.

Ist die G_r: $X_1f \ldots X_rf$ nicht einfach, so ist, wie sich zeigen lässt, stets $0 < l < m$ und wir kennen jetzt $r - l$ unabhängige Lösungen: $u_1 \ldots u_{r-l}$ von (41). Diese Lösungen führen wir zusammen mit $l+1$ gewissen von den x, etwa zusammen mit $x_1 \ldots x_{l+1}$ als neue Veränderliche ein, dann wird:

$$Af = \overline{A}f, \quad X_1f = \overline{X}_1f, \ldots, X_lf = \overline{X}_lf,$$

wo: $\overline{A}f$, $\overline{X}_1 f \ldots \overline{X}_l f$ von $u_1 \ldots u_{r-l}$ frei sind und nur noch $x_1 \ldots x_{l+1}$ enthalten. Unser Integrationsproblem ist daher auf das Problem zurückgeführt, die lineare partielle Differentialgleichung: $\overline{A}f = 0$ in den $l+1$ Veränderlichen: $x_1 \ldots x_{l+1}$ zu integriren, die bei der l-gliedrigen Gruppe: $\overline{X}_1 f \ldots \overline{X}_l f$ in diesen Veränderlichen invariant bleibt, es ist überdies sicher, dass zwischen: $\overline{A}f$ und $\overline{X}_1 f \ldots \overline{X}_l f$ keine lineare Identität besteht. Allerdings kennen wir ausserdem noch in den $r+1$ Veränderlichen: $x_1 \ldots x_{l+1}$, $u_1 \ldots u_{r-l}$ die $r-l$ infinitesimalen Transformationen: $X_{l+1} f \ldots X_r f$, die ebenfalls die Gleichung: $\overline{A}f = 0$ invariant lassen, aber aus diesen infinitesimalen Transformationen lässt sich jetzt, wie gezeigt werden kann, kein Nutzen mehr für die Integration von: $\overline{A}f = 0$ ziehen.

Unser ursprüngliches Integrationsproblem ist demnach jetzt auf ein Integrationsproblem von genau derselben Beschaffenheit, aber in weniger Veränderlichen zurückgeführt. Dieses neue Integrationsproblem können wir nun genau so behandeln wie das ursprüngliche und dieses Verfahren können wir wiederholen, so oft es nöthig ist. Wir sehen hieraus, dass die Integration der Gleichung: $Af = 0$ unter den gemachten Voraussetzungen dadurch geleistet werden kann, dass man eine gewisse Anzahl Hülfsgleichungen von verschiedenen Ordnungen nach einander integrirt.

Man kann nun offenbar die Reduction des ganzen Integrationsproblems auf sehr verschiedene Weisen ausführen, denn man hat ja schon in der Wahl der Untergruppe: $X_1 f \ldots X_m f$ volle Freiheit, nur dass sie eine Untergruppe mit möglichst vielen Parametern sein soll. Wie man aber auch die Reduction ausführen mag, stets werden die Ordnungen der erforderlichen Integrationsoperationen gerade die ganzen Zahlen, die im Sinne von Theor. 63, S. 704 zu einer gewissen Normalreihe von Untergruppen der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ gehören. Da nun für je zwei solche Normalreihen die zugehörigen ganzen Zahlen immer dieselben sind, nur dass sie in verschiedener Reihenfolge auftreten, so ist klar, *dass die Ordnungen der erforderlichen Integrationsoperationen immer dieselben bleiben, wie man auch die Reduction des ganzen Integrationsproblems ausführen mag; durch eine andre Ausführung der Reduction kann man nur die Reihenfolge abändern, in der die Hülfsgleichungen der verschiedenen Ordnungen auftreten, man kann aber nicht erreichen, dass man das eine Mal mit Hülfsgleichungen niedrigerer Ordnung auskommt als das andre Mal.*

Es lässt sich schliesslich noch zeigen, dass die hier gegebene Zurückführung unsers Integrationsproblems auf eine Reihe von Hülfsgleichungen nicht weiter vereinfacht werden kann, so lange die Ver-

änderlichen: $x_1 \ldots x_n$ ganz allgemein gewählt sind, so lange man also von Vereinfachungen, die aus der besonderen Form der Gleichung: $Af = 0$ folgen können, absieht. Weiss man von der Gleichung: $Af = 0$ nichts weiter, als dass sie die r-gliedrige Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ gestattet und dass zwischen: Af und $X_1 f \ldots X_r f$ keine lineare Identität besteht, so kann die Integration von: $Af = 0$ sicher nicht auf die Integration von Hülfsgleichungen zurückgeführt werden, deren Ordnungen niedriger sind als die Ordnungen der oben erforderlichen Hülfsgleichungen.

Es liegt auf der Hand, dass das besprochene Integrationsproblem vollkommen analog ist der Aufgabe, eine algebraische Gleichung aufzulösen, deren Coefficienten einem gegebenen Rationalitätsbereiche angehören und deren Galoissche Gruppe bekannt ist. Die Zurückführung beider Probleme auf Hülfsgleichungen von möglichst niedriger Ordnung gestaltet sich vollkommen analog.

Wir haben im Vorstehenden verschiedene Sätze benutzt, ohne ihre Beweise mitzutheilen. Wir wollen auch auf diese Beweise nicht näher eingehen, sondern bemerken nur noch Folgendes:

Der erste ohne Beweis angegebene Satz bezog sich darauf, dass man, sobald alle Lösungen des vollständigen Systems (39) auf S. 709 gefunden sind, durch Bildung der Ausdrücke:

$$X_{m+k}\omega_\nu, \quad X_{m+k}X_{m+j}\omega_\nu \ldots,$$

also durch blose Differentiation alle Lösungen eines gewissen kleineren vollständigen Systems, des Systems (41) finden kann. Der Beweis für diesen Satz ist äusserst einfach und beruht nur auf dem Begriffe der gleichberechtigten Untergruppen. Einen weniger kurzen Beweis, der aber rein analytisch ist und einen elementareren Charakter besitzt, findet der Leser in Bd. 25 der Math. Ann. auf S. 83—89.

Ferner theilten wir ohne Beweis mit, dass sich die *Ordnungen* der erforderlichen Hülfsgleichungen nicht erniedrigen lassen. Der Beweis für diese Behauptung liegt tiefer; er beruht auf der Invariantentheorie der unendlichen Gruppe aller Punkttransformationen und auf der Verwerthung dieser Theorie für endliche continuirliche Gruppen, eine besonders grosse Rolle spielt dabei die Theorie der Aehnlichkeit.

In einem besonderen Werke, das den Differentialinvarianten und der Integrationstheorie gewidmet sein wird, gedenken wir auf alle diese und auf gewisse andre Punkte näher einzugehen.

In der Mathematik, soweit sie sich mit den Differentialgleichungen beschäftigt, kann man zwei Richtungen unterscheiden. Die eine geht

darauf aus, neue Functionen einzuführen und sucht nach Kriterien dafür, ob sich vorgelegte Differentialgleichungen durch bekannte Klassen von Functionen integriren lassen. Die andre Richtung fragt nach den Kriterien für die Aequivalenz von Differentialgleichungen, insbesondere nach den Kriterien dafür, ob sich vorgelegte Differentialgleichungen auf eine solche Form bringen lassen, *die integrabel ist.* Die betreffenden Kriterien werden ihr durch die Theorie der Differentialinvarianten geliefert und die Zurückführung der vorgelegten Differentialgleichungen auf die integrabeln Formen erfordert, wenn sie überhaupt möglich ist, die Integration gewisser vollständiger Systeme, die bekannte Gruppen gestatten.

Die zweite der besprochenen beiden Richtungen ordnet sich vollständig unter die Theorie der Transformationsgruppen. Dass auch die erste Richtung, soweit sie bisher ausgebildet worden ist, zur Theorie der Transformationsgruppen in genauer Beziehung steht, haben neuere Untersuchungen gezeigt, auf die wir im Schlusskapitel andeutungsweise zurückkommen werden.

Mit diesem Paragraphen sind die allgemeinen Untersuchungen über Zusammensetzung, die wir in dem gegenwärtigen Kapitel bringen wollten, abgeschlossen. Wir wenden uns jetzt zu Untersuchungen von speciellerer Beschaffenheit, nämlich, wie schon auf S. 667 angekündigt, zu Untersuchungen über die Zusammensetzung der Gruppen mit höchstens sechs Parametern.

§ 136.

Hier suchen wir alle möglichen Zusammensetzungen der *zwei*- und der *drei*gliedrigen Gruppen.

Die infinitesimalen Transformationen einer *zwei*gliedrigen Gruppe sind entweder vertauschbar oder sie sind es nicht, es giebt daher nur zwei verschiedene Zusammensetzungen zweigliedriger Gruppen, nämlich:

$$(42) \qquad \boxed{(X_1 X_2) = 0} \qquad \boxed{(X_1 X_2) = X_1 f}$$

(vgl. Abschn. I, S. 591 f.). Jede zweigliedrige Gruppe ist demnach integrabel, eine Thatsache, die wir schon auf S. 681 erwähnt haben.

Ist eine *drei*gliedrige Gruppe: $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ nicht ihre eigne Derivirte, so ist sie sicher integrabel, denn ihre erste Derivirte ist dann höchstens zweigliedrig, ihre zweite infolgedessen höchstens ein-

gliedrig und ihre dritte sicher nullgliedrig. Jede nicht integrable dreigliedrige Gruppe ist daher nothwendig ihre eigne Derivirte. Aber eine dreigliedrige Gruppe, die ihre eigne Derivirte ist, enthält nach Abschn. I, S. 263, Satz 8 niemals eine invariante zweigliedrige Untergruppe, andrerseits enthält sie sicher zweigliedrige nicht invariante Untergruppen, folglich hat sie nach Theor. 58, S. 688 des jetzigen Abschn. die Zusammensetzung:

$$(43) \qquad (X_1 X_2) = X_1 f, \quad (X_1 X_3) = 2 X_2 f, \quad (X_2 X_3) = X_3 f.$$

Demnach ist jede nicht integrable dreigliedrige Gruppe mit der allgemeinen projectiven Gruppe auf der Geraden gleichzusammengesetzt.

Es sei nunmehr: $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ eine dreigliedrige integrable Gruppe, aber eine, die eine zweigliedrige nicht invariante Untergruppe enthält, etwa die Untergruppe: $X_2 f$, $X_3 f$. Dann enthält nach Theor. 58, S. 688 die Gruppe: $X_2 f$, $X_3 f$ eine eingliedrige Untergruppe, etwa $X_2 f$, die in der ganzen dreigliedrigen invariant ist und die in einer zweigliedrigen invarianten Untergruppe der dreigliedrigen steckt, etwa in der Untergruppe $X_1 f$, $X_2 f$. Demnach wird die Zusammensetzung unsrer dreigliedrigen durch Relationen von der Form:

$$(X_2 X_3) = \alpha X_2 f, \quad (X_1 X_2) = \beta X_2 f, \quad (X_1 X_3) = X_1 f + \gamma X_2 f$$

dargestellt. Durch Bildung der Identität zwischen $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ ergiebt sich jetzt sofort: $\beta = 0$. Setzt man ferner:

$$\overline{X}_1 f = X_1 f + \lambda X_2 f,$$

so kommt:

$$(\overline{X}_1 X_3) = \overline{X}_1 f + \{(\alpha - 1)\lambda + \gamma\} X_2 f, \quad (\overline{X}_1 X_2) = 0,$$

man kann daher, sobald $\alpha \neq 1$ ist, den Coefficienten γ, wenn er nicht von selbst verschwindet, gleich Null machen. Ist aber $\alpha = 1$ und $\gamma \neq 0$, so führt man $\gamma X_2 f$ als neues $X_2 f$ ein und erreicht dadurch, dass $\gamma = 1$ wird. Es ergeben sich somit die beiden Zusammensetzungen:

$$(44) \qquad (X_1 X_2) = 0, \quad (X_1 X_3) = X_1 f, \quad (X_2 X_3) = c X_2 f$$

und:

$$(45) \qquad (X_1 X_2) = 0, \quad (X_1 X_3) = X_1 f, \quad (X_2 X_3) = X_1 f + X_2 f,$$

wo in der ersten c ein wesentlicher Parameter ist, der nicht weggeschafft werden kann.

Damit sind die Zusammensetzungen aller der dreigliedrigen integrabeln Gruppen gefunden, die eine zweigliedrige nicht invariante Untergruppe enthalten.

Jede noch fehlende dreigliedrige integrable Gruppe G_3 enthält nur

invariante zweigliedrige Untergruppen. Wären nun auch alle eingliedrigen Untergruppen in der dreigliedrigen invariant, so wären offenbar alle infinitesimalen Transformationen der Gruppe paarweise vertauschbar und wir hätten die Zusammensetzung:

$$(46) \qquad (X_1 X_2) = 0, \quad (X_2 X_3) = 0, \quad (X_3 X_1) = 0.$$

Wir können daher annehmen, dass unsre G_3 nicht lauter invariante eingliedrige Untergruppen enthält, dass also die adjungirte Gruppe der G_3 die infinitesimalen Transformationen der G_3 wirklich unter einander vertauscht.

Bilden wir jetzt die ∞^2 infinitesimalen Transformationen unsrer G_3 als Punkte in einer Ebene ab, so wird jede zweigliedrige Untergruppe der G_3 durch eine Gerade abgebildet und diese Gerade bleibt bei der Adjungirten der G_3 in Ruhe, denn die Untergruppe ist ja in der G_3 invariant. Da nun jede infinitesimale Transformation der G_3 einer zweigliedrigen Untergruppe angehört, so muss es eine continuirliche Schaar von solchen Geraden geben, die bei der Adjungirten invariant bleiben. Andrerseits aber transformirt die Adjungirte die Punkte der Ebene wirklich, sie kann also nicht alle Geraden invariant lassen. Demnach muss jene Schaar von invarianten Geraden ein ebenes Büschel bilden, dessen Träger augenscheinlich eine eingliedrige invariante Untergruppe der G_3 darstellt.

Wir können annehmen, dass $X_1 f$ die eben besprochene invariante eingliedrige Untergruppe ist und dass: $X_1 f$, $\lambda X_2 f + \mu X_3 f$ die ∞^1 zweigliedrigen invarianten Untergruppen sind, denen $X_1 f$ angehört. Dann bestehen Relationen von der Form:

$$(X_1 X_2) = \alpha X_1 f, \quad (X_1 X_3) = \beta X_1 f, \quad (X_2 X_3) = \gamma X_1 f.$$

Wären hier α und β nicht beide Null, so könnte man:

$$\overline{X}_2 f = X_2 f + \nu X_1 f, \quad \overline{X}_3 f = X_3 f + \varrho X_1 f$$

so wählen, dass $(\overline{X}_2 \overline{X}_3) = 0$ würde und es wäre dann: $\overline{X}_2 f$, $\overline{X}_3 f$ eine zweigliedrige nicht invariante Untergruppe unsrer dreigliedrigen Gruppe. Demnach ist: $\alpha = \beta = 0$, und γ, das natürlich nicht auch verschwinden darf, kann gleich 1 gemacht werden, somit erhalten wir nur die eine Zusammensetzung:

$$(47) \qquad (X_1 X_2) = 0, \quad (X_1 X_3) = 0, \quad (X_2 X_3) = X_1 f.$$

Da jetzt alle möglichen Zusammensetzungen dreigliedriger Gruppen gefunden sind, so können wir das Theorem aussprechen:

Theorem 64. *Ist eine dreigliedrige Gruppe nicht integrabel, so ist sie einfach und hat die Zusammensetzung:*

(43) $$(X_1X_2) = X_1f, \quad (X_1X_3) = 2X_2f, \quad (X_2X_3) = X_3f$$

sie ist also gleichzusammengesetzt mit der allgemeinen projectiven Gruppe auf der Geraden. Ist eine dreigliedrige Gruppe integrabel und enthält sie zweigliedrige nicht invariante Untergruppen, so hat sie eine der beiden Zusammensetzungen:

(44) $$(X_1X_2) = 0, \quad (X_1X_3) = X_1f, \quad (X_2X_3) = cX_2f$$

und:

(45) $$(X_1X_2) = 0, \quad (X_1X_3) = X_1f, \quad (X_2X_3) = X_1f + X_2f$$

enthält sie endlich keine nicht invariante zweigliedrige Untergruppe, so hat sie entweder die Zusammensetzung:

(47) $$(X_1X_2) = 0, \quad (X_1X_3) = 0, \quad (X_2X_3) = X_1f$$

oder ihre infinitesimalen Transformationen sind paarweise vertauschbar, sie hat also die Zusammensetzung:

(46) $$(X_1X_2) = 0, \quad (X_1X_3) = 0, \quad (X_2X_3) = 0 \,.$$

Der Parameter c in der Zusammensetzung (44) *ist wesentlich und kann nicht weggeschafft werden.*

Es giebt also im Ganzen fünf Typen von Zusammensetzungen dreigliedriger Gruppen, aber unter diesen Typen enthält einer, nämlich der Typus (44), einen willkürlichen Parameter. Unter den ∞^1 Typen, die durch die Zusammensetzung (44) repräsentirt werden, giebt es jedoch zwei, die sich von den übrigen ∞^1 sehr wesentlich unterscheiden, es sind das die beiden, die zu den Werthen: $c = 1$ und $c = 0$ gehören. Für $c = 1$ ist es nämlich so, dass je zwei unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe: X_1f, X_2f, X_3f eine zweigliedrige Untergruppe erzeugen, und für $c = 0$ enthält die Gruppe: X_1f, X_2f, X_3f nicht blos die eine zweigliedrige invariante Untergruppe: X_1f, X_2f, sondern ∞^1 solche invariante Untergruppen, nämlich: X_1f, $\lambda X_2f + \mu X_3f$.

Hat man auf irgend eine Weise die Zusammensetzung:

$$(Y_iY_k) = \sum_1^3{}_s c_{iks} Y_sf \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

einer dreigliedrigen Gruppe: $Y_1 f$, $Y_2 f$, $Y_3 f$ gefunden, so ist es wünschenswerth, möglichst schnell feststellen zu können, welchem unter den in Theorem 64 angegebenen Typen diese Zusammensetzung angehört. Wir wollen kurz angeben, wie man das ausführen kann.

Ist die G_3: $Y_1 f$, $Y_2 f$, $Y_3 f$ ihre eigne Derivirte, verschwindet also die Determinante:

$$\begin{vmatrix} c_{121} & c_{122} & c_{123} \\ c_{231} & c_{232} & c_{233} \\ c_{311} & c_{312} & c_{313} \end{vmatrix} \tag{48}$$

nicht, so hat die G_3 nothwendig die Zusammensetzung (43). Will man ihre Zusammensetzung auf diese Normalform bringen, so setze man $X_2 f$ gleich irgend einer infinitesimalen Transformation: $e_1 Y_1 f + + e_2 Y_2 f + e_3 Y_3 f$ von allgemeiner Lage und bestimme dann eine infinitesimale Transformation: $\Sigma \varepsilon_k Y_k f$ so, dass

$$(X_2, \Sigma \varepsilon_k Y_k) = \omega \,.\, \Sigma \varepsilon_k Y_k f$$

wird. Für ω erhält man (s. Abschn. I, S. 590) eine quadratische Gleichung mit zwei nicht verschwindenden Wurzeln: ω_1 und $-\omega_1$, man kann daher $X_1 f$ und $X_3 f$ so wählen, dass:

$$(X_2 X_3) = \omega_1 X_3 f, \quad (X_2 X_1) = -\omega_1 X_1 f$$

wird. Setzt man schliesslich noch $\omega_1 X_2 f$ für $X_2 f$, so wird:

$$(X_1 X_2) = X_1 f, \quad (X_2 X_3) = X_3 f$$

und aus der Identität zwischen: $X_1 f, X_2 f, X_3 f$ ergiebt sich: $(X_1 X_3) = = \lambda X_2 f$, wo $\lambda \neq 0$ ist und durch geeignete Wahl von $X_1 f$ gleich 2 gemacht werden kann.

Ist die erste Derivirte der G_3 blos zweigliedrig, ist also die Determinante (48) null, ohne dass alle ihre zweireihigen Unterdeterminanten verschwinden, so hat die G_3 eine der beiden Zusammensetzungen (44) und (45), jedoch ist im ersten Falle $c \neq 0$. Welcher von beiden Fällen eintritt, das hängt davon ab, ob die G_3 zwei verschiedene invariante eingliedrige Untergruppen enthält oder nicht, das aber kann man durch rationale Operationen entscheiden.

Ist endlich die Derivirte der G_3 blos eingliedrig, so hat die G_3 entweder die Zusammensetzung (44) für $c = 0$ oder die Zusammensetzung (47), welche von beiden, das hängt wiederum davon ab, ob es in der G_3 zwei invariante eingliedrige Untergruppen giebt oder nur eine.

Ein sehr anschauliches Bild von den einzelnen Zusammensetzungen erhält man, wenn man die ∞^2 infinitesimalen Transformationen der Gruppe: $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ als Punkte einer Ebene deutet und sich nun

für jede einzelne der gefundenen Zusammensetzungen die Figuren aufzeichnet, die durch ihre zweigliedrigen Untergruppen und durch ihre invarianten Untergruppen gebildet werden. Für die Zusammensetzung (43) erhält man da als Bilder der zweigliedrigen Untergruppen die ∞^1 Tangenten eines nicht ausgearteten Kegelschnitts, der bei der adjungirten Gruppe invariant bleibt (s. S. 13 ff.). In den übrigen Fällen werden die zweigliedrigen Untergruppen entweder durch zwei Büschel von Geraden abgebildet (im Falle (44) für $c \neq 1$) oder durch ein Geradenbüschel (im Falle (45) und im Falle (47)) oder es ist endlich jede Gerade der Ebene das Bild einer zweigliedrigen Untergruppe (in den Fällen (44) für $c = 1$ und (47)). Die nähere Ausführung überlassen wir dem Leser.

Wir wollen jetzt noch eine zweite Methode angeben, die zur Bestimmung aller möglichen Zusammensetzungen einer dreigliedrigen Gruppe führt.

Ist:

$$(49) \qquad (\Xi_i \Xi_k) = \sum_1^3{}_s \, c_{iks} \Xi_s f \qquad (i, k = 1, 2, 3;\ k \equiv i+1 \bmod 3)$$

die Zusammensetzung einer dreigliedrigen Gruppe G_3 und setzen wir:

$$\sum x_i \Xi_i f = Xf, \quad \sum y_k \Xi_k f = Yf,$$

unter den x und y Parameter verstanden, so erhält (XY) die Form: $\Sigma z_s \Xi_s f$, wo:

$$(50) \qquad z_s = \begin{vmatrix} c_{12s} & c_{23s} & c_{31s} \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ y_3 & y_1 & y_2 \end{vmatrix} \qquad (s = 1, 2, 3)$$

ist. Deuten wir daher die x, y, z als homogene Punktcoordinaten einer Ebene, so ist klar, dass die Zusammensetzung unsrer G_3 in dieser Ebene eine gewisse Reciprocität bestimmt, denn durch (50) wird jeder Geraden, die die Liniencoordinaten: $u_1 : u_2 : u_3$ besitzt, der Punkt:

$$(50') \qquad z_s = c_{12s} u_3 + c_{23s} u_1 + c_{31s} u_2 \qquad (s = 1, 2, 3)$$

zugeordnet.

Wir können unsre Reciprocität auch durch eine einzige Gleichung:

$$(50'') \qquad \sum_1^3{}_s \, (c_{12s} u_3 + c_{23s} u_1 + c_{31s} u_2) v_s = 0$$

zwischen Liniencoordinaten darstellen; diese Gleichung aber können wir in bekannter Weise auf die Form bringen:

$$(50''') \qquad P + G = 0,$$

wo $P = 0$ ein Polarsystem darstellt und G die Reciprocität, die durch eine gewisse Gerade bestimmt wird. In der That ergiebt sich:

$$P = \sum \{ c_{ikj} u_j v_j + \tfrac{1}{2}(c_{kjk} + c_{jii})(u_i v_k + u_k v_i) \}, \tag{51}$$

wo i, k, j irgend eine cyklische Permutation der Zahlen 1, 2, 3 ist. Andrerseits ergiebt sich:

$$G = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} c_{122} + c_{133} & c_{233} + c_{211} & c_{311} + c_{322} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}. \tag{52}$$

Es handelt sich jetzt noch darum, festzustellen, welche besondern Eigenschaften unsre Reciprocität besitzt.

Die Jacobische Identität liefert drei Relationen zwischen den c_{iks}, die sich folgendermassen schreiben lassen:

$$\left\{ c_{12s}(c_{311} + c_{322}) + c_{23s}(c_{122} + c_{133}) + c_{31s}(c_{233} + c_{211}) = 0 \right. \tag{53}$$
$$(s = 1, 2, 3).$$

Ist nun zunächst die Determinante (48) nicht gleich Null, so sind diese Gleichungen mit den drei Relationen:

$$c_{311} + c_{322} = c_{122} + c_{133} = c_{233} + c_{211} = 0 \tag{54}$$

äquivalent; die Reciprocität (50‴) reducirt sich daher auf das Polarsystem: $P = 0$, das wegen (54) zur Determinante eben die Determinante (48) hat, das also sicher das Polarsystem einer nicht ausgearteten Curve zweiter Klasse ist. Bringen wir die betreffende Curve zweiter Klasse durch eine lineare homogene Transformation der Liniencoordinaten auf die Form: $u_1 u_3 - u_2^2 = 0$, so erhält unsre Reciprocität die Form:

$$u_1 v_3 + u_3 v_1 - 2 u_2 v_2 = 0,$$

woraus sich durch Vergleichung mit (50″) ergiebt, dass die Gleichungen (49) die bekannte Form:

$$(\Xi_1 \Xi_2) = \Xi_1 f, \quad (\Xi_1 \Xi_3) = 2\Xi_2 f, \quad (\Xi_2 \Xi_3) = \Xi_3 f$$

annehmen.

Ist jetzt zweitens die Determinante (48) gleich Null, so ist: $P = 0$ stets das Polarsystem einer ausgearteten Curve zweiter Klasse. Sind nämlich die Gleichungen (54) erfüllt, so ist eben (48) die Determinante des Polarsystems, das Polarsystem ist also sicher ausgeartet. Sind andrerseits die Gleichungen (54) nicht erfüllt, so verschwindet die Gerade:

$$u_1 : u_2 : u_3 = c_{122} + c_{133} : c_{233} + c_{211} : c_{311} + c_{322} \tag{55}$$

nicht identisch. Aus (53) geht aber hervor, dass dieser Geraden in der Reciprocität (50″) ein identisch verschwindender Punkt entspricht.

Da nun die Gerade (55) G identisch gleich Null macht, so ist klar, dass ihr auch in dem Polarsysteme: $P = 0$ ein identisch verschwindender Punkt entspricht, dass also dieses Polarsystem ausgeartet ist.

Das ausgeartete Polarsystem: $P = 0$ kann durch eine lineare homogene Transformation der Liniencoordinaten entweder auf die Form: $u_1 v_2 + u_2 v_1 = 0$ oder auf die Form: $u_1 v_1 = 0$ gebracht werden, wenn es nicht überhaupt identisch verschwindet. Verschwindet die Gerade (55) nicht identisch, so genügt sie im ersten Falle nothwendig den Gleichungen: $u_1 = u_2 = 0$, im zweiten der Gleichung: $u_1 = 0$, im dritten Falle bleibt sie beliebig. Wir können aber die Liniencoordinaten in jedem Falle so wählen, dass unsre Gerade (55) die Gleichungen: $u_1 = u_2 = 0$ erfüllt. Hieraus ergiebt sich, dass unsre Reciprocität (50″) stets auf eine der vier Formen:

$$(56) \qquad \begin{cases} u_1 v_2 + u_2 v_1 + c(u_1 v_2 - u_2 v_1) = 0 \\ u_1 v_1 + c'(u_1 v_2 - u_2 v_1) = 0 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

gebracht werden kann. Hier ist der Parameter c wesentlich, c' dagegen kann, wenn es nicht verschwindet, durch geeignete Wahl der Liniencoordinaten gleich 1 gemacht werden.

Durch Vergleichung von (56) mit (50″) erhält man jetzt ohne Weiteres die noch fehlenden Zusammensetzungen dreigliedriger Gruppen und zwar im Wesentlichen in der Form des Theorems 64.

Endlich wollen wir noch kurz eine dritte Methode besprechen, die zwar weniger elementar, dafür aber um so weittragender ist.

Jede dreigliedrige Gruppe von Punkttransformationen oder Berührungstransformationen lässt sich als eine Gruppe von homogenen Berührungstransformationen schreiben. Ihre infinitesimalen Transformationen sind dann durch ihre charakteristischen Functionen:

$$H_k(x_1, x_2 \ldots, p_1, p_2 \ldots) \quad (k = 1, 2, 3)$$

bestimmt, wo die H_k homogen von erster Ordnung in den p sind und wo die Relationen:

$$(H_i H_k) = \sum_1^3 c_{iks} H_s \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

die Zusammensetzung der Gruppe bestimmen (s. Abschn. II, Kap. 18).

Die drei Functionen: H_1, H_2, H_3 bestimmen nun eine homogene Functionengruppe (a. a. O. S. 213), die augenscheinlich höchstens dreigliedrig ist und deren Functionen nicht alle homogen von nullter

Ordnung in den p sind. Eingliedrig kann diese Functionengruppe nicht sein, denn sonst könnte sie nicht drei homogene Functionen erster Ordnung: H_1, H_2, H_3 enthalten, zwischen denen keine lineare Relation: $\Sigma c_k H_k = 0$ mit constanten Coefficienten besteht. Ist sie zweigliedrig, so kann sie, wenn man noch die Veränderlichen durch eine homogene Berührungstransformation in geeigneter Weise wählt, auf eine der beiden kanonischen Formen: p_1, x_1 und p_1, x_2 gebracht werden. Demnach erhalten die charakteristischen Functionen: H_1, H_2, H_3 unsrer Gruppe von homogenen Berührungstransformationen in den neuen Veränderlichen entweder die Form:

$$H_k = \varphi_k(x_1)p_1 \quad (k=1,2,3)$$

oder die Form:

$$H_k = \varphi_k(x_2)p_1 \quad (k=1,2,3),$$

das aber sind offenbar Gruppen von Punkttransformationen, und zwar die erste auf der Geraden, die zweite in der Ebene.

Bestimmen H_1, H_2, H_3 eine dreigliedrige homogene Functionengruppe, so kann die eine der drei kanonischen Formen:

$$p_1, x_1, p_2; \quad p_1, x_1, x_2; \quad p_1, x_2, x_3$$

erhalten. Im ersten Falle ist: H_1, H_2, H_3 eine dreigliedrige Gruppe von homogenen Berührungstransformationen der Ebene, diese Gruppe ist aber nach Abschn. II, S. 410, Theor. 65 reducibel und kann daher durch eine homogene Berührungstransformation in eine Gruppe von Punkttransformationen der Ebene übergeführt werden. Im zweiten Falle ist: H_1, H_2, H_3 schon von selbst eine Gruppe von Punkttransformationen der Ebene. Im dritten Falle endlich sind alle $(H_i H_k) = 0$.

Wir haben daher den

Satz 16. *Jede dreigliedrige Gruppe von homogenen Berührungstransformationen, deren infinitesimale Transformationen nicht paarweise vertauschbar sind, kann durch eine homogene Berührungstransformation entweder in eine Gruppe von Punkttransformationen auf der Geraden oder in eine Gruppe von Punkttransformationen der Ebene übergeführt werden.*

Da wir nun alle dreigliedrigen Gruppen von Punkttransformationen auf der Geraden und in der Ebene kennen (s. S. 6 und S. 57), so können wir sofort alle Zusammensetzungen hinschreiben, die bei dreigliedrigen Gruppen vorkommen. Wir finden natürlich so dieselben Zusammensetzungen wie früher.

Die vorstehenden Entwicklungen leisten übrigens noch mehr, sie zeigen nämlich, dass der folgende Satz gilt:

Satz 17. *Ist:* $H_1 \ldots H_r$ *eine* r*-gliedrige Gruppe von homogenen Berührungstransformationen, deren infinitesimale Transformationen nicht paarweise vertauschbar sind, und ist die Gliederzahl der durch* $H_1 \ldots H_r$ *bestimmten homogenen Functionengruppe kleiner als vier, so lässt sich die Gruppe:* $H_1 \ldots H_r$ *durch eine homogene Berührungstransformation in eine Gruppe von homogenen Berührungstransformationen einer Geraden oder einer Ebene überführen.*

Da wir nun früher alle Gruppen von homogenen Berührungstransformationen auf der Geraden und in der Ebene bestimmt haben, so können wir sofort auch alle Zusammensetzungen angeben, die eine r-gliedrige Gruppe von der hier besprochenen Beschaffenheit haben kann.

Die Theorie der homogenen Functionengruppen ist überhaupt ein mächtiges Hülfsmittel zur Ableitung derartiger allgemeiner Sätze, doch wollen wir es bei den mitgetheilten bewenden lassen.

§ 137.

Wir wenden uns jetzt zur Bestimmung aller Zusammensetzungen, die eine viergliedrige Gruppe G_4 haben kann.

Unsre G_4 enthält sicher dreigliedrige Untergruppen. Enthält sie nun insbesondere eine nicht invariante G_3: $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$, so hat sie nach Theor. 58, S. 688 entweder die Zusammensetzung:

$$(57) \qquad \begin{cases} (X_1 X_2) = X_1 f + \alpha X_4 f \\ (X_1 X_3) = 2 X_2 f + \beta X_4 f \\ (X_2 X_3) = X_3 f + \gamma X_4 f \\ (X_i X_4) = \lambda_i X_4 f \\ \qquad\qquad (i = 1, 2, 3) \end{cases}$$

oder die G_3 enthält eine zweigliedrige invariante Untergruppe, die in einer invarianten dreigliedrigen Untergruppe Γ_3 der G_4 steckt. Im zweiten Falle ist die G_4 sicher integrabel, denn die dreigliedrige invariante Untergruppe Γ_3 enthält eine zweigliedrige invariante Untergruppe und ist daher sicher integrabel, also ist es auch die G_4 (vgl. S. 680, Satz 6). Im ersten Falle führen wir zunächst: $X_2 f + \frac{1}{2}\beta X_4 f$ als neues $X_2 f$ ein und erreichen dadurch, dass $\beta = 0$ wird. Sodann bilden wir die Identität zwischen $X_1 f$, $X_3 f$, $X_4 f$ und bekommen: $\lambda_2 = 0$. Nunmehr liefern die Identitäten zwischen: $X_1 f$, $X_2 f$, $X_4 f$ und zwischen: $X_2 f$, $X_3 f$, $X_4 f$ sofort: $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$. Endlich führen wir noch: $X_1 f + \alpha X_4 f$ als neues $X_1 f$ und $X_3 f + \gamma X_4 f$ als neues $X_3 f$ ein, dann erhalten wir die Zusammensetzung:

$$(58) \qquad \begin{cases} (X_1 X_2) = X_1 f, \quad (X_1 X_3) = 2 X_2 f, \quad (X_2 X_3) = X_3 f \\ (X_1 X_4) = (X_2 X_4) = (X_3 X_4) = 0. \end{cases}$$

Es ist das offenbar eine viergliedrige nicht integrable Gruppe.

Wir wissen jetzt, dass jede G_4, die eine nicht invariante G_3 enthält, entweder integrabel ist oder die Zusammensetzung (58) besitzt. Andrerseits lässt sich leicht zeigen, dass jede G_4, die lauter invariante G_3 enthält, integrabel ist. In der That, nach Abschn. I, S. 593, Theor. 106 gehört jede eingliedrige Untergruppe der G_4 mindestens einer dreigliedrigen Untergruppe der G_4 an; die G_4 enthält mithin sicher zwei verschiedene dreigliedrige Untergruppen G_3 und Γ_3. Diese beiden Untergruppen sind in unserm Falle in der G_4 invariant, die zweigliedrige Untergruppe, die sie gemein haben (a. a. O. S. 211, Satz 7 und S. 264, Satz 10) ist daher ebenfalls in der G_4 invariant. Hieraus aber folgt, dass die beiden invarianten Untergruppen G_3 und Γ_3 der G_4 integrabel sind, die G_4 ist mithin selbst integrabel. Demnach gilt der

Satz 18. *Jede nicht integrable viergliedrige Gruppe hat die Zusammensetzung* (58).

Da die Derivirte einer integrabeln G_4 höchstens dreigliedrig ist und da andrerseits die Derivirte einer G_4 von der Zusammensetzung (58) gerade dreigliedrig ist, so ergiebt sich zugleich der

Satz 19. *Die erste Derivirte einer viergliedrigen Gruppe ist höchstens dreigliedrig.*

Bevor wir zu den integrabeln viergliedrigen Gruppen übergehen, wollen wir noch einige Betrachtungen einschalten, wir wollen nämlich direct die Zusammensetzungen aller viergliedrigen Gruppen bestimmen, die eine dreigliedrige einfache Gruppe enthalten. Diese Gruppen sind natürlich nicht integrabel, wir finden also auf diesem Wege keine neuen Gruppen, dafür ist aber die Methode, von der wir Gebrauch machen, äusserst fruchtbar; sie kann auch bei der Behandlung der fünf- und der sechsgliedrigen nicht integrabeln Gruppen gute Dienste leisten.

Es sei G_4 eine viergliedrige Gruppe, die eine dreigliedrige einfache Gruppe G_3 enthält; dann können wir annehmen, dass diese G_3 von $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ erzeugt ist und dass die Relationen:

$$(X_1 X_2) = X_1 f, \quad (X_1 X_3) = 2 X_2 f, \quad (X_2 X_3) = X_3 f$$

bestehen. Wäre nun die G_3 nicht in der G_4 invariant, so müsste sie (vgl. S. 694, Satz 13 und S. 696) eine zweigliedrige invariante Untergruppe enthalten, was nicht der Fall ist. Die G_3 ist somit in der G_4 invariant. Bilden wir daher die ∞^3 infinitesimalen Transformationen: $\Sigma e_k X_k f$ als Punkte in einem gewöhnlichen dreifach ausgedehnten Raume ab, so bleibt die Ebene: $e_4 = 0$, die das Bild der G_3 ist, bei der Adjungirten: $E_1 f \ldots E_4 f$ der G_4 invariant.

Nun transformirt die Gruppe: $E_1 f$, $E_2 f$, $E_3 f$ die Punkte der Ebene: $e_4 = 0$ durch eine dreigliedrige projective Gruppe, die offenbar mit der Adjungirten der G_3 zusammenfällt, sie lässt also in dieser Ebene einen isolirten nicht ausgearteten Kegelschnitt invariant (s. S. 13 ff.). Andrerseits ist die Gruppe: $E_1 f$, $E_2 f$, $E_3 f$ in der Adjungirten der G_4 invariant, demnach muss der besprochene Kegelschnitt bei der ganzen Adjungirten der G_4, also auch bei $E_4 f$ invariant bleiben (s. Abschn. I, S. 586 f.). Da aber ein nicht ausgearteter Kegelschnitt nicht mehr als drei unabhängige infinitesimale projective Transformationen seiner Ebene gestattet (s. S. 88, Satz 2), so muss es unter den ∞^3 infinitesimalen Transformationen: $\Sigma \lambda_k E_k f$ mindestens eine geben, die alle Punkte der Ebene: $e_4 = 0$ in Ruhe lässt. Berücksichtigt man schliesslich, dass: $E_1 f$, $E_2 f$, $E_3 f$ die Punkte der Ebene: $e_4 = 0$ dreigliedrig transformiren, so erkennt man, dass sich $X_4 f$ so wählen lässt, dass $E_4 f$ jeden Punkt der Ebene: $e_4 = 0$ in Ruhe lässt.

Ist $X_4 f$ in der angegebenen Weise gewählt, so hat $E_4 f$, das ja auch noch den Punkt: $e_1 = e_2 = e_3 = 0$ invariant lässt (s. S. 673) offenbar die Form:

$$E_4 f = \varrho \left(e_1 \frac{\partial f}{\partial e_1} + e_2 \frac{\partial f}{\partial e_2} + e_3 \frac{\partial f}{\partial e_3} \right),$$

es bestehen also drei Relationen von der Gestalt:

$$(X_i X_4) = \varrho X_i f \quad (i = 1, 2, 3).$$

Die Identität zwischen: $X_1 f$, $X_2 f$, $X_4 f$ liefert aber sofort $\varrho = 0$, also ergiebt sich, dass jede viergliedrige Gruppe, die eine dreigliedrige einfache Gruppe enthält, die Zusammensetzung (58) besitzt.

Um alle nicht integrabeln viergliedrigen Gruppen zu finden, müsste man jetzt noch die unter ihnen aufsuchen, die keine dreigliedrige einfache Gruppe enthalten. Man würde natürlich finden, dass es keine Gruppen dieser Art giebt, aber die dazu erforderlichen Ueberlegungen würden auf eine Wiederholung des auf S. 722 Gesagten hinauskommen, wir gehen daher nicht auf sie ein.

Wir haben jetzt noch die Zusammensetzungen aller viergliedrigen integrabeln Gruppen zu bestimmen; dabei ist es vortheilhaft, zunächst alle die Gruppen auszuschliessen, die eine dreigliedrige Untergruppe mit paarweise vertauschbaren infinitesimalen Transformationen enthalten, und diese Gruppen nachher für sich zu behandeln.

Es sei G_4 eine viergliedrige integrable Gruppe, die keine dreigliedrige Untergruppe mit paarweise vertauschbaren infinitesimalen Transformationen enthält. Die erste Derivirte der G_4 ist dann ebenfalls integrabel und zwar kann sie offenbar nur drei-, zwei- oder eingliedrig sein. Diese drei Fälle müssen wir daher der Reihe nach behandeln.

Ist die erste Derivirte der G_4 *dreigliedrig*, so können wir annehmen, dass sie von $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ erzeugt wird, und dass ihre Zusammensetzung eine der Normalformen: (44), (45) und (47) des Theorems

64, S. 715 f. besitzt. Von diesen drei Fällen kann aber, wie sich zeigen lässt, nur der dritte vorkommen.

In der That, tritt einer der beiden ersten Fälle ein, so hat die Gruppe: $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ eine Zusammensetzung von der Form:

$$(X_1 X_2) = 0, \quad (X_1 X_3) = X_1 f, \quad (X_2 X_3) = c\varepsilon X_1 f + c X_2 f,$$

wo ε für $c \neq 1$ stets verschwindet und für $c = 1$ entweder $= 0$ oder $= 1$ ist. Für $c \neq 0$ ist hier die Gruppe: $X_1 f$, $X_2 f$ die zweite Derivirte der G_4 und als solche in der G_4 invariant. Andrerseits sind für $c = 0$ offenbar $X_1 f$ und $X_2 f$ die beiden einzigen invarianten eingliedrigen Untergruppen der ersten Derivirten der G_4, die Gruppe: $X_1 f$, $X_2 f$ ist demnach auch dann in der G_4 invariant. Hieraus folgt, dass unter allen Umständen Relationen von der Form:

$$(X_1 X_4) = \lambda X_1 f + \mu X_2 f, \quad (X_2 X_4) = \nu X_1 f + \varrho X_2 f$$

bestehen. Da nun aber die erste Derivirte der G_4 dreigliedrig sein soll, so darf $(X_3 X_4)$ nicht von $X_3 f$ frei sein, wir können daher annehmen, dass es die Form:

$$(X_3 X_4) = X_3 f + \alpha X_1 f + \beta X_2 f$$

besitzt. Bilden wir jetzt die Identitäten zwischen $X_1 f$, $X_3 f$, $X_4 f$ und zwischen $X_2 f$, $X_3 f$, $X_4 f$ und berücksichtigen wir das eine Mal blos den Factor von $X_1 f$, das andre Mal blos den von $X_2 f$, so kommt:

$$-1 - \mu c\varepsilon = 0, \quad c\varepsilon\mu - c = 0,$$

zwei Gleichungen, die wegen der Beziehung zwischen ε und c nicht mit einander verträglich sind. Demnach ist das Eintreten eines der beiden ersten Fälle wirklich ausgeschlossen.

Im dritten Falle hat die Gruppe: $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ die Zusammensetzung:

$$(X_1 X_2) = 0, \quad (X_1 X_3) = 0, \quad (X_2 X_3) = X_1 f, \tag{59}$$

also ist $X_1 f$ die zweite Derivirte der G_4 und als solche in der G_4 invariant, das heisst es ist:

$$(X_1 X_4) = c X_1 f. \tag{60}$$

Ferner sind die ∞^1 zweigliedrigen Gruppen: $X_1 f$, $a X_2 f + b X_3 f$ sämmtlich in der Gruppe: $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ invariant, sie werden also bei der adjungirten Gruppe der G_4 höchstens eingliedrig transformirt; da sie überdies in dem ebenen Raume der ∞^3 infinitesimalen Transformationen der G_4 durch ein ebenes Büschel von Geraden abgebildet werden, so ist klar, dass mindestens eine unter ihnen auch in der G_4 invariant ist. Wir können uns nun, ohne dass die Relationen (59) eine Aenderung erleiden, $X_2 f$ und $X_3 f$ so gewählt denken, dass gerade $X_1 f$, $X_2 f$ eine invariante Untergruppe der G_4 wird, und haben jetzt

zur Bestimmung der Zusammensetzung unsrer G_4 noch zwei Relationen von der Form:

$$(61)\qquad \begin{cases} (X_2 X_4) = \alpha X_1 f + \beta X_2 f \\ (X_3 X_4) = \gamma X_1 f + \delta X_2 f + \varepsilon X_3 f. \end{cases}$$

Hier darf weder β noch ε verschwinden, weil sonst die erste Derivirte unsrer G_4 nicht dreigliedrig wäre.

Da $\beta \neq 0$ ist, können wir es gleich 1 machen. Ist das geschehen, so führen wir: $X_4 f - \alpha X_3 f + \gamma X_2 f$ als neues $X_4 f$ ein und erreichen so, dass $\alpha = \gamma = 0$ wird. Bilden wir sodann die Identität zwischen $X_2 f$, $X_3 f$, $X_4 f$ — es ist das die einzige, die noch nicht von selbst erfüllt ist — so kommt: $c - \varepsilon - 1 = 0$, also muss $c \neq 1$ sein und unsre Relationen (61) haben nunmehr die Form:

$$(X_2 X_4) = X_2 f, \quad (X_3 X_4) = \delta X_2 f + (c-1) X_3 f \quad (c \neq 1).$$

Führen wir endlich hier: $X_3 f + \lambda X_2 f$ als neues $X_3 f$ ein, so können wir, sobald $c \neq 2$ ist, durch geeignete Wahl von λ bewirken, dass δ gleich Null wird. Ist aber $c = 2$ und $\delta \neq 0$, so führen wir $\delta X_2 f$ als neues $X_2 f$ und $\delta X_1 f$ als neues $X_1 f$ ein, wodurch $\delta = 1$ wird.

Wir finden demnach nur die beiden Zusammensetzungen:

$$(62)\qquad \begin{cases} (X_1 X_2) = 0, \quad (X_1 X_3) = 0, \quad (X_2 X_3) = X_1 f \\ (X_1 X_4) = c X_1 f, \quad (X_2 X_4) = X_2 f, \quad (X_3 X_4) = (c-1) X_3 f \end{cases} \quad (c \neq 1)$$

und:

$$(63)\qquad \begin{cases} (X_1 X_2) = 0, \quad (X_1 X_3) = 0, \quad (X_2 X_3) = X_1 f \\ (X_1 X_4) = 2 X_1 f, \quad (X_2 X_4) = X_2 f, \quad (X_3 X_4) = X_2 f + X_3 f. \end{cases}$$

Ist die erste Derivirte unsrer G_4 *zweigliedrig*, so können wir annehmen, dass sie von $X_1 f$ und $X_2 f$ erzeugt ist. Sind $X_1 f$ und $X_2 f$ nicht vertauschbar, so ist die erste Derivirte der Gruppe: $X_1 f$, $X_2 f$ nothwendig in der G_4 invariant. Ist andrerseits $(X_1 X_2) = 0$, so wird die Schaar der ∞^1 eingliedrigen Gruppen: $a X_1 f + b X_2 f$ bei der Adjungirten der G_4 höchstens zweigliedrig transformirt und es bleibt daher mindestens eine von ihnen invariant. Wir können daher unter allen Umständen annehmen, dass $X_1 f$ in der G_4 invariant ist, dass also Relationen von der Form:

$$(X_1 X_2) = \varepsilon X_1 f, \quad (X_1 X_3) = \alpha X_1 f, \quad (X_1 X_4) = \beta X_1 f$$
$$(X_2 X_3) = \lambda X_1 f + \mu X_2 f, \quad (X_2 X_4) = \lambda' X_1 f + \mu' X_2 f$$
$$(X_3 X_4) = \nu X_1 f + \varrho X_2 f$$

bestehen.

Wäre nun $\varepsilon \neq 0$, so ergäbe sich aus den Jacobischen Identitäten zwischen: $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$, zwischen: $X_1 f$, $X_2 f$, $X_4 f$ und zwischen:

$X_1 f$, $X_3 f$, $X_4 f$ sofort: $\mu = \mu' = \varrho = 0$, die erste Derivirte unsrer G_4 wäre daher gegen unsre Voraussetzung blos eingliedrig. Demnach ist $\varepsilon = 0$. Ferner ist eine der infinitesimalen Transformationen: $aX_3 f + bX_4 f$ sicher mit $X_1 f$ vertauschbar, wir können also etwa $\alpha = 0$ setzen.

Verschwänden jetzt λ und μ beide, so wäre $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ eine dreigliedrige Untergruppe unsrer G_4, deren infinitesimale Transformationen paarweise vertauschbar wären. Diesen Fall haben wir aber vorläufig ausgeschlossen, also sind λ und μ nicht beide gleich Null, wir können daher durch geeignete Wahl von $X_2 f$ und $X_3 f$ erreichen, dass $(X_2 X_3)$ entweder $= X_2 f$ oder $= X_1 f$ wird.

Im ersten Falle führen wir noch: $X_4 f - \mu' X_3 f + \varrho X_2 f$ als neues $X_4 f$ ein und erhalten so die Relationen:

$$(X_1 X_2) = 0, \quad (X_1 X_3) = 0, \quad (X_2 X_3) = X_2 f$$
$$(X_1 X_4) = \beta X_1 f, \quad (X_2 X_4) = \lambda' X_1 f, \quad (X_3 X_4) = \nu X_1 f.$$

Die Identität zwischen $X_2 f$, $X_3 f$, $X_4 f$ — die einzige, die noch nicht von selbst erfüllt ist — liefert jetzt: $\lambda' = 0$. In Folge dessen kann β nicht verschwinden, weil sonst $X_1 f$, $X_2 f$ und $X_4 f$ paarweise vertauschbar wären. Wir machen natürlich $\beta = 1$ und indem wir schliesslich noch $X_3 f - \nu X_1 f$ als neues $X_3 f$ einführen, finden wir die Zusammensetzung:

$$(64) \quad \begin{cases} (X_1 X_2) = 0, & (X_1 X_3) = 0, & (X_2 X_3) = X_2 f \\ (X_1 X_4) = X_1 f, & (X_2 X_4) = 0, & (X_3 X_4) = 0. \end{cases}$$

Im zweiten Falle führen wir: $X_1 f - \lambda' X_3 f + \nu X_2 f$ als neues $X_4 f$ ein und erhalten die Relationen:

$$(X_1 X_2) = 0, \quad (X_1 X_3) = 0, \quad (X_2 X_3) = X_1 f$$
$$(X_1 X_4) = \beta X_1 f, \quad (X_2 X_4) = \mu' X_2 f, \quad (X_3 X_4) = \varrho X_2 f.$$

Die Identität zwischen: $X_2 f$, $X_3 f$, $X_4 f$ liefert hier: $\mu' = \beta$. Natürlich darf β nicht verschwinden, weil sonst $X_1 f$, $X_2 f$, $X_4 f$ paarweise vertauschbar wären, es kann somit gleich 1 gemacht werden. Führen wir endlich noch $X_3 f - \varrho X_2 f$ als neues $X_3 f$ ein, so gelangen wir zu der Zusammensetzung:

$$(65) \quad \begin{cases} (X_1 X_2) = 0, & (X_1 X_3) = 0, & (X_2 X_3) = X_1 f \\ (X_1 X_4) = X_1 f, & (X_2 X_4) = X_2 f, & (X_3 X_4) = 0. \end{cases}$$

Ist die erste Derivirte unsrer G_4 *eingliedrig*, so können wir annehmen, dass sie von $X_1 f$ erzeugt ist. Dann hängen alle sechs Ausdrücke $(X_i X_k)$ nur von $X_1 f$ ab, wir können daher $X_2 f$ und $X_3 f$ so wählen, dass:

$$(X_1 X_2) = 0, \quad (X_1 X_3) = 0$$

wird. Offenbar darf jetzt $(X_2 X_3)$ nicht verschwinden, weil sonst $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ paarweise vertauschbar wären, wir können daher $(X_2 X_3) = X_1 f$ setzen, während

$$(X_1 X_4) = \alpha X_1 f, \quad (X_2 X_4) = \beta X_1 f, \quad (X_3 X_4) = \gamma X_1 f$$

ist. Nunmehr liefert die Identität zwischen $X_2 f$, $X_3 f$, $X_4 f$ die Gleichung: $\alpha = 0$ und überdies können wir, indem wir: $X_4 f - \beta X_3 f + \gamma X_2 f$ als neues $X_4 f$ einführen, auch $\beta = \gamma = 0$ machen. Demnach würde unsre G_4 die drei paarweise vertauschbaren infinitesimalen Transformationen: $X_1 f$, $X_2 f$, $X_4 f$ enthalten, was nicht der Fall sein darf. Wir sehen hieraus, dass unter der gemachten Voraussetzung die erste Derivirte unsrer G_4 nicht eingliedrig sein kann.

Nachdem wir die Zusammensetzungen aller integrabeln G_4 bestimmt haben, die keine dreigliedrige Untergruppe mit paarweise vertauschbaren infinitesimalen Transformationen enthalten, brauchen wir nur noch die Zusammensetzungen aller G_4 aufzusuchen, die eine derartige Untergruppe enthalten.

Bevor wir diese Gruppen bestimmen, wollen wir einen allgemeinen Satz beweisen, der sich ohne Weiteres auf sie anwenden lässt. Der Satz lautet:

Satz 20. *Enthält eine r-gliedrige Gruppe, deren infinitesimale Transformationen nicht alle paarweise vertauschbar sind, eine $(r-1)$-gliedrige Untergruppe mit paarweise vertauschbaren infinitesimalen Transformationen, so enthält sie stets auch eine invariante $(r-1)$-gliedrige Untergruppe mit paarweise vertauschbaren infinitesimalen Transformationen, überdies ist sie integrabel.*

In der That, es sei: $X_1 f \ldots X_r f$ oder G_r die betreffende r-gliedrige Gruppe und: $X_1 f \ldots X_{r-1} f$ oder G_{r-1} sei die $(r-1)$-gliedrige Untergruppe, deren infinitesimale Transformationen paarweise vertauschbar sind, es sei also:

$$(X_i X_k) = 0 \quad (i, k = 1 \ldots r-1).$$

Ist die G_{r-1} nicht schon selbst in der G_r invariant, so giebt es in der G_r ∞^1 mit G_{r-1} gleichberechtigte Untergruppen, die von der Adjungirten der G_r entweder zwei- oder dreigliedrig transformirt werden (s. Theor. 58, S. 688). Hier aber kann blos der erste dieser beiden Fälle eintreten, da die dreigliedrige allgemeine projective Gruppe einer einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit augenscheinlich nicht mit unsrer G_r isomorph ist. Demnach haben die ∞^1 mit G_{r-1} gleichberechtigten Untergruppen der G_r nach dem angeführten Theorem eine in der G_r invariante $(r-2)$-gliedrige Untergruppe, etwa $X_1 f$

$\ldots X_{r-2}f$ gemein, die ihrerseits in einer $(r-1)$-gliedrigen invarianten Untergruppe der G_r, etwa in: $X_1 f \ldots X_{r-2}f$, $X_r f$ steckt. Dann aber lassen sich (s. S. 687) die ∞^1 mit G_{r-1} gleichberechtigten Untergruppen der G_r in der Form: $X_1 f \ldots X_{r-2}f$, $X_{r-1}f + \lambda X_r f$ darstellen und da die alle mit der G_{r-1} gleichzusammengesetzt sind, so ist nothwendig:

$$(X_1 X_r) = (X_2 X_r) = \cdots = (X_{r-2} X_r) = 0,$$

das heisst die G_r enthält eine invariante $(r-1)$-gliedrige Untergruppe: $X_1 f \ldots X_{r-2}f$, $X_r f$, deren infinitesimale Transformationen paarweise vertauschbar sind.

Damit ist der erste Theil des Satzes 20 bewiesen. Der zweite Theil aber, dass die G_r integrabel ist, folgt einfach daraus, dass die infinitesimalen Transformationen der ersten Derivirten der G_r nothwendig paarweise vertauschbar sind.

Wir kehren jetzt wieder zu dem besonderen Falle: $r = 4$ zurück. Auf Grund von Satz 20 sind wir sicher, dass jede G_4 von der verlangten Beschaffenheit eine Zusammensetzung von der folgenden Form besitzt:

$$(66) \qquad \begin{cases} (X_1 X_2) = 0, \quad (X_1 X_3) = 0, \quad (X_2 X_3) = 0 \\ (X_i X_4) = c_{i1} X_1 f + c_{i2} X_2 f + c_{i3} X_3 f \\ \qquad\qquad (i = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Deuten wir nun die ∞^3 infinitesimalen Transformationen $\Sigma e_k X_k f$ unsrer G_4 als Punkte in einem ebenen R_3 und denken wir uns diesen R_3 durch die Adjungirte: $E_1 f \ldots E_4 f$ der G_4 transformirt, so ist klar, dass die Ebene $e_4 = 0$ invariant bleibt. $E_1 f$, $E_2 f$, $E_3 f$ lassen sogar alle Punkte dieser Ebene in Ruhe und höchstens:

$$E_4 f = \sum_{js}^{1,2,3} c_{js} e_j \frac{\partial f}{\partial e_s}$$

transformirt die Punkte der bewussten Ebene wirklich.

Um die Zusammensetzung (66) auf möglichst einfache Normalformen zu bringen, ist es nur nöthig, als neue $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ solche drei unabhängige aus: $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ linear abgeleitete infinitesimale Transformationen einzuführen, dass die Ausdrücke $(X_i X_4)$ möglichst einfach werden. Das aber kommt einfach darauf hinaus, die Form von $E_4 f$ durch eine lineare homogene Transformation von e_1, e_2, e_3 möglichst zu vereinfachen; denn aus den Coefficienten von $E_4 f$ kann man jederzeit die Form der Ausdrücke $(X_i X_4)$ ablesen. Die Zurückführung von $E_4 f$ auf seine einfachsten Normalformen haben wir aber

schon früher geleistet, als wir alle Typen von linearen homogenen Gruppen in drei Veränderlichen bestimmten. Wir brauchen daher aus der Tabelle auf S. 116 ff. nur alle darin enthaltenen Typen von eingliedrigen Gruppen zu entnehmen, dann können wir sofort alle Typen von G_4 von der Zusammensetzung (66) angeben.

Als Normalformen von $E_4 f$ erhalten wir auf diese Weise die folgenden sechs:

$$e_1 \frac{\partial f}{\partial e_1} + a e_2 \frac{\partial f}{\partial e_2} + c e_3 \frac{\partial f}{\partial e_3},$$

$$e_3 \frac{\partial f}{\partial e_1} + e_2 \frac{\partial f}{\partial e_2} + c \left(e_1 \frac{\partial f}{\partial e_1} + e_2 \frac{\partial f}{\partial e_2} + e_3 \frac{\partial f}{\partial e_3} \right)$$

$$e_3 \frac{\partial f}{\partial e_1} + e_1 \frac{\partial f}{\partial e_2}$$

$$e_3 \frac{\partial f}{\partial e_1} + e_1 \frac{\partial f}{\partial e_2} + e_1 \frac{\partial f}{\partial e_1} + e_2 \frac{\partial f}{\partial e_2} + e_3 \frac{\partial f}{\partial e_3}$$

$$e_3 \frac{\partial f}{\partial e_2}, \quad e_3 \frac{\partial f}{\partial e_2} + e_1 \frac{\partial f}{\partial e_1} + e_2 \frac{\partial f}{\partial e_2} + e_3 \frac{\partial f}{\partial e_3},$$

wo wir, um nicht zu viele Fälle unterscheiden zu müssen, in der ersten Normalform drei, die auf S. 119 getrennt aufgeführt sind, in eine zusammengezogen haben. Ausserdem ist noch der Fall zu berücksichtigen, dass $E_4 f$ identisch verschwindet. Entsprechend diesen Normalformen von $E_4 f$ ergeben sich nun die folgenden Normalformen der Zusammensetzung (66):

(67) $$(X_1 X_4) = X_1 f, \quad (X_2 X_4) = a X_2 f, \quad (X_3 X_4) = c X_3 f, \quad (X_i X_k) = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

(68) $$(X_1 X_4) = c X_1 f, \quad (X_2 X_4) = (1 + c) X_2 f, \quad (X_3 X_4) = X_1 f + c X_3 f, \quad (X_i X_k) = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

(69) $$(X_1 X_4) = X_2 f, \quad (X_2 X_4) = 0, \quad (X_3 X_4) = X_1 f, \quad (X_i X_k) = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

(70) $$(X_1 X_4) = X_1 f + X_2 f, \quad (X_2 X_4) = X_2 f, \quad (X_3 X_4) = X_1 f + X_3 f, \quad (X_i X_k) = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

(71) $$(X_1 X_4) = 0, \quad (X_2 X_4) = 0, \quad (X_3 X_4) = X_2 f, \quad (X_i X_k) = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

(72) $$(X_1 X_4) = X_1 f, \quad (X_2 X_4) = X_2 f, \quad (X_3 X_4) = X_2 f + X_3 f, \quad (X_i X_k) = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

(73) $$(X_1 X_4) = 0, \quad (X_2 X_4) = 0, \quad (X_3 X_4) = 0, \quad (X_i X_k) = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

Es wäre schliesslich noch zu untersuchen, ob etwa eine unter diesen sieben Zusammensetzungen überflüssig ist. Man kann sich aber leicht überzeugen, dass keine überflüssig ist. In der That, eine G_4 könnte offenbar nur dann zwei verschiedenen unter unsern sieben Klassen angehören, wenn sie zwei verschiedene invariante dreigliedrige Untergruppen mit paarweise vertauschbaren infinitesimalen Transformationen enthielte, etwa die beiden: $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ und: $X_1 f$, $X_2 f$, $X_4 f$. In diesem Falle wären aber ausser $(X_3 X_4)$ offenbar alle Klammerausdrücke null und $(X_3 X_4)$ wäre aus $X_1 f$ und $X_2 f$ linear ableitbar, es könnte also, wenn es nicht gleich Null wäre, auf die Form: $(X_3 X_4) = X_2 f$ gebracht werden. Der angenommene Fall kann daher, sobald $X_1 f \ldots X_4 f$ nicht alle paarweise vertauschbar sind, nur dann eintreten, wenn $E_4 f$ die vorletzte der auf S. 730 angegebenen Normalformen erhalten kann, das heisst die Gruppen (71) und (73) sind die einzigen unter den Gruppen (67) . . . (73), die zwei verschiedene invariante G_3 mit paarweise vertauschbaren Transformationen enthalten.

Die oben aufgezählten sieben Gruppen repräsentiren also sieben verschiedene Typen von Zusammensetzungen. Zwei von diesen Typen enthalten aber willkürliche Parameter und da ist allerdings zu bemerken, dass wenigstens die Relationen (67) nicht ebensoviele verschiedene Zusammensetzungen darstellen, als es verschiedene Werthsysteme a, c giebt; man erkennt das sofort, wenn man zum Beispiel a mit c vertauscht. Wir brauchen aber auf diesen Punkt nicht näher einzugehen; es genügt zu erwähnen, dass es jedenfalls unmöglich ist, aus (67) einen der beiden Parameter a und c zu entfernen. Was andrerseits die Zusammensetzung (68) betrifft, so verhält sich die Sache so, dass zwei verschiedenen Werthen von c stets auch zwei verschiedene Zusammensetzungen entsprechen.

Bestimmt man die Gliederzahl der ersten Derivirten für jede einzelne der Gruppen (67) . . . (73), so ergiebt sich Folgendes: Die erste Derivirte ist dreigliedrig im Falle (67), wenn weder a noch c verschwindet, im Falle (68) für $c \neq 0$ und $\neq -1$ und in den Fällen (70) und (72). Zweigliedrig ist sie im Falle (67) für $c = 0$, $a \neq 0$*), im Falle (68) für $c = 0$ und $= -1$ und endlich im Falle (69). Eingliedrig ist die erste Derivirte der Gruppe (67), wenn $a = c = 0$, und ebenso die erste Derivirte der Gruppe (71).

Unter den Gruppen (67) nehmen also die, bei denen a und c nicht beide von Null verschieden sind, eine ausgezeichnete Stelle ein. Es giebt aber unter ihnen auch noch andre, die in gewisser Weise

*) Der Fall $a=0$, $c\neq 0$ braucht offenbar nicht besonders erwähnt zu werden.

ausgezeichnet sind. Sind nämlich die drei Zahlen 1, a, c alle von einander verschieden, so enthält eine Gruppe von der Zusammensetzung (67) blos drei invariante eingliedrige Untergruppen, nämlich: $X_1 f$, $X_2 f$ und $X_3 f$. Sind dagegen zwei, aber auch nur zwei der Zahlen 1, a, c einander gleich — man kann in diesem Falle offenbar annehmen, dass entweder $a = 1$ und $c \neq 1$ oder $a = c = 0$ ist — so enthält die Gruppe ausser der invarianten eingliedrigen Untergruppe: $X_1 f$ noch ∞^1 verschiedene Untergruppen dieser Art. Ist endlich $a = c = 1$, so ist jede eingliedrige Untergruppe: $e_1 X_1 f + e_2 X_2 f + e_3 X_3 f$ in der G_4 invariant und ausserdem erzeugt jede lineare Mannigfaltigkeit von infinitesimalen Transformationen der G_4 eine Untergruppe der G_4.

Wir stellen jetzt unsre Ergebnisse über die viergliedrigen Gruppen zusammen:

Theorem 65. *Ist eine viergliedrige Gruppe nicht integrabel, so enthält sie eine invariante dreigliedrige einfache Gruppe und hat die Zusammensetzung* (58) *auf S. 723. Ist sie integrabel, enthält sie aber keine dreigliedrige Untergruppe mit paarweise vertauschbaren infinitesimalen Transformationen, so hat sie eine der Zusammensetzungen* (62), (63), (64), (65) *auf S. 726 und 727. Ist sie endlich integrabel und enthält sie eine dreigliedrige Untergruppe mit paarweise vertauschbaren infinitesimalen Transformationen, so hat sie eine der Zusammensetzungen* (67) ... (73) *auf S.* 730.

Da die Zusammensetzung (65) augenscheinlich aus der Zusammensetzung (62) erhalten wird, wenn man dem Parameter c den dort ausgeschlossenen Werth $c = 1$ ertheilt, so können wir sagen, dass es im Ganzen elf verschiedene Typen von Zusammensetzungen viergliedriger Gruppen giebt. Allerdings enthält einer dieser Typen zwei wesentliche Parameter und zwei Typen enthalten je einen wesentlichen Parameter. Will man sich eine anschauliche Vorstellung von diesen Typen machen, so thut man gut, für jeden einzelnen Typus die auftretenden invarianten drei-, zwei- und eingliedrigen Untergruppen zu bestimmen und in der Ebene eine Projection der Figur zu entwerfen, die von diesen Untergruppen in dem R_3 der ∞^3 infinitesimalen Transformationen der betreffenden Gruppe gebildet wird. Kann man, ohne dass die Figur unübersichtlich wird, auch die nicht invarianten drei- und zweigliedrigen Untergruppen mit andeuten, dann um so besser. Bei den Zusammensetzungen, die wesentliche Parameter enthalten, muss man übrigens für gewisse besondere Werthe dieser Parameter eigne Figuren zeichnen.

§ 138.

In diesem Paragraphen suchen wir alle Zusammensetzungen, die eine nicht integrable G_5 oder G_6 haben kann.

Enthält eine G_5 eine dreigliedrige einfache Untergruppe G_3 von der Zusammensetzung:

$$(74) \qquad (X_1 X_2) = X_1 f, \quad (X_1 X_3) = 2 X_2 f, \quad (X_2 X_3) = X_3 f,$$

so ist sie sicher nicht integrabel. Wir betrachten zuerst den Fall, dass die G_5 eine solche G_3 enthält.

Die G_3 ist entweder in keiner viergliedrigen Untergruppe der G_5 enthalten oder sie ist in einer solchen enthalten. Im ersten Falle ist die G_3 weder in einer viergliedrigen Untergruppe der G_5 noch in der G_5 selbst invariant, es giebt also in der G_5 ∞^2 mit G_3 gleichberechtigte Untergruppen, die von der Adjungirten der G_5 durch eine mit der G_5 isomorphe transitive Gruppe γ unter einander vertauscht werden. Da die G_3 einfach ist und in keiner grösseren Untergruppe der G_5 steckt, ergiebt sich sofort, dass diese Gruppe γ mit G_5 holoedrisch isomorph, also fünfgliedrig ist und dass sie die zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit der ∞^2 mit G_3 gleichberechtigten Untergruppen primitiv transformirt (s. Abschn. I, S. 483, Theor. 85 und S. 521, Theor. 91). Demnach ist unsre G_5 mit einer fünfgliedrigen primitiven Gruppe der Ebene gleichzusammengesetzt, also nach S. 35, Theor. 5 mit der speciellen linearen Gruppe: $p,\ q,\ xq,\ xp - yq,\ yp$.

Steckt andrerseits die G_3 in einer G_4, so können wir annehmen, dass $X_1 f \ldots X_4 f$ diese G_4 ist und ausserdem nach S. 722, dass die Gleichungen:

$$(X_1 X_4) = 0, \quad (X_2 X_4) = 0, \quad (X_3 X_4) = 0$$

bestehen. Ist nun die G_4 in der G_5 invariant, so ist auch die erste Derivirte der G_4, also eben die G_3 in der G_4 invariant. Ist dagegen die G_4 nicht in der G_5 invariant, so enthält sie nach S. 688, Theor. 58 entweder eine zwei- oder eine dreigliedrige invariante Untergruppe, die auch in der G_5 invariant ist. Nun aber enthält die G_4 nach S. 26, Theor. 3 überhaupt keine zweigliedrige invariante Untergruppe und nur eine invariante dreigliedrige, nämlich G_3. Also ergiebt sich auch hier, dass die G_3 in der G_5 invariant ist.

Aus dem Gesagten folgt, dass unter der gemachten Voraussetzung auch: $X_1 f,\ X_2 f,\ X_3 f,\ X_5 f$ eine viergliedrige Untergruppe der G_5 ist, wir können daher annehmen, dass auch:

$$(X_1 X_5) = 0, \quad (X_2 X_5) = 0, \quad (X_3 X_5) = 0$$

ist. Bilden wir nunmehr die Identitäten zwischen $X_4 f$, $X_5 f$ und je einer der Transformationen: $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$, so ergiebt sich:

$$((X_4 X_5) X_1) = ((X_4 X_5) X_2) = ((X_4 X_5) X_3) = 0,$$

folglich muss $(X_4 X_5)$ von $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ frei sein. Ist daher $(X_4 X_5) \neq 0$, so können wir durch geeignete Wahl von $X_4 f$ und $X_5 f$ erreichen, dass $(X_4 X_5) = X_4 f$ wird.

Wir können dieses Ergebniss kurz so ausdrücken: Enthält eine G_5 eine dreigliedrige einfache Gruppe, die in einer viergliedrigen Untergruppe der G_5 steckt, so ist sie entweder mit der fünfgliedrigen Gruppe:

$$p,\ xp,\ x^2 p,\ q,\ yq$$

der Ebene oder mit der fünfgliedrigen Gruppe:

$$p,\ xp,\ x^2 p,\ q,\ r$$

des Raumes gleichzusammengesetzt.

Nunmehr suchen wir alle nicht integrabeln G_5, die keine dreigliedrige einfache Untergruppe enthalten; es wird sich aber zeigen, dass es derartige Gruppen überhaupt nicht giebt.

Enthält eine nicht integrable G_5 keine G_3 von der Zusammensetzung (74), so ist jede ihrer dreigliedrigen Untergruppen integrabel, steckt also nach S. 681, Satz 8 in mindestens einer viergliedrigen Untergruppe der G_5. Die viergliedrigen Untergruppen der G_5 enthalten natürlich auch keine Untergruppe von der Zusammensetzung (74) und sind daher nach S. 723 auch integrabel. Unter diesen viergliedrigen Untergruppen der G_5 darf aber keine in der G_5 invariant sein, weil sonst die G_5 selbst integrabel wäre, demnach ergiebt sich aus Theor. 58, S. 688, dass die G_5 folgende Zusammensetzung hat:

$$(75)\quad \begin{cases} (X_1 X_2) = X_1 f + \alpha_1 X_4 f + \alpha_2 X_5 f \\ (X_1 X_3) = 2 X_2 f + \beta_1 X_4 f + \beta_2 X_5 f \\ (X_2 X_3) = X_3 f + \gamma_1 X_4 f + \gamma_2 X_5 f \\ (X_i X_{3+\mu}) = \varrho_{i\mu} X_4 f + \sigma_{i\mu} X_5 f \\ (X_4 X_5) = a X_4 f + b X_5 f \end{cases}$$
$$(i = 1, 2, 3;\ \mu = 1, 2).$$

Sind a und b nicht beide null, so können wir annehmen, dass $(X_4 X_5) = X_4 f$ ist; dann ist $X_4 f$ als die erste Derivirte der invarianten Untergruppe: $X_4 f$, $X_5 f$ unsrer G_5 selbst in der G_5 invariant, die Ausdrücke $(X_i X_4)$ hängen also nur von $X_4 f$ ab. Setzen wir $X_4 f = 0$, so erhalten wir aus (75) die Zusammensetzung einer mit der G_5 isomor-

phen G_4. Diese G_4 enthält nach S. 722 sicher eine G_3 von der Zusammensetzung (74), also können wir schliessen, dass es möglich ist in den Relationen (75) solche Ausdrücke: $X_i f + \lambda_i X_5 f$ einzuführen, dass $\alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2 = 0$ wird, während die Ausdrücke: $(X_i X_4)$ auch nachher nur von $X_4 f$ abhängen. Ist das geschehen, so erzeugen augenscheinlich: $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$, $X_4 f$ eine viergliedrige Gruppe, die nach S. 722 eine G_3 von der Zusammensetzung (74) enthält, also enthält auch unsre G_5 eine solche G_3, wir kommen somit auf einen Widerspruch.

Sind a und b beide null, so wird die invariante zweigliedrige Untergruppe: $X_4 f$, $X_5 f$ in dem R_4 der ∞^4 infinitesimalen Transformationen unsrer G_5 durch eine Gerade abgebildet, die bei der Adjungirten: $E_1 f \ldots E_5 f$ der G_5 invariant bleibt. Da aber $E_4 f$ und $E_5 f$ offenbar alle Punkte dieser Geraden in Ruhe lassen, so ist klar, dass die ∞^1 Punkte der Geraden von der Adjungirten der G_5 durch eine projective Gruppe γ transformirt werden, die mit der G_3 von der Zusammensetzung (74) isomorph ist. Wegen der Einfachheit dieser G_3 kann daher γ, wenn es nicht die allgemeine projective Gruppe der Geraden ist, nur nullgliedrig sein.

Ist γ nullgliedrig, so ist jede der ∞^1 eingliedrigen Gruppen: $\lambda X_4 f + \mu X_5 f$ in der G_5 invariant, es ergiebt sich daher genau in derselben Weise wie vorhin, als $(X_4 X_5) = X_4 f$ war, dass die G_5 eine dreigliedrige Gruppe von der Zusammensetzung (74) enthält. Da das nicht angeht, so kommt dieser Fall gar nicht in Betracht.

Ist nun andrerseits γ die allgemeine projective Gruppe der Geraden, so müssen $E_1 f$, $E_2 f$, $E_3 f$ die Punkte der Geraden: $e_1 = e_2 = e_3 = 0$ durch eine dreigliedrige projective Gruppe von der Zusammensetzung (74) transformiren. Demnach müssen die verkürzten infinitesimalen Transformationen: $\overline{E}_1 f$, $\overline{E}_2 f$, $\overline{E}_3 f$, die angeben, wie $E_1 f$, $E_2 f$, $E_3 f$ die Punkte $e_4 : e_5$ dieser Geraden transformiren, eine dreigliedrige lineare homogene Gruppe in den Veränderlichen e_4, e_5 erzeugen, die die Zusammensetzung (74) besitzt. Wir können uns daher $X_4 f$ und $X_5 f$ so gewählt denken, dass:

$$\overline{E}_1 f = e_5 \frac{\partial f}{\partial e_4}, \quad \overline{E}_2 f = \frac{1}{2}\left(e_4 \frac{\partial f}{\partial e_4} - e_5 \frac{\partial f}{\partial e_5}\right), \quad \overline{E}_3 f = -e_4 \frac{\partial f}{\partial e_5}$$

wird. Nun aber sind $\overline{E}_1 f$, $\overline{E}_2 f$, $\overline{E}_3 f$ augenscheinlich durch die Coefficienten $\varrho_{i\mu}$, $\sigma_{i\mu}$ in den Gleichungen (75) vollkommen bestimmt und diese Coefficienten umgekehrt durch $\overline{E}_1 f$, $\overline{E}_2 f$, $\overline{E}_3 f$, demnach ergiebt sich, dass die vorletzte Reihe der Gleichungen (75) nunmehr die Form hat:

$$(X_1 X_4) = 0, \quad (X_2 X_4) = -\tfrac{1}{2} X_4 f, \quad (X_3 X_4) = X_5 f,$$
$$(X_1 X_5) = -X_4 f, \quad (X_2 X_5) = \tfrac{1}{2} X_5 f, \quad (X_3 X_5) = 0,$$

während natürlich $(X_4 X_5) = 0$ ist.

Setzen wir jetzt:

$$\overline{X}_1 f = X_1 f + \lambda_1 X_4 f + \lambda_2 X_5 f$$
$$\overline{X}_3 f = X_3 f + \mu_1 X_4 f + \mu_2 X_5 f,$$

so ergiebt sich aus (75):

$$(\overline{X}_1 X_2) = \overline{X}_1 f + (\alpha_1 - \tfrac{1}{2}\lambda_1) X_4 f + (\alpha_2 - \tfrac{3}{2}\lambda_2) X_5 f$$
$$(X_2 X_3) = \overline{X}_3 f + (\beta_1 - \tfrac{3}{2}\mu_1) X_4 f + (\beta_2 - \tfrac{1}{2}\mu_2) X_5 f,$$

wir können also die λ und μ so wählen, dass:

$$(\overline{X}_1 X_2) = \overline{X}_1 f, \quad (X_2 \overline{X}_3) = \overline{X}_3 f$$

wird. Die Identität zwischen $\overline{X}_1 f$, $X_2 f$, $\overline{X}_3 f$ liefert endlich:

$$((X_1 X_3) X_2) = 0,$$

was offenbar nur möglich ist, wenn $(\overline{X}_1 \overline{X}_3) = 2 X_2 f$ ist. Demnach enthält unsre G_5 auch in dem gegenwärtigen Falle eine G_3 von der Zusammensetzung (74).

Damit ist bewiesen, dass es fünfgliedrige nicht integrable Gruppen von der hier angenommenen Beschaffenheit gar nicht giebt. Es gilt also das

Theorem 66. *Jede nicht integrable fünfgliedrige Gruppe G_5 enthält eine einfache dreigliedrige Untergruppe G_3. Steckt diese G_3 in keiner grösseren Untergruppe der G_5, so ist die G_5 gleichzusammengesetzt mit der speciellen linearen Gruppe:*

(76) $$\boxed{p,\ q,\ xq,\ xp - yq,\ yp}$$

einer Ebene. Im entgegengesetzten Falle ist die einfache G_3 in der G_5 invariant und die G_5 ist gleichzusammengesetzt entweder mit der Gruppe:

(77) $$\boxed{p,\ xp,\ x^2 p,\ q,\ yq}$$

der Ebene x, y, oder mit der Gruppe:

(78) $$\boxed{p,\ xp,\ x^2 p,\ q,\ r}$$

des Raumes x, y, z.

Ist eine G_5 integrabel, so ist ihre erste Derivirte höchstens viergliedrig und natürlich auch integrabel. Um alle Zusammensetzungen der

integrabeln fünfgliedrigen Gruppen zu finden, müsste man daher die integrabeln Gruppen mit höchstens vier Parametern einzeln durchgehen und zusehen, von welchen fünfgliedrigen Gruppen sie die ersten Derivirten sein können. Die Ausführung dieses Gedankens würde aber ziemliche Umstände machen, wir unterlassen sie daher, zumal da wir im nächsten Kapitel einen Satz kennen lernen werden, der von vornherein zu beurtheilen erlaubt, ob eine vorgelegte integrable Gruppe die erste Derivirte einer andern integrabeln Gruppe sein kann, und der infolgedessen die Zahl der zu berücksichtigenden Fälle sehr herabdrückt. Wir wenden uns vielmehr jetzt zur Bestimmung aller Zusammensetzungen, die eine sechsgliedrige nicht integrable Gruppe haben kann.

Enthält eine *sechsgliedrige* Gruppe G_6 eine dreigliedrige einfache Gruppe G_3, so ist sie sicher nicht integrabel. Wir wollen daher zunächst die Zusammensetzungen aller G_6 bestimmen, die eine solche einfache G_3 enthalten.

Die in der G_6 enthaltene einfache G_3, die selbstverständlich die Zusammensetzung:

$$(74) \qquad (X_1 X_2) = X_1 f, \quad (X_1 X_3) = 2 X_2 f, \quad (X_2 X_3) = X_3 f$$

besitzt, ist entweder invariant in der G_6 oder sie ist nicht invariant.

Im ersten Falle erzeugen $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ zusammen mit jeder der drei infinitesimalen Transformationen: $X_4 f$, $X_5 f$, $X_6 f$ eine viergliedrige Gruppe, die natürlich die Zusammensetzung (58) auf S. 723 hat. Wir können uns daher $X_4 f$, $X_5 f$, $X_6 f$ so gewählt denken, dass sie alle drei bei der Combination mit $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ Null ergeben. Durch Bildung der Identitäten zwischen je einer der Transformationen: $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ und je zwei der Transformationen: $X_4 f$, $X_5 f$, $X_6 f$ erkennen wir ferner, dass die Klammerausdrücke: $(X_4 X_5)$, $(X_4 X_6)$, $(X_5 X_6)$ alle von $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ frei sind, dass also $X_4 f$, $X_5 f$, $X_6 f$ eine dreigliedrige Gruppe erzeugen. Da wir alle Zusammensetzungen von dreigliedrigen Gruppen kennen, ist es nunmehr sehr leicht, anzugeben, welche Zusammensetzungen die G_6 in unserm Falle haben kann.

Ist zweitens die G_3 nicht in der G_6 invariant, so sind drei Fälle zu unterscheiden, entweder nämlich steckt die G_3 in keiner grösseren Untergruppe der G_6, oder sie steckt in einer G_4, die in keiner G_5 steckt, oder sie steckt in einer G_5.

I) *Die nicht invariante einfache G_3 steckt in keiner grösseren Untergruppe der G_6.* In diesem Falle ist die G_6 nothwendig gleichzusammengesetzt mit einer sechsgliedrigen primitiven Gruppe des dreifach

ausgedehnten Raumes (s. Abschn. I, Theor. 81, S. 446 und Theor. 91, S. 521), also entweder mit der projectiven Gruppe einer nicht ausgearteten Fläche zweiten Grades oder mit der Gruppe der Euklidischen Bewegungen dieses Raumes (s. S. 139, Theor. 9). Im ersten Falle ist die G_6 natürlich auch gleichzusammengesetzt mit der Gruppe: p, xp, x^2p, q, yq, y^2q der Ebene (s. S. 199), sie enthält also zwei invariante einfache G_3, die betreffende Zusammensetzung muss demnach schon unter den vorhin besprochenen enthalten sein. Im zweiten Falle enthält die G_6 sicher keine invariante einfache G_3, sie ist übrigens auch da mit einer gewissen Gruppe der Ebene gleichzusammengesetzt, nämlich mit der Gruppe:

$$q,\ xq,\ x^2q,\ p,\ xp + yq,\ x^2p + 2xyq.$$

II) *Die nicht invariante einfache G_3 steckt in einer G_4, die ihrerseits in keiner G_5 enthalten ist.* Die betreffende G_4 hat dann nothwendig die Zusammensetzung:

$$(79)\qquad \begin{cases} (X_1X_2) = X_1f, & (X_1X_3) = 2X_2f, & (X_2X_3) = X_3f \\ (X_1X_4) = 0, & (X_2X_4) = 0, & (X_3X_4) = 0. \end{cases}$$

Da die G_3 die erste Derivirte dieser G_4 ist, so kann die G_4 nicht in der G_6 invariant sein. Da andrerseits die G_4 nur zwei invariante Untergruppen enthält, nämlich die G_3, die nicht in der G_6 invariant sein soll und die eingliedrige invariante Untergruppe: X_4f, so sind nur zwei Fälle möglich: entweder enthält die G_4 gar keine Untergruppe, die in der G_6 invariant ist, oder die eingliedrige Untergruppe: X_4f ist in der G_6 invariant. Im ersten Falle ist die G_6 gleichzusammengesetzt mit einer sechsgliedrigen primitiven Gruppe der Ebene, also mit der allgemeinen linearen Gruppe:

$$p,\ q,\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq.$$

Im zweiten Falle liefert die eingliedrige invariante Untergruppe: X_4f die Zusammensetzung einer nicht integrabeln mit G_6 isomorphen Gruppe Γ_5. Diese Γ_5 enthält eine einfache Γ_3 von der Zusammensetzung (74), die in keiner viergliedrigen Untergruppe der Γ_5 steckt, weil sonst die G_4: X_1f, X_2f, X_3f, X_4f in einer fünfgliedrigen Untergruppe der G_6 stecken würde. Demnach (s. Theor. 66, S. 736) hat die Γ_5 nothwendig dieselbe Zusammensetzung wie die Gruppe:

$$xq,\ \tfrac{1}{2}(yq - xp),\ -yp,\ p,\ q$$

und die Zusammensetzung unsrer G_6 wird infolgedessen ausser den Gleichungen (79) noch durch gewisse von der Form:

$$\begin{aligned}
(X_1 X_5) &= -X_6 f + \alpha_1 X_4 f, & (X_1 X_6) &= \beta_1 X_4 f \\
(X_2 X_5) &= \tfrac{1}{2} X_5 f + \alpha_2 X_4 f, & (X_2 X_6) &= -\tfrac{1}{2} X_6 f + \beta_2 X_4 f \\
(X_3 X_5) &= \alpha_3 X_4 f, & (X_3 X_6) &= X_5 f + \beta_3 X_4 f \\
(X_4 X_5) &= \lambda X_4 f, & (X_4 X_6) &= \mu X_4 f \\
& & (X_5 X_6) &= \nu X_4 f
\end{aligned}$$

bestimmt. Nun liefern die Identitäten zwischen $X_1 f$, $X_4 f$, $X_5 f$ und zwischen $X_3 f$, $X_4 f$, $X_6 f$ sofort: $\mu = \lambda = 0$. Führen wir ferner: $X_5 f + 2\alpha_2 X_4 f$ als neues $X_5 f$ und $X_6 f - 2\beta_2 X_4 f$ als neues $X_6 f$ ein, so werden α_2 und $\beta_2 = 0$. Endlich ergeben noch die Identitäten zwischen je zwei der Transformationen: $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ und je einer der Transformationen: $X_5 f$, $X_6 f$, dass $\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_3 = \beta_3 = 0$ ist. Nunmehr sind alle Identitäten von selbst erfüllt, ist daher $\nu \neq 0$, so können wir es gleich 2 machen. Die beiden Zusammensetzungen, die wir auf diese Weise erhalten, werden durch die beiden sechsgliedrigen Gruppen:

$$p,\ q,\ r,\ xq,\ xp - yq,\ yp$$

und:

$$p - yr,\ q + xr,\ r,\ xq,\ xp - yq,\ yp$$

des gewöhnlichen Raumes repräsentirt. Unter diesen ist die zweite eine Untergruppe der projectiven Gruppe des linearen Complexes: $dz + x\,dy - y\,dx = 0$, sie lässt sich überdies auf eine solche Form bringen, dass sie als eine irreducible Berührungstransformationsgruppe der Ebene aufgefasst werden kann (s. Abschn. II, S. 445 f.).

III) *Die nicht invariante einfache G_3 steckt in einer G_5.* Wäre diese G_5 nicht in der G_6 invariant, so enthielte sie nach Theor. 58, S. 688 eine invariante dreigliedrige oder viergliedrige Untergruppe, die zugleich in der G_6 invariant wäre. Aus Theor. 66, S. 736 ergäbe sich daher, dass die G_5 entweder die Zusammensetzung (77) oder die Zusammensetzung (78) haben müsste. In beiden Fällen wäre aber augenscheinlich die einfache G_3 in der G_6 invariant, was nicht sein darf. Demnach muss die G_5 in der G_6 invariant sein.

Da die G_5 in der G_6 invariant sein soll, während die in ihr enthaltene einfache G_3 das nicht sein darf, so muss die G_5 mit der Gruppe (76) auf S. 736 gleichzusammengesetzt sein. Demnach können wir annehmen, dass $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ die einfache G_3 ist, dass $X_1 f \ldots X_5 f$ in denselben Beziehungen stehen, wie die fünf infinitesimalen Transformationen:

$$xq,\ \tfrac{1}{2}(yq - xp),\ -yp,\ p,\ q,$$

und dass $(X_1 X_6) \ldots (X_5 X_6)$ von $X_6 f$ frei sind. Da übrigens die einzige invariante Untergruppe der G_5, nämlich die Gruppe: $X_4 f$, $X_5 f$

natürlich auch in der G_6 invariant ist, können wir hinzufügen, dass $(X_4 X_6)$ und $(X_5 X_6)$ auch von $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ und von $X_6 f$ frei sind.

Die zweigliedrige invariante Untergruppe: $X_4 f$, $X_5 f$ liefert die Zusammensetzung einer Γ_4, die mit der G_6 meroedrisch isomorph ist und die eine einfache Γ_3 enthält. Diese Γ_4 hat nothwendig die Zusammensetzung (58) auf S. 723, demnach können wir $X_6 f$ immer so wählen, dass auch: $(X_1 X_6)$, $(X_2 X_6)$, $(X_3 X_6)$ nur von $X_4 f$ und $X_5 f$ abhängen.

Jetzt erzeugen $X_4 f$, $X_5 f$, $X_6 f$ eine dreigliedrige invariante Untergruppe unsrer G_6. Diese Untergruppe wird in dem ebenen R_5 der ∞^5 infinitesimalen Transformationen $\Sigma e_k X_k f$ durch eine zweifach ausgedehnte ebene Mannigfaltigkeit E_2 dargestellt, die natürlich bei der dreigliedrigen Untergruppe: $E_1 f$, $E_2 f$, $E_3 f$ der Adjungirten der G_6 invariant bleibt. Da nun die Gruppe: $E_1 f$, $E_2 f$, $E_3 f$ in der Ebene E_2 die Gerade invariant lässt, die der invarianten Untergruppe: $X_4 f$, $X_5 f$ der G_6 entspricht, und da sie die Punkte dieser Geraden durch eine dreigliedrige einfache projective Gruppe transformirt, so muss sie auch die Punkte von E_2 durch eine dreigliedrige einfache projective Gruppe transformiren, sie muss also, wie die Tabelle der dreigliedrigen projectiven Gruppen einer Ebene zeigt (s. S. 106), auf E_2 noch einen Punkt ausserhalb der erwähnten Geraden invariant lassen. Wählen wir $X_6 f$ so, dass es durch diesen invarianten Punkt abgebildet wird, so werden die Ausdrücke: $(X_1 X_6)$, $(X_2 X_6)$, $(X_3 X_6)$, die nach dem Früheren nur von $X_4 f$ und $X_5 f$ abhängen, alle gleich Null, es erzeugen also: $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$, $X_6 f$ eine viergliedrige Untergruppe unsrer G_6. Die Zusammensetzung der fünfgliedrigen Gruppe: $X_1 f \ldots X_5 f$ zeigt schliesslich, dass diese viergliedrige Gruppe in keiner fünfgliedrigen Untergruppe der G_6 steckt, demnach kommen wir auf den Fall II zurück und erhalten hier keine neue Zusammensetzung.

Nachdem wir alle Zusammensetzungen von solchen G_6 bestimmt haben, die eine einfache G_3 enthalten, müssen wir noch die Zusammensetzungen aller nicht integrabeln G_6 aufsuchen, die keine solche G_3 enthalten.

Enthält eine G_6 keine einfache G_3, so sind alle ihre dreigliedrigen Untergruppen, deren sie ja immer welche enthält, integrabel. Hieraus folgt, dass jede dreigliedrige Untergruppe der G_6 in einer viergliedrigen Untergruppe steckt. Eine viergliedrige Untergruppe der G_6 kann natürlich auch keine einfache G_3 enthalten, sie ist daher nach Theor. 65, S. 732 sicher integrabel und steckt infolgedessen in mindestens einer fünfgliedrigen Untergruppe. Nach Theor. 66, S. 736

sind nun auch die fünfgliedrigen Untergruppen der G_6 sämmtlich integrabel. Unsre G_6 enthält somit lauter integrable Untergruppen.

Soll nun die G_6 nicht integrabel sein, so darf es unter ihren fünfgliedrigen Untergruppen keine geben, die in der G_6 invariant ist, wir können daher das Theor. 58 auf S. 688 anwenden und schliessen, dass die Zusammensetzung der G_6 durch Relationen von der Form:

$$(80)\quad \begin{cases} (X_1 X_2) = X_1 f + a_4 X_4 f + a_5 X_5 f + a_6 X_6 f \\ (X_1 X_3) = 2 X_2 f + b_4 X_4 f + b_5 X_5 f + b_6 X_6 f \\ (X_2 X_3) = X_3 f + c_4 X_4 f + c_5 X_5 f + c_6 X_6 f \\ (X_k X_{3+j}) = \sum_1^3 {}^s a_{kjs} X_{3+s} f, \qquad (X_{3+k} X_{3+j}) = \sum_1^3 {}^s b_{kjs} X_{3+s} f \\ \qquad\qquad (k, j = 1, 2, 3) \end{cases}$$

dargestellt wird. Dass unsre G_6, wenn sie diese Zusammensetzung besitzt, nicht integrabel ist, liegt auf der Hand, denn keine ihrer Derivirten besteht blos aus der Identität. Es muss also noch festgestellt werden, ob unsre G_6 diese Zusammensetzung haben kann, ohne eine einfache G_3 zu enthalten.

Die infinitesimalen Transformationen: $X_4 f$, $X_5 f$, $X_6 f$ erzeugen eine dreigliedrige invariante Untergruppe unsrer G_6. Diese Untergruppe wird in dem ebenen R_5 der ∞^5 infinitesimalen Transformationen unsrer G_6 durch eine ebene zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit E_2 dargestellt, die bei der Adjungirten der G_6 invariant bleibt. Da nun die Adjungirte der G_6 höchstens sechsgliedrig ist, so transformirt sie die Punkte von E_2 durch eine projective Gruppe mit höchstens sechs Parametern und lässt infolgedessen (s. S. 94, Theor. 7) auf E_2 entweder einen Punkt oder eine Gerade oder einen nicht ausgearteten Kegelschnitt in Ruhe.

Bleibt ein Punkt von E_2 in Ruhe, so können wir annehmen, dass er das Bild der Transformation $X_6 f$ ist. Dann ist $X_6 f$ eine invariante eingliedrige Untergruppe unsrer G_6 und bestimmt die Zusammensetzung einer fünfgliedrigen mit der G_6 isomorphen Gruppe. Diese fünfgliedrige Gruppe ist augenscheinlich nicht integrabel und enthält daher nach Theor. 66, S. 736 sicher eine einfache G_3, dieser einfachen G_3 entspricht aber eine viergliedrige nicht integrable Untergruppe unsrer G_6, also kommen wir auf einen Widerspruch, denn wir sahen oben, dass alle Untergruppen von G_6 integrabel sein müssen.

Bleibt eine Gerade von E_2 in Ruhe, so stellt die eine zweigliedrige invariante Untergruppe unsrer G_6 dar, und wir können annehmen, dass $X_5 f$, $X_6 f$ diese invariante Untergruppe ist. Die Gruppe

X_5f, X_6f bestimmt dann die Zusammensetzung einer viergliedrigen mit G_6 isomorphen Gruppe, die augenscheinlich nicht integrabel ist und daher nach Theor. 65, S. 732 sicher eine einfache G_3 enthält. Dieser einfachen G_3 entspricht aber in der G_6 eine fünfgliedrige nicht integrable Untergruppe der G_6, also kommen wir abermals auf einen Widerspruch.

Bleibt bei der Adjungirten der G_6 auf E_2 weder ein Punkt noch eine Gerade in Ruhe, so transformirt die Adjungirte der G_6 die Punkte von E_2 durch die dreigliedrige projective Gruppe eines nicht ausgearteten Kegelschnitts, ausserdem sind X_4f, X_5f und X_6f paarweise vertauschbar. Das erste folgt unmittelbar aus dem Theor. 7 auf S. 94. Das zweite hat darin seinen Grund, dass nach S. 679, Satz 3 die erste Derivirte der invarianten Untergruppe: X_4f, X_5f, X_6f der G_6 selbst in der G_6 invariant sein muss. Die Gruppe X_4f, X_5f, X_6f ist nämlich nothwendig integrabel, ihre erste Derivirte also höchstens zweigliedrig; wäre daher diese erste Derivirte nicht nullgliedrig, so liesse die Adjungirte der G_6 auf E_2 entweder eine Gerade oder einen Punkt invariant.

Da X_4f, X_5f, X_6f paarweise vertauschbar sind, so lassen E_4f, E_5f, E_6f alle Punkte von E_2 in Ruhe und nur E_1f, E_2f, E_3f transformiren diese Punkte wirklich. Die verkürzte Gruppe: $\overline{E}_1f$, $\overline{E}_2f$, $\overline{E}_3f$ in den Veränderlichen e_4, e_5, e_6, die angiebt, wie E_1f, E_2f, E_3f die Punkte von E_2 transformiren, kann, wie man sich leicht überzeugt (vgl. S. 13 und die Tabelle auf S. 116 f.), durch eine lineare homogene Transformation der Veränderlichen e_4, e_5, e_6 auf die Form:

$$\overline{E}_1f = -e_5\frac{\partial f}{\partial e_4} - 2e_6\frac{\partial f}{\partial e_5}, \quad \overline{E}_3f = 2e_4\frac{\partial f}{\partial e_5} + e_5\frac{\partial f}{\partial e_6}$$

$$\overline{E}_2f = e_4\frac{\partial f}{\partial e_4} - e_6\frac{\partial f}{\partial e_6}$$

gebracht werden. Demnach lassen sich X_4f, X_5f, X_6f immer so wählen, dass die Ausdrücke (X_kX_{3+j}) $(k,j=1,2,3)$ die folgende Gestalt annehmen:

$$(81)\quad \begin{cases} (X_1X_4)=0, & (X_1X_5)=X_4f, & (X_1X_6)=2X_5f \\ (X_2X_4)=-X_4f, & (X_2X_5)=0, & (X_2X_6)=X_6f \\ (X_3X_4)=-2X_5f, & (X_3X_5)=-X_6f, & (X_3X_6)=0. \end{cases}$$

Führen wir nunmehr drei Ausdrücke von der Form:

$$X_if + \lambda_iX_4f + \mu_iX_5f + \nu_iX_6f \quad (i=1,2,3)$$

als neue X_1f, X_2f, X_3f ein, so können wir durch eine ähnliche Rechnung wie auf S. 736 erreichen, dass:

$$(X_1 X_2) = X_1 f, \quad (X_1 X_3) = 2 X_2 f, \quad (X_2 X_3) = X_3 f$$

wird. Also kommen wir auch hier auf einen Widerspruch, denn unsre G_6 sollte ja keine einfache G_3 enthalten.

Durch das Vorstehende ist bewiesen, dass eine G_6, die nicht integrabel ist, immer eine einfache G_3 enthält. Da wir nun vorhin alle Zusammensetzungen bestimmt haben, die eine G_6 mit einer einfachen G_3 haben kann, so sind uns jetzt überhaupt die Zusammensetzungen aller nicht integrabeln G_6 bekannt, also können wir das Theorem aussprechen:

Theorem 67. *Ist eine sechsgliedrige Gruppe G_6 nicht integrabel, so enthält sie stets eine dreigliedrige einfache Untergruppe G_3, die mit der allgemeinen projectiven Gruppe auf der Geraden gleichzusammengesetzt ist. Ist diese G_3 in der G_6 invariant, so ist die G_6 gleichzusammengesetzt mit einer der folgenden Gruppen:*

[1] $\boxed{p,\ xp,\ x^2p,\ q,\ yq,\ y^2q}$ [2] $\boxed{p,\ xp,\ x^2p,\ q,\ r,\ yq+czr}$

[3] $\boxed{p,\ xp,\ x^2p,\ q,\ r,\ yq+(y+z)r}$ [4] $\boxed{p,\ xp,\ x^2p,\ q,\ r,\ yr}$

[5] $\boxed{p,\ xp,\ x^2p,\ r,\ yr,\ y^2r}$.

Ist die G_3 nicht in der G_6 invariant, so sind zwei Fälle zu unterscheiden, entweder nämlich ist die G_3 überhaupt in keiner grösseren Untergruppe der G_6 enthalten oder sie steckt in einer viergliedrigen Untergruppe, die ihrerseits in keiner grösseren Untergruppe der G_6 steckt. Im ersten Falle ist die G_6 gleichzusammengesetzt entweder mit der continuirlichen projectiven Gruppe einer nicht ausgearteten Fläche zweiten Grades im gewöhnlichen Raume oder mit der Gruppe der Euklidischen Bewegungen dieses Raumes, das heisst sie ist gleichzusammengesetzt entweder mit der Gruppe [1] *oder mit der Gruppe:*

[6] $\boxed{p,\ xp+yq,\ x^2p+2xyq,\ q,\ xq,\ x^2q}$

der Ebene. Im zweiten Falle ist die G_6 gleichzusammengesetzt entweder mit der allgemeinen linearen Gruppe:

[7] $\boxed{xq,\ xp-yq,\ yp,\ xp+yq,\ p,\ q}$

der Ebene oder mit der sechsgliedrigen Untergruppe:

[8] $$\boxed{xq,\ xp-yq,\ yp,\ p-yr,\ q+xr,\ r}$$

der projectiven Gruppe eines gewissen linearen Complexes im gewöhnlichen Raume oder endlich mit der Gruppe:

[9] $$\boxed{xq,\ xp-yq,\ yp,\ p,\ q,\ r}$$

des gewöhnlichen Raumes).*

Man wird bemerkt haben, dass bei der Bestimmung der Zusammensetzungen aller nicht integrabeln fünf- und sechsgliedrigen Untergruppen gerade der Fall die meiste Mühe macht, der gar nicht eintreten kann, der Fall nämlich, dass die gesuchten nicht integrabeln Gruppen keine dreigliedrigen einfachen Untergruppen enthalten. Wir werden im nächsten Kapitel einen Satz kennen lernen, der von vornherein darüber Aufschluss giebt, dass dieser Fall nicht eintreten kann, und der infolgedessen diese ganze Untersuchung vereinfacht.

§ 139.

Wir wollen hier noch ein paar Bemerkungen einschalten, die zu wenig ausgeführt sind, um in einem der früheren Paragraphen untergebracht zu werden.

Zunächst wieder einiges, was sich auf die adjungirte Gruppe bezieht.

Es ist leicht einzusehen, dass die Adjungirte: $E_1 f \ldots E_r f$ einer r-gliedrigen Gruppe von der Zusammensetzung c_{iks} niemals die infinitesimale Transformation:

$$Ef = \sum_1^r{}_k e_k \frac{\partial f}{\partial e_k}$$

enthält, dass also niemals eine Identität von der Form:

(82) $$Ef \equiv \sum_1^r{}_j c_j E_j f$$

besteht, in der die c_j Constanten bezeichnen. In der That, die Identität (82) müsste auch für $e_k = c_k$ bestehen, da aber $\Sigma e_j E_j f \equiv 0$ ist (s. S. 673), so würde sich ergeben: $Ef \equiv 0$, was sinnlos ist.

Man kann aber auch zeigen, dass eine Identität von der Form (82) nicht einmal dann bestehen kann, wenn die c_j Functionen von $e_1 \ldots e_r$ sind. Da nun nach S. 673 die Adjungirte: $E_1 f \ldots E_r f$ mindestens eine Invariante

*) Die Bestimmung *aller* Zusammensetzungen von Gruppen mit weniger als sieben Parametern führte Lie schon im Jahre 1874 vollständig durch. Die hierbei benutzten, theilweise schwerfälligen Methoden vereinfachte er in den Jahren 1883 und 84. Man vergleiche hierüber Math. Ann. Bd. XI, S. 518 f.; Ges. d. Wiss. zu Kristiania 1882—84; Archiv for Math. 1883—84.

besitzt, und da andrerseits die infinitesimalen Transformationen: $E_1 f \ldots E_r f$ sämmtlich mit Ef vertauschbar sind, so ergiebt sich sofort der

Satz 21. *Die Invarianten der adjungirten Gruppe: $E_1 f \ldots E_r f$ einer r-gliedrigen Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ sind nicht alle homogen von nullter Ordnung in den e, insbesondere besitzt die adjungirte Gruppe stets mindestens eine Invariante, die homogen von erster Ordnung in den e ist.*

Der Beweis für die Unmöglichkeit des Bestehens einer Identität (82), in der die c_j Functionen von $e_1 \ldots e_r$ sind, bietet zwar keine besondern Schwierigkeiten, er ist aber bei alleiniger Benutzung der hier entwickelten Hülfsmittel ziemlich lang, wir unterdrücken ihn deshalb, zumal da wir im nächsten Kapitel Hülfsmittel kennen lernen werden, die den Beweis abkürzen. Wir begnügen uns deshalb mit der Mittheilung einiger Folgerungen, die sich aus dem Satze 21 ziehen lassen.

Die adjungirte Gruppe: $E_1 f \ldots E_r f$ transformirt den R_r der ∞^r endlichen Transformationen: $\Sigma e_k X_k f$ der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ derart, dass der Coordinatenanfang: $e_1 = \cdots = e_r = 0$, das heisst die identische Transformation in Ruhe bleibt (s. Abschn. I, S. 278 ff.). Da nun die adjungirte Gruppe nach Satz 21 mindestens eine Invariante besitzt, die homogen vom ersten Grade ist, so ist klar, dass bei jeder infinitesimalen Transformation der Adjungirten, die eine beliebig gewählte Gerade von allgemeiner Lage durch den Coordinatenanfang in Ruhe lässt, überhaupt alle Punkte der betreffenden Geraden in Ruhe bleiben. Eine Gerade durch den Coordinatenanfang stellt aber eine eingliedrige Untergruppe der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ dar, folglich kann dieses Ergebniss auch so ausgesprochen werden (vgl. Abschn. I, S. 259):

Satz 22. *Ist Yf eine infinitesimale Transformation von allgemeiner Lage in einer r-gliedrigen Gruppe und ist Yf in einer zweigliedrigen Untergruppe der r-gliedrigen invariant, so besteht diese zweigliedrige Untergruppe aus paarweise vertauschbaren Transformationen.*

Aus diesem Satze ergiebt sich sofort noch der nachstehende:

Satz 23. *Ist Yf eine infinitesimale Transformation von allgemeiner Lage in einer r-gliedrigen Gruppe, so sind die endlichen Transformationen der von Yf erzeugten eingliedrigen Gruppe innerhalb der r-gliedrigen Gruppe nicht mit einander gleichberechtigt.*

Gerade so wie wir von einer ersten, zweiten, ... Derivirten einer r-gliedrigen Gruppe G_r sprechen, können wir auch von einer ersten, zweiten, ... adjungirten Gruppe der G_r sprechen; unter der ersten Adjungirten ist da natürlich die Adjungirte der G_r zu verstehen, unter der zweiten Adjungirten die Adjungirte der ersten, und so weiter.

Die verschiedenen Adjungirten der G_r bilden eine Reihe von Gruppen, die für die Zusammensetzung der G_r eine ähnliche Bedeutung hat, wie die verschiedenen derivirten Gruppen der G_r. Ist die erste Adjungirte der G_r r-gliedrig, ist sie also ihre eigne erste Adjungirte, so sind auch alle folgenden Adjungirten der G_r r-gliedrig und fallen mit der ersten Adjungirten zusammen. Ist dagegen die erste Adjungirte der G_r nicht r-gliedrig, so muss jedenfalls eine der folgenden Adjungirten der G_r, etwa die

q-te, ihre eigne Adjungirte sein und mit den nach ihr folgenden Adjungirten zusammenfallen. Beachtenswerth ist namentlich der Fall, dass die soundsovielte Adjungirte der G_r blos aus der identischen Transformation besteht; die r-gliedrigen Gruppen, bei denen dieser Fall eintritt, bilden offenbar ein Seitenstück zu den integrabeln Gruppen.

Durch Bildung von adjungirten und derivirten Gruppen erhält man noch eine ganze Reihe von andern Zahlen, die alle für die Zusammensetzung der G_r charakteristisch sind und zur Classification der verschiedenen Zusammensetzungen dienen können. Als solche Zahlen nennen wir: die Zahlen der von einander unabhängigen Invarianten der verschiedenen adjungirten Gruppen, die Zahl der Invarianten der m-ten Adjungirten, die zu der q-ten Derivirten gehört, die Gliederzahl der m-ten Adjungirten der q-ten Derivirten und so weiter.

Auf S. 296 erwähnten wir, dass die Bezeichnung m-fach transitiv etwas missliches hat. Das missliche bestand darin, dass die Bezeichnung auf gewisse Gruppen nicht anwendbar war. Man kann diesen Uebelstand vermeiden, wenn man zur Charakterisirung der Transitivität einer r-gliedrigen Gruppe des R_n nicht blos ganze, sondern auch gebrochene Zahlen anwendet. Wir wollen kurz andeuten, wie das auszuführen ist.

Hat man eine r-gliedrige Gruppe G_r des R_n, so gilt jedenfalls Folgendes: Der R_n wird erst dann intransitiv transformirt, wenn man gerade $m > 0$ Punkte von allgemeiner gegenseitiger Lage festhält, und nach Festhaltung von m solchen Punkten: $P_1 \ldots P_m$ zerfällt der R_n in ∞^{n-n_1} n_1-fach ausgedehnte invariante Mannigfaltigkeiten, auf deren jeder die Punkte transitiv transformirt werden. Als erstes Mass für die Transitivität von G_r würde dann die Zahl:

$$m + \frac{n_1}{n}$$

dienen können. Hat man $P_1 \ldots P_m$ festgehalten, so wird man noch gerade m_1 Punkte: $Q_1 \ldots Q_{m_1}$ von allgemeiner und allgemeiner gegenseitiger Lage festhalten müssen, damit der R_n nicht blos in invariante Mannigfaltigkeiten von n_1 Dimensionen, sondern in invariante Mannigfaltigkeiten von n_2 Dimensionen zerfällt, wo n_2 möglichst gross aber kleiner als n_1 ist. In ähnlicher Weise wird man die Zahlen m_2 und n_3, m_3 und n_4, ... definiren und wird als Mass für die Transitivität von G_r die Zahlenreihe:

$$m + \frac{n_1}{n}, \quad m_1 + \frac{n_2}{n}, \quad m_2 + \frac{n_3}{n}, \cdots$$

erhalten, die natürlich, da r endlich ist, schliesslich einmal abbricht. Zum Beispiel besteht diese Reihe für die allgemeine projective Gruppe des R_n blos aus einer Zahl, denn $n_1, m_1, n_2 \ldots$ werden alle gleich Null und $m = n + 2$. Für die conforme Gruppe des R_3 erhält man die Zahlen:

$$3 + \frac{1}{3}, \; 1,$$

während die Zahlenreihe:

$$1 + \frac{2}{3}, \; 1 + \frac{1}{3}, \; 1$$

das Mass für die Transitivität der Gruppe der Euklidischen Bewegungen im R_3 darstellt.

Die eben definirten ganzen Zahlen m, n_1, m_1, n_2 ... stehen in einem einfachen Zusammenhange mit gewissen Zahlen, die wir schon auf S. 218 ff. von Abschn. I kennen gelernt haben. Wir begnügen uns jedoch mit einem Hinweise darauf.

§ 140.

Wir wollen hier schliesslich noch kurz auf den Zusammenhang der Theorie der höheren complexen Zahlen mit der Gruppentheorie eingehen.

Unter einer höheren complexen Zahl verstehen wir mit Hamilton (1843), Grassmann (1844) und ihren Nachfolgern einen Ausdruck von der Form:

$$u = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n,$$

wo $x_1 \ldots x_n$ gewöhnliche complexe Zahlen von der Form: $\alpha + \beta i$ bedeuten*), während $e_1 \ldots e_n$ keine derartigen Zahlen, sondern Einheiten sind, deren besondere Eigenschaften durch Uebereinkunft festgesetzt werden müssen.

Wir setzen zunächst fest, dass zwei complexe Zahlen: $u = \Sigma x_\nu e_\nu$ und $v = \Sigma y_\nu e_\nu$ dann und nur dann einander gleich sein sollen, wenn die n Gleichungen: $y_\nu = x_\nu$ erfüllt sind; in diesem Falle sagen wir, dass $e_1 \ldots e_n$ ein irreducibles System von Einheiten bilden. Ferner bestimmen wir, dass die Addition und Subtraction nach den gewöhnlichen Regeln ausgeführt werden soll, also:

$$u \pm v = \sum_1^n{}^\nu x_\nu e_\nu \pm \sum_1^n{}^\nu y_\nu e_\nu = \sum_1^n{}^\nu (x_\nu \pm y_\nu) e_\nu .$$

Was die Multiplication angeht, so definiren wir das Product aus der gewöhnlichen complexen Zahl z und der höheren complexen Zahl u durch die Gleichung:

$$z \,.\, u = \sum_1^n{}^\nu z x_\nu \,.\, e_\nu = u \,.\, z,$$

während wir bei der Bildung des Productes der beiden höheren complexen Zahlen u und v das distributive Gesetz als gültig annehmen, das heisst wir setzen:

$$uv = \sum_{\mu\nu}^{1\ldots n} x_\mu y_\nu \,.\, e_\mu e_\nu , \quad vu = \sum_{\mu\nu}^{1\ldots n} x_\mu y_\nu \,.\, e_\nu e_\mu ,$$

*) Man kann unter $x_1 \ldots x_n$ natürlich auch reelle Zahlen verstehen.

so dass uv und vu im Allgemeinen von einander verschieden sind. In entsprechender Weise definiren wir das Product von drei oder mehr höheren complexen Zahlen.

Der Begriff eines Systems höherer complexer Zahlen, *soweit er hiermit definirt ist*, dürfte in voller Allgemeinheit zuerst von Grassmann (1844) aufgestellt worden sein. Aber die bisherigen Festsetzungen sind noch viel zu allgemein; man muss noch solche Bestimmungen treffen, dass die Mannigfaltigkeit der Zahlen, die aus den Zahlen von der Form $\Sigma x_\nu e_\nu$ durch Multiplication ableitbar sind, irgendwie begränzt wird.

Grassmann selbst hat einen Weg hierzu angegeben, doch führt dieser Weg nur zu gewissen allerdings sehr interessanten Systemen complexer Zahlen, die sehr schöne Anwendungen auf die projective und die metrische Geometrie zulassen. Dagegen hat Grassmann merkwürdigerweise einen andern Weg übersehen, der zu mindestens ebenso interessanten und überdies viel mannigfaltigeren Systemen von complexen Zahlen führt. Wenn Grassmann behauptet, dass er alle Arten von Multiplicationen oder wenigstens alle interessanten Arten erschöpft habe, so beruht das auf einer freilich verzeihlichen Selbsttäuschung.

Der zweite Weg besteht in der Einführung des Begriffs eines geschlossenen Zahlensystems, eines Systems, dessen Zahlen mit einander multiplicirt stets wieder Zahlen des Systems ergeben. Wir können da offenbar, ohne die Allgemeinheit der Untersuchung einzuschränken, annehmen, dass schon das System der Zahlen $\Sigma x_\nu e_\nu$ selbst geschlossen ist, was wiederum augenscheinlich dann und nur dann eintritt, wenn Relationen von der Form:

$$e_\mu e_\nu = \sum_1^n{}^s \gamma_{\mu\nu s} e_s \qquad (\mu, \nu = 1 \ldots n) \tag{83}$$

bestehen, unter den $\gamma_{\mu\nu s}$ gewöhnliche complexe Zahlen verstanden.

Aber auch der Begriff des geschlossenen Zahlensystems bedarf noch einer Einschränkung, wenn er praktisch anwendbar sein soll. Man kann zum Beispiel verlangen, dass wenigstens im Allgemeinen die Division ausführbar, dass also bei gegebenen u und v sowohl die Gleichung: $wu = v$, als die Gleichung: $uw = v$ im Allgemeinen nach w auflösbar sei. Diese Forderung führt auf die Bedingung, dass keine der beiden Determinanten:

$$\left| \sum_\mu \gamma_{\mu\nu s} x_\mu \right| \qquad \left| \sum_\nu \gamma_{\mu\nu s} x_\nu \right| \tag{84}$$

für alle Werthe von $x_1 \ldots x_n$ identisch verschwinden darf.

Man kann weiter verlangen, dass für die Multiplication das associative Princip gelte, dass also für drei beliebige Zahlen u, v, w stets:

$$(uv)w = u(vw) \tag{85}$$

werde. Die Coefficienten $\gamma_{\mu\nu s}$ müssen dann den Gleichungen:

$$\left\{ \sum_1^n{}^s \gamma_{\mu\nu s}\gamma_{s\pi\tau} = \sum_1^n{}^s \gamma_{\nu\pi s}\gamma_{\mu s\tau} \right. \qquad (\mu, \nu, \pi, \tau = 1 \ldots n) \tag{86}$$

genügen. Dieser Begriff eines höheren Systems von complexen Zahlen findet sich implicite jedenfalls schon bei Hamilton*), der ja auch in den Quaternionen das Zahlensystem aufgestellt hat, das neben den gewöhnlichen complexen Zahlen bei Weitem das schönste ist. Explicite ist der allgemeine Begriff allerdings wohl erst von Cayley und namentlich von Hankel aufgestellt worden.

Endlich kann man nun auch noch das commutative Princip als gültig annehmen, also festsetzen, dass:

$$uv = vu \tag{87}$$

sein soll.

Man kann aber auch auf die Möglichkeit der Division verzichten. Eine äusserst wichtige Gattung von Zahlensystemen erhält man da, wenn man für beliebige Zahlen das Gelten der Gleichungen:

$$uv + vu = 0, \quad (uv)w + (vw)u + (wu)v = 0 \tag{88}$$

verlangt. Die $\gamma_{\mu\nu s}$ bestimmen dann augenscheinlich die Zusammensetzung einer n-gliedrigen Gruppe und die infinitesimalen Transformationen dieser Gruppe erscheinen als die complexen Zahlen des Systems. Demnach kann man die Aufgabe, alle Zusammensetzungen von r-gliedrigen Gruppen zu bestimmen, auch so aussprechen: *es sollen alle geschlossenen Systeme von complexen Zahlen mit r irreducibeln Einheiten bestimmt werden, bei denen für beliebige Zahlen des Systems die Gleichungen* (88) *identisch erfüllt sind.*

Hier haben wir schon einen Zusammenhang zwischen den höheren complexen Zahlen und der Gruppentheorie. Ein Zusammenhang von andrer Art besteht zwischen der Gruppentheorie und den Zahlensystemen, bei denen das associative Princip gilt und ausserdem im Allgemeinen Division möglich ist. Diesen letzteren Zusammenhang hat zuerst Herr Poincaré bemerkt (1884, C. R. Bd. 99, S. 740 ff.), allerdings ohne hervorzuheben, dass er *nur* für Zahlensysteme besteht, die dem associativen Principe gehorchen.

*) Uebrigens hat auch Gauss offenbar schon 1831 den allgemeinen Begriff eines solchen Systems gehabt.

Um diesen Zusammenhang klar zu machen, deuten wir die Coefficienten x_ν einer Zahl von der Form $\Sigma x_\nu e_\nu$ als Punktcoordinaten in einem ebenen R_n, so dass jede complexe Zahl unsers Systems einen Punkt dieses R_n darstellt. Die Gleichung: $u' = uv$ sagt dann aus, dass jedem Punkte u ein bestimmter Punkt u' zugeordnet ist, der von dem Werthe der Zahl v abhängt. Ausführlich geschrieben lautet diese Beziehung zwischen den Punkten u und u' so:

$$x_s' = \sum_1^n{}_\mu \left(\sum_1^n{}_\nu \gamma_{\mu\nu s} y_\nu \right) x_\mu \quad (s = 1 \ldots n). \tag{89}$$

Da nun im Allgemeinen Division möglich sein soll und also die Determinanten (84) beide nicht identisch verschwinden, so sind diese Gleichungen sowohl nach den x als nach den y auflösbar, sie stellen also in den Veränderlichen x eine lineare homogene Transformation dar, die n wesentliche Parameter: $y_1 \ldots y_n$ enthält. Demnach können wir die Productgleichung: $u' = uv$ als den symbolischen Ausdruck einer linearen homogenen Transformation mit n Parametern auffassen, eine Auffassung, die schon seit längerer Zeit von verschiedenen Mathematikern angewendet wird.

Führen wir jetzt zuerst die Transformation: $u' = uv$ und dann die Transformation: $u'' = u'w$ aus, so erhalten wir eine Transformation, die symbolisch durch die Gleichung:

$$u'' = (uv)w$$

dargestellt wird. Da sich nun diese Gleichung wegen der Gültigkeit des associativen Princips in der Form:

$$u'' = u(vw)$$

schreiben lässt und da (vw) eine Zahl unsers Systems ist, so gehört die betreffende Transformation der Schaar (89) an; folglich bildet diese Schaar eine Gruppe.

Die Gruppe (89) ist n-gliedrig und da ihre Gleichungen nach den n Parametern $y_1 \ldots y_n$ auflösbar sind, so ist sie einfach transitiv. Ausserdem kann man genau wie auf S. 20 f. von Abschn. I beweisen, dass sie die identische Transformation enthält und dass alle ihre Transformationen paarweise zn einander invers sind; es ist sogar sicher, dass die Parameter $y_1 \ldots y_n$ für die identische Transformation endliche Werthe besitzen.

Zu unserm Zahlensysteme: $\Sigma x_\nu e_\nu$ gehört also eine einfach transitive lineare homogene Gruppe, in deren endlichen Gleichungen (89) die Parameter nur linear auftreten. Diese Gruppe findet sich schon bei Herrn Poincaré, nur erwähnt Herr Poincaré nicht, dass sie

einfach transitiv ist. Poincaré hat aber ausserdem ohne Beweis die Behauptung aufgestellt, dass umgekehrt zu jeder linearen homogenen Gruppe von der Form (89) ein Zahlensystem mit n Einheiten gehöre. Im nächsten Kapitel werden wir einen Beweis für die Richtigkeit dieser Behauptung kennen lernen, hier begnügen wir uns mit einigen gruppentheoretischen Bemerkungen.

Die lineare homogene Gruppe (89), die zu unserm Zahlensysteme gehört, ist augenscheinlich ihre eigne Parametergruppe. Schreibt man daher die Gleichungen (89) in der Form:

$$y_s' = \sum_1^n \left(\sum_1^n \gamma_{\mu\nu s} x_\mu \right) y_\nu \qquad (s = 1 \ldots n) \tag{90}$$

und fasst man jetzt die x als Parameter auf, so erhält man eine neue einfache transitive lineare homogene Gruppe, nämlich die zur Gruppe (89) reciproke einfach transitive Gruppe (s. Abschn. I, S. 428). Also gehören zu jedem Zahlensysteme mit n irreducibeln Einheiten zwei reciproke einfach transitive lineare homogene Gruppen.

Das eben Gesagte ist eine unmittelbare Folge der Theorie der Parametergruppe. Ein andrer wichtiger Schluss lässt sich aus der besonderen Form der Gruppe (89) ziehen. Sind nämlich $y_1^0 \ldots y_n^0$ die Parameter, die zur identischen Transformation gehören, so erhält man die allgemeine infinitesimale Transformation der Gruppe (89), wenn man y_ν durch $y_\nu^0 + \delta y_\nu$ ersetzt, demnach lauten die Gleichungen dieser allgemeinen infinitesimalen Transformation einfach so:

$$x_s' = x_s + \sum_1^n \left(\sum_1^n \gamma_{\mu\nu s} \delta y_\nu \right) x_\mu \qquad (s = 1 \ldots n). \tag{91}$$

Man sieht hieraus, dass sich die endlichen Gleichungen der Gruppe (89) aus den infinitesimalen Transformationen der Gruppe ablesen lassen.

Schliesslich noch eins. Setzt man:

$$X_\nu f = \sum_{\mu s}^{1 \ldots n} \gamma_{\mu\nu s} x_\mu \frac{\partial f}{\partial x_s} \qquad (\nu = 1 \ldots n),$$

so sind: $X_1 f \ldots X_n f$ n unabhängige infinitesimale Transformationen der n-gliedrigen Gruppe (89), es bestehen daher Relationen von der Form:

$$(X_\mu X_\nu) = \sum_1^n c_{\mu\nu s} X_s f \qquad (\mu, \nu = 1 \ldots n).$$

Hier drücken sich die $c_{\mu\nu s}$ in sehr einfacher Weise durch die $\gamma_{\mu\nu s}$ aus. Berechnet man nämlich die $(X_\mu X_\nu)$ und benutzt man die Relationen

(86), die in Folge des associativen Princips zwischen den $\gamma_{\mu\nu s}$ bestehen, so kommt:

$$c_{\mu\nu s} = \gamma_{\mu\nu s} - \gamma_{\nu\mu s}.$$

Dies möge genügen, kommen wir doch in dem nächsten Kapitel noch einmal auf den Zusammenhang zwischen den hier besprochenen Zahlensystemen und der Gruppentheorie zurück. Jedenfalls geht aber aus dem Gesagten hervor, dass die Theorie der höhern complexen Zahlen durch die Verbindung mit der Gruppentheorie einen ganz neuen Inhalt gewinnt und dass sie zu einer merkwürdigen Klasse von projectiven Gruppen führt.

Auch die Grassmannschen complexen Zahlen stehen zu gewissen Gruppen in sehr enger Beziehung, aber die Beziehung ist von ganz andrer Art. Allerdings lässt sich auch jede Multiplication der Grassmannschen Zahlen mit einer unter ihnen als eine Operation auffassen, die ein gewisses Gebiet transformirt, nämlich das Gebiet, das aus den sämmtlichen ebenen Mannigfaltigkeiten eines bestimmten Raumes besteht, jedoch ist diese Operation keine Transformation im strengen Sinne des Worts.

Zum Schlusse wollen wir einer gewissen Verallgemeinerung gedenken, die man mit dem Begriffe der Systeme von complexen Zahlen vornehmen kann.

Jedes bilineare Symbol (vgl. S. 604 ff.):

$$\sum_{ik}^{1\ldots r} \omega_{ik}(z_1 \ldots z_r) \frac{\partial U}{\partial z_i} \frac{\partial V}{\partial z_k} = |UV|,$$

für das die Identitäten:

$$|UV| + |VU| \equiv 0, \quad ||UV|W| + ||VW|U| + ||WU|V| \equiv 0$$

gelten, kann als eine Multiplicationsoperation aufgefasst werden, wenn man nämlich die Functionen der Veränderlichen $z_1 \ldots z_r$ als die Grössen betrachtet, die mit einander multiplicirt werden. Die Bestimmung aller derartigen Multiplicationen wird durch die Theorie der Functionengruppen geleistet (s. a. a. O.). Freilich gehört zu einer solchen Multiplication keine Addition.

Ist insbesondere:

$$\omega_{ik}(z_1 \ldots z_r) = \sum_1^r{}^s c_{iks} z_s$$

und beschränkt man sich auf die Multiplication linearer homogener Functionen der Veränderlichen, so kommt man wieder auf geschlossene Systeme complexer Zahlen; es sind das die auf S. 749 besprochenen, deren Theorie mit der Bestimmung aller möglichen Zusammensetzungen von r-gliedrigen Gruppen gleichbedeutend ist.

Kapitel 29.

Die gruppentheoretischen Arbeiten Andrer.

Die gruppentheoretischen Untersuchungen Lies, so wie sie in diesem Werke dargestellt sind, waren in allen wesentlichen Punkten schon 1884 zum Abschluss gebracht, also bevor von andrer Seite Beiträge zu der Theorie geliefert wurden*). Da nun diese Untersuchungen ganz auf eignen Füssen stehen und an und für sich ein abgeschlossenes Ganzes bilden, so hatten wir bisher keine Veranlassung auf die gruppentheoretischen Arbeiten Andrer Rücksicht zu nehmen. Da aber die Zahl dieser Arbeiten schon ganz beträchtlich ist und da in ihnen der Ausbau der Theorie nach verschiedenen Seiten hin gefördert worden ist, so wollen wir jetzt einen kurzen Bericht über diese Arbeiten geben. Der Leser wird dadurch wenigstens einen Ueberblick über alles das gewinnen, was ausser den Lieschen Untersuchungen für die Gruppentheorie geleistet worden ist.

Wir müssen uns aber dabei einige Beschränkungen auferlegen. Da wir nämlich in den vorliegenden drei Abschnitten nur die Theorie der *endlichen* continuirlichen Gruppen behandelt haben, während wir die Theorie der unendlichen Gruppen, die allgemeine Theorie der Differentialinvarianten und die Integrationstheorie nur gelegentlich streiften, so werden wir auch hier nur solche Arbeiten berücksichtigen, die sich auf die Theorie der endlichen continuirlichen Gruppen beziehen; dagegen werden wir Arbeiten über unendliche continuirliche Gruppen, über Differentialinvarianten und Integrationstheorie höchstens erwähnen, aber nicht auf ihren Inhalt eingehen.

---

*) Allerdings hat Picard schon 1883 in den Comptes Rendus (Bd. 96, S. 1131) eine äusserst wichtige Arbeit veröffentlicht, in der er Lies Theorien verwerthete, diese Arbeit kann aber hier nicht mit berücksichtigt werden, weil sie sich nicht mit der Gruppentheorie an sich, sondern mit der Integrationstheorie beschäftigt. In dem Werke über Integrationstheorie gedenken wir näher auf sie einzugehen.

Wir besprechen der Reihe nach die Untersuchungen von Engel, von Killing, von Study, Schur und Maurer, bei denen Studys, soweit sie sich auf die höheren complexen Zahlen beziehen, werden wir auch die von Scheffers berücksichtigen. Alsdann besprechen wir eine Anzahl Arbeiten, die von verschiedenen herrühren und die meistens als Leipziger Dissertationen erschienen sind. Endlich erwähnen wir noch die wichtigsten übrigen Arbeiten, die mit der Theorie der continuirlichen Gruppen in Zusammenhang stehen, die wir aber hier nicht besprechen können, weil ihr Inhalt aus dem Rahmen dieses Werkes heraustritt.

§ 141.

Engel.

Die erste gruppentheoretische Arbeit Engels ist seine Habilitationsschrift von 1885*). Engel entwickelt darin eine allgemeine Methode, um die Definitionsgleichungen (s. Abschn. I, Kapitel 11) von beliebig vielen continuirlichen Gruppen aufzustellen. Diese Methode beruht aber auf der Betrachtung gewisser unendlicher continuirlicher Gruppen, sie kann also hier nicht besprochen werden. Nur zweierlei sei bemerkt. Erstens führt Engel die Aufstellung der Definitionsgleichungen gewisser unendlicher continuirlicher Gruppen auf die Bestimmung der infinitesimalen Transformationen gewisser endlicher continuirlicher Gruppen zurück und stellt auf diese Weise einen merkwürdigen Zusammenhang zwischen den unendlichen und den endlichen continuirlichen Gruppen her. Zweitens hat Lie erkannt, dass die Engelsche Methode zu den Definitionsgleichungen aller endlichen und unendlichen continuirlichen Gruppen führt und dass sie aus der allgemeinen Theorie der Differentialvarianten in sehr einfacher Weise abgeleitet werden kann. In dem auf S. 712 angekündigten Werke, das ausser den Differentialinvarianten und der Integrationstheorie auch noch die Theorie der unendlichen Gruppen behandeln soll, wird sich Gelegenheit finden darauf zurückzukommen.

In einer Arbeit aus dem Jahre 1886 (Leipz. Ber. 1886, S. 83—94) beschäftigt sich Engel mit der Zusammensetzung der Gruppen. Auf Grund der von Lie entwickelten Vorstellungen: Abbildung der infinitesimalen Transformationen einer Gruppe auf die Punkte eines Raumes, Auffassung der Klammeroperation als einer Multiplication von zwei infinitesimalen

*) Ueber die Definitionsgleichungen der continuirlichen Transformationsgruppen, Math. Ann. Bd. 27, S. 1—57.

Transformationen u. s. w. formulirt er das Problem der Bestimmung aller Zusammensetzungen von r-gliedrigen Gruppen invariantentheoretisch. Er führt es zurück auf die invariantentheoretische Untersuchung einer trilinearen Form:

$$F = \sum_{iks}^{1\ldots r} c_{iks} x_i y_k u_s ,$$

die zwei Reihen: $x_1 \ldots x_r$ und $y_1 \ldots y_r$ von Punktcoordinaten und eine Reihe: $u_1 \ldots u_r$ von Ebenencoordinaten enthält und von der zwei Covarianten, nämlich:

$$\Phi = \sum_{iks}^{1\ldots r} (c_{iks} + c_{kis}) x_i y_k u_s$$

und:

$$\Psi = \sum_{ikjs}^{1\ldots r} C_{ikjs} x_i y_k z_j u_s$$

identisch verschwinden. Hierbei bedeutet C_{ikjs} die linke Seite der bekannten Lie schen Gleichung:

$$C_{ikjs} = \sum_{1}^{r\tau} (c_{ik\tau} c_{\tau js} + c_{kj\tau} c_{\tau is} + c_{ji\tau} c_{\tau ks}) = 0 ,$$

die von jeder Zusammensetzung c_{iks} einer r-gliedrigen Gruppe erfüllt wird.

Die Betrachtung der Form F führt in einfachster Weise zu der adjungirten Gruppe u. s. w. Zum Beispiel ist:

$$x_i' = x_i + \frac{\partial F}{\partial u_i} \delta t \quad (i = 1 \ldots r),$$

wenn man die y als Parameter auffasst, die allgemeine infinitesimale Transformation der adjungirten Gruppe der Zusammensetzung c_{iks} und:

$$u_i' = u_i - \frac{\partial F}{\partial x_i} \delta t \quad (i = 1 \ldots r)$$

ist die allgemeine Transformation der zur Adjungirten dualistischen Gruppe; das identische Verschwinden der Covarianten Φ und Ψ sagt aus, dass die adjungirte Gruppe die Form F invariant lässt.

Die lineare Form:

$$\sum_{1}^{k\,r} \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial u_k} = \sum_{1}^{i\,r} x_i \sum_{1}^{k\,r} c_{ikk}$$

ist eine Covariante von F, gleich Null gesetzt stellt sie daher in dem R_{r-1} mit den homogenen Punktcoordinaten $x_1 \ldots x_r$ eine ebene Mannigfaltigkeit dar, die bei der adjungirten Gruppe invariant bleibt und die infolgedessen, wenn sie nicht identisch verschwindet, eine $(r-1)$-gliedrige invariante Untergruppe der r-gliedrigen Gruppe von der Zusammensetzung c_{iks} darstellt. Andrerseits zeigen die Gleichungen:

$$\sum_1^r{}_s C_{ikss} = \sum_1^r{}_\tau c_{ik\tau} \sum_1^r{}_s c_{\tau ss} = 0,$$

dass jene lineare Form nur dann nicht identisch zu verschwinden braucht, wenn alle r-reihigen Determinanten der Matrix:

$$\left| \begin{matrix} c_{ik1} \ldots c_{ikr} \\ (i, k = 1 \ldots r) \end{matrix} \right|$$

verschwinden, wenn also die r-gliedrige Gruppe von der Zusammensetzung c_{iks} nicht ihre eigne Derivirte ist. Es ist das eine neue Ableitung der Lieschen Sätze auf S. 692 f. (vgl. auch Abschn. I, S. 576 f.).

Wegen des identischen Verschwindens der Covariante Φ kann F auch als eine Form mit einer Reihe Linien- und einer Reihe Ebenencoordinaten aufgefasst werden. Die Gleichung: $F = 0$ ordnet dann jeder Geraden des R_{r-1} einen Punkt zu. Liegt dieser Punkt auf der Geraden oder wird er unbestimmt, so ist die Gerade das Bild einer zweigliedrigen Untergruppe der r-gliedrigen Gruppe von der Zusammensetzung c_{iks}, wird der Punkt insbesondere unbestimmt, so besteht diese Untergruppe aus vertauschbaren Transformationen. Da nun das Unbestimmtwerden des Punktes r Bedingungen repräsentirt und da es im R_{r-1} ∞^{2r-4} Gerade giebt, so erhält man den

Satz 1. *Jede r-gliedrige Gruppe enthält mindestens ∞^{r-4} zweigliedrige Untergruppen mit paarweise vertauschbaren infinitesimalen Transformationen, insbesondere enthält jede viergliedrige Gruppe mindestens eine.*

Diesen Satz, den Killing schon vorher, aber ohne Beweis veröffentlicht hatte (Braunsberger Programm von 1884), benutzt Engel um zu beweisen, dass jede Gruppe mit mehr als vier Parametern viergliedrige Untergruppen enthält. Der betreffende Beweis, dessen Verfahren dem Beweise Lies für die Existenz dreigliedriger Untergruppen nachgebildet ist, kann jetzt kurz so geführt werden: Jede G_r mit mehr als vier Parametern enthält eine G_2 mit paarweise vertauschbaren Transformationen. Diese G_2 steckt nach Abschn. I, S. 593 Theor. 106 in einer G_3, die offenbar integrabel ist (s. S. 715, Theor. 64) und die infolgedessen in mindestens einer G_4 steckt (dieser Abschn. S. 681, Satz 8).

In einer Reihe von „Kleineren Beiträgen zur Gruppentheorie“ hat Engel ferner Untersuchungen über verschiedene Theile der Gruppentheorie veröffentlicht*).

In Nr. I dieser Beiträge bespricht er den Sinn der speciellen Jacobischen Identität, also der Identität zwischen drei beliebigen infinitesimalen Punkttransformationen; er zeigt, dass diese Identität nichts andres ist als die Substitutionenidentität:

$$(U^{-1}TU)^{-1}U^{-1}SU(U^{-1}TU) \equiv U^{-1}T^{-1}STU$$

für den Fall, dass die drei Substitutionen S, T, U infinitesimal werden. Angeregt wurde Engel hierzu durch die Deutung, die Lie für die allgemeine Jacobische Identität gefunden hatte (s. Abschn. II, S. 278 ff.).

In Nr. II stellt Engel einen wichtigen Satz auf, den wir jetzt folgendermassen aussprechen können:

Satz 2. *Eine r-gliedrige Gruppe G_r ist stets dann aber auch nur dann integrabel, wenn sie keine einfache dreigliedrige Untergruppe enthält.*

Allerdings enthält der Beweis Engels insofern eine Lücke, als er ohne Weiteres voraussetzt, dass die dreigliedrige einfache Gruppe zu einer G_r, die keine dreigliedrige einfache Untergruppe enthält, auch nicht meroedrisch isomorph sein könne. Engel bemerkte später diese Lücke und machte in dem Jahrb. über die Fortschr. der Math. Bd. 19, S. 356 darauf aufmerksam. Killing leitete dann den Engelschen Satz aus seinen allgemeinen Theorien über die Zusammensetzung ab, aber da der Satz auch bei Killing nicht streng bewiesen zu sein schien, so sah sich Engel veranlasst in Nr. 8 seiner Beiträge die Lücke seines ursprünglichen Beweises auszufüllen.

Wir können hier den Beweis nur andeuten.

Enthält eine G_r keine einfache G_3, also keine G_3 von der Zusammensetzung:

$$(1) \qquad (X_1X_2) = X_1f, \quad (X_1X_3) = 2X_2f, \quad (X_2X_3) = X_3f$$

und ist die G_3 von dieser Zusammensetzung auch nicht mit G_r meroedrisch isomorph, so gilt nach Theor. 58, S. 688 zunächst folgendes: Enthält die G_r eine G_{r-1}, so enthält sie auch eine invariante G_{r-1}. Die G_r enthält nun sicher dreigliedrige Untergruppen, diese sind nicht einfach, sie sind also integrabel und stecken in je einer viergliedrigen

*) I u. II Leipz. Ber. 1887, S. 89 ff., III ebd. 1891, S. 47 ff.; IV ebd. 1891, S. 308 ff.; V ebd. 1891, S. 585 ff.; VI, ebd. 1892, S. 43 ff.; VII, ebd. 1892, S. 292 ff.; VIII, ebd. 1893, S. 360 ff.

Untergruppe der G_r (s. S. 681, Satz 8). Diese viergliedrigen Untergruppen sind von derselben Beschaffenheit wie die G_r, sie enthalten also je eine dreigliedrige invariante Untergruppe, die natürlich integrabel ist, folglich sind sie auch integrabel (s. S. 680, Satz 6) und stecken jede in einer fünfgliedrigen Untergruppe der G_r. Fährt man in dieser Weise fort, so erkennt man, dass die G_r eine invariante G_{r-1} enthält, die integrabel ist, dass also die G_r selbst integrabel ist.

Jetzt ist noch zu zeigen, dass es keine G_{r+3} giebt, die keine G_3 von der Zusammensetzung (1) enthält und mit der die G_3 von der Zusammensetzung (1) auch nicht meroedrisch isomorph ist. Gäbe es eine solche G_{r+3}, so enthielte sie eine invariante G_r. Wir können offenbar voraussetzen, dass die G_3 von der Zusammensetzung (1) nicht mit dieser G_r isomorph ist, dass also die G_r integrabel ist. Dieser Fall kann wiederum durch einfache Ueberlegungen auf den zurückgeführt werden, dass die G_r aus paarweise vertauschbaren infinitesimalen Transformationen besteht und keine in der G_{r+3} invariante Untergruppe enthält. Ist die G_r so beschaffen, so transformirt die Adjungirte der G_{r+3} den invarianten ebenen R_{r-1} der ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen von G_r durch eine dreigliedrige projective Gruppe γ, die keine ebene Mannigfaltigkeit des R_{r-1} stehen lässt. Hieraus folgt, dass γ die dreigliedrige projective Gruppe einer möglichst gekrümmten rationalen Curve $(r-1)$-ter Ordnung des R_{r-1} ist*), und dass die Zusammensetzung der G_{r+3} die folgende Form erhalten kann:

$$
(2)\quad \begin{cases}
(Y_1 Y_2) = Y_1 f + \sum_1^r a_k X_k f, \quad (Y_2 Y_3) = Y_3 f + \sum_1^r c_k X_k f \\
(Y_1 Y_3) = 2\, Y_2 f + \sum_1^r b_k X_k f \\
(Y_1 X_\mu) = \mu\, X_{\mu+1} f, \quad (Y_3 X_\mu) = -(r-\mu+1)\, X_{\mu-1} f \\
(Y_2 X_\mu) = \frac{r-2\mu+1}{2} X_\mu f \\
(X_j X_\mu) = 0 \quad (j, \mu = 1 \ldots r),
\end{cases}
$$

wo natürlich $X_{r+1} f$ und $X_0 f$ gleich Null zu setzen sind. Durch eine ähnliche Rechnung wie auf S. 736 kann man nunmehr zeigen, dass die a, b, c bei geeigneter Wahl von $Y_1 f$, $Y_2 f$, $Y_3 f$ verschwinden, dass

*) Eine dreigliedrige projective Gruppe des R_{r-1}, die keine ebene Mannigfaltigkeit dieses Raumes in Ruhe lässt, ist nothwendig einfach, sie enthält andrerseits eine integrable G_2, die einen Punkt in Ruhe lässt, sie lässt also eine Curve in Ruhe, die natürlich möglichst gekrümmt ist. Das Uebrige ergiebt sich aus Satz 2 auf S. 187.

also die G_{r+3} eine G_3 von der Zusammensetzung (1) enthält. Man kommt also auf einen Widerspruch und somit ist der Satz 2 vollständig bewiesen.

Es liegt auf der Hand, dass dieser Satz die Bestimmung aller Zusammensetzungen von nicht integrabeln Gruppen mit 4, 5 und 6 Parametern wesentlich vereinfacht (vgl. S. 744).

In Nr. III seiner Beiträge giebt Engel eine sehr einfache Ableitung der Lieschen Sätze über infinitesimale Berührungstransformationen (s. Abschn. II, Kap. 15). Er geht aus von einer endlichen Berührungstransformation S, vermöge deren die Gleichung:

$$(3) \qquad dz' - \sum_1^n{}^i p_i' dx_i' = \varrho(z, x, p)\left(dz - \sum_1^n{}^i p_i dx_i\right)$$

besteht, und von einer infinitesimalen Berührungstransformation:

$$Af = \xi \frac{\partial f}{\partial z} + \sum_1^n{}^i \left(\xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \pi_i \frac{\partial f}{\partial p_i}\right).$$

In (3) kann man nun die dz und dx_i gleich den Zuwachsen setzen, die z und die x_i bei der infinitesimalen Transformation Af erhalten, und es sind dann offenbar die dz', dx_i' die Zuwachse, die z' und die x_i' bei der infinitesimalen Berührungstransformation erhalten, die entsteht, wenn man in Af vermöge S die neuen Veränderlichen z', x', p' einführt. Hieraus ergiebt sich ohne Weiteres, wie sich die charakteristische Function:

$$U = \sum_1^n{}^i p_i \xi_i - \xi$$

von Af bei der endlichen Berührungstransformation S ändert. Lässt man die Berührungstransformation S infinitesimal $= Bf$ werden und V ihre charakteristische Function sein, so geht Af bei Ausführung von S in die infinitesimale Transformation: $Af + \delta t(AB)$ über, deren charakteristische Function man berechnen kann. Man findet daher auch die charakteristische Function von (AB) ausgedrückt durch U und V.

Diese Betrachtungen sind besonders deshalb wichtig, weil sie sich auf die Transformationen übertragen lassen, die eine beliebige Pfaffsche Gleichung in n Veränderlichen invariant lassen.

In Nr. IV und V seiner Beiträge beschäftigt sich Engel damit, die von Schur gefundenen Resultate möglichst einfach abzuleiten und

sie mit denen Lies in Verbindung zu bringen. Wir ziehen daher vor, den Inhalt dieser Arbeiten bei der Darstellung der Schurschen Untersuchungen zu verwerthen.

In Nr. VI stellt Engel, anknüpfend an die Schurschen Ergebnisse, einen merkwürdigen Satz über die kanonische Parametergruppe auf. Schur hatte nämlich gezeigt, dass die infinitesimalen Transformationen der (ersten) kanonischen Parametergruppe, die zu einer gegebenen Zusammensetzung c_{iks} von r-gliedrigen Gruppen gehört, als Quotienten beständig convergenter Potenzreihen darstellbar sind, die alle denselben Nenner haben. Engel bestimmt nun die Nullstellen dieses Nenners. Wir begnügen uns mit der Mittheilung der betreffenden Formeln.

Setzt man:

$$(4)\qquad \begin{cases} E_{sk}^{(0)} = \varepsilon_{sk}, \quad E_{sk}^{(1)} = \sum_{\tau}^{1\ldots r} c_{k\tau s} e_\tau \\ E_{sk}^{(n+1)} = \sum_{\tau_1 \ldots \tau_n}^{1\ldots r} E_{s\tau_1}^{(1)} E_{\tau_1\tau_2}^{(1)} \cdots E_{\tau_{n-1}\tau_n}^{(1)} E_{\tau_n k}^{(1)} \\ (s, k = 1 \ldots r) \end{cases}$$

und:

$$(5)\qquad \psi_{sk} = \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(\nu+1)!} E_{sk}^{(\nu)},$$

wo die ψ_{sk} beständig convergente Potenzreihen sind, so ist der bewusste Nenner einfach die Determinante der ψ_{sk}. Durch Benutzung der von Schur bemerkten Relationen:

$$(6)\qquad \sum_{1}^{r} {}_j E_{sj}^{(\mu)} E_{jk}^{(\nu)} = E_{sk}^{(\mu+\nu)} \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2 \ldots)$$

und des Multiplicationssatzes der Determinanten gelingt es nun Engel, die Determinante der ψ_{sk} in ein beständig convergentes unendliches Product von ganzen rationalen Functionen zu zerlegen, sie wird nämlich gleich:

$$(7)\qquad e^{\frac{1}{2}\sum_{\tau}^{1\ldots r} E_{\tau\tau}^{(1)}} \cdot \prod_{1}^{\infty}{}_{\nu} \left| \varepsilon_{sk} + \frac{1}{2\nu\pi i} E_{sk}^{(1)} \right| \cdot \left| \varepsilon_{sk} - \frac{1}{2\nu\pi i} E_{sk}^{(1)} \right|.$$

Damit sind zugleich alle Nullstellen dieses Nenners angebbar.

In Nr. VII seiner Beiträge behandelt Engel die reellen Berührungstransformationsgruppen, die irreducibel sind, die also nicht durch

reelle Berührungstransformationen in Gruppen von Punkttransformationen übergeführt werden können. Die in dieser Arbeit aufgestellten Sätze sind, soweit sie die Ebene betreffen, schon auf S. 384 f. mitgetheilt worden, wir begnügen uns daher mit der Angabe, dass die allgemeine projective Gruppe der Ebene durch eine imaginäre Berührungstransformation in eine reelle irreducible Berührungstransformationsgruppe übergeht, deren infinitesimale Transformationen die charakteristischen Functionen:

$$(8)\quad \begin{array}{c} 1,\ x,\ y,\ x^2+y^2,\ z-\frac{1}{2}xy \\ x(x^2+y^2)-4y\left(z-\frac{1}{2}xy\right),\ y(x^2+y^2)+4x\left(z-\frac{1}{2}xy\right) \\ (x^2+y^2)^2+16\left(z-\frac{1}{2}xy\right)^2 \end{array}$$

besitzen. Entsprechendes gilt für die allgemeine projective Gruppe jedes beliebigen Raumes R_n, und zwar verwandeln sich merkwürdigerweise alle ebenen Mannigfaltigkeiten des R_n bei der betreffenden imaginären Berührungstransformation in lauter $(n-1)$-fach ausgedehnte imaginäre Mannigfaltigkeiten zweiten Grades.

Die beiden Arbeiten Engels über die Invariantentheorie der Systeme von Pfaffschen Gleichungen*) behandeln fast nur Gegenstände, die hier nicht berücksichtigt werden können, blos ein darin enthaltener Satz darf nicht unerwähnt bleiben, es ist dieser:

Satz 3. *Lässt eine Transformation das System der linearen partiellen Differentialgleichungen:*

$$(9)\qquad X_1 f = 0, \ldots, X_m f = 0$$

invariant, so lässt sie auch das System:

$$(10)\qquad X_\mu f = 0,\quad (X_\mu X_\nu) = 0 \qquad (\mu, \nu = 1 \ldots m)$$

invariant.

Der Beweis dieses Satzes ergiebt sich sofort aus den Betrachtungen auf S. 84 von Abschn. I. Von grossem Nutzen ist der Satz bei der Untersuchung solcher Gruppen von Punkttransformationen, die ein nicht integrables System von Pfaffschen Gleichungen invariant lassen. Lässt z. B. eine Gruppe G des R_4 ein nicht unbeschränkt integrables System von zwei Pfaffschen Gleichungen invariant, so lässt sie auch das entsprechende System: $X_1 f = 0$, $X_2 f = 0$ von zwei

*) Leipz. Ber. 1889, S. 157 ff. u. 1890, S. 192 ff.

linearen partiellen Differentialgleichungen invariant (vgl. Abschn. I, S. 102 ff.), diese beiden Gleichungen bilden aber kein zweigliedriges vollständiges System, also lässt G auch das System der drei Gleichungen: $X_1 f = 0$, $X_2 f = 0$, $(X_1 X_2) = 0$ und die diesem Systeme entsprechende Pfaffsche Gleichung invariant. Ist nun diese Pfaffsche Gleichung integrabel, so ist G imprimitiv. Ist sie nicht integrabel, so giebt es, wie aus der Theorie des Pfaffschen Problems bekannt ist, ein mit ihr invariant verknüpftes simultanes System von gewöhnlichen Differentialgleichungen, das natürlich auch bei G invariant bleibt; also ist G auch in diesem Falle imprimitiv. Wir haben somit den

Satz 4. *Jede Gruppe von Punkttransformationen des R_4, die ein nicht unbeschränkt integrables System von zwei Pfaffschen Gleichungen invariant lässt, ist imprimitiv.*

Eine andre Arbeit Engels handelt über die Erzeugung der endlichen Transformationen einer projectiven Gruppe durch die infinitesimalen Transformationen der Gruppe*). Sie war veranlasst durch die Bemerkung, dass nicht jede endliche Transformation der speciellen linearen homogenen Gruppe:

$$(11) \qquad x' = a_1 x + a_2 y, \quad y' = a_3 x + a_4 y \quad (a_1 a_4 - a_2 a_3 = 1)$$

von einer infinitesimalen Transformation:

$$e_1 xq + e_2(xp - yq) + e_3 yp$$

der Gruppe erzeugt ist. Es lag daher recht nahe, zu untersuchen, bei welchen projectiven Gruppen *jede* endliche Transformation der Gruppe von einer infinitesimalen Transformation der Gruppe erzeugt ist. Engel zeigt in seiner Arbeit, dass jedenfalls die allgemeine projective Gruppe eines jeden Raumes diese Eigenschaft besitzt. Die von ihm befolgte Methode genügt auch, um dasselbe für die projective Gruppe des linearen Complexes und für die continuirliche projective Gruppe einer nicht ausgearteten Mannigfaltigkeit zweiten Grades zu beweisen, jedoch ist der Beweis für diese beiden Gruppen noch nicht veröffentlicht. Ausserdem ist noch zu bemerken, dass Study schon früher einen Beweis für die besprochene Eigenschaft der allgemeinen projectiven Gruppe besass. Engel wird diesen Studyschen Beweis in der Fortsetzung seiner Arbeit mittheilen.

Die Thatsache, dass nicht jede endliche Transformation der Gruppe (11) von einer infinitesimalen Transformation der Gruppe erzeugt ist,

*) Leipz. Ber. 1892, S. 279 ff. (Erste Mittheilung.)

ist besonders deshalb von Wichtigkeit, weil sie zeigt, dass die Gruppe (11) und die allgemeine projective Gruppe auf der Geraden nicht in ihrer ganzen Ausdehnung, sondern nur in einer gewissen Umgebung der identischen Transformation holoedrisch isomorph sind im Sinne der Substitutionentheorie. Die Betrachtungen des Kap. 21 von Abschn. I beweisen in der That nur, dass beide Gruppen in einer gewissen Umgebung der identischen Transformation holoedrisch isomorph sind im Sinne der Substitutionentheorie, denn bei diesen Betrachtungen wird ebenso wie überall sonst im ersten Abschnitt vorausgesetzt, dass man sich auf gewisse Bereiche beschränkt.

Durch briefliche Mittheilungen Killings hatte Engel erfahren, dass es eine vierzehngliedrige einfache Gruppe gebe, die als Gruppe von Punkttransformationen in keinem Raume von weniger als fünf Dimensionen existiren könne. Da Killing noch keine Gruppe dieser Art aufgestellt hatte, so versuchte Engel eine zu bestimmen und fand eine, die auch als irreducible Berührungstransformationsgruppe des gewöhnlichen Raumes aufgefasst werden kann. Er theilte dieses Ergebniss schon 1888 Killing mit und setzte später seine Untersuchungen über die Gruppe fort, jedoch ohne etwas darüber zu veröffentlichen. Erst 1893 veröffentlichte er einen Theil seiner Resultate*) und zwar gleichzeitig mit Cartan, der seinerseits einen Theil der Engelschen Resultate über diese Gruppe gefunden hatte.

Die erwähnte vierzehngliedrige Gruppe von Berührungstransformationen hat die charakteristischen Functionen:

(12)
$$\begin{array}{c} 1,\ x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2,\ Z,\ S_1,\ S_2,\ S_3 \\ x_1 Z + \frac{x_1}{6} S_2 + \frac{y_2}{3\sqrt{3}} S_3, \quad x_2 Z - \frac{x_2}{6} S_2 + \frac{y_2}{3} S_1 \\ y_1 Z - \frac{y_1}{6} S_2 - \frac{x_2}{3\sqrt{3}} S_1, \quad y_2 Z + \frac{y_2}{6} S_2 - \frac{x_2}{3} S_3 \\ Z^2 - \frac{1}{36} S_2^2 + \frac{1}{9} S_1 S_3 \end{array}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$x_2^2 + \sqrt{3} y_1 y_2 = S_1, \quad x_2 y_2 - 3 x_1 y_1 = S_2, \quad y_2^2 + \sqrt{3} x_1 x_2 = S_3.$$

$$z - \tfrac{1}{2}(x_1 y_1 + x_2 y_2) = Z.$$

*) C. R. 1893, Bd. 116, S. 786 ff.

Als Gruppe von Punkttransformationen des R_5 ist sie mit einer Gruppe G_{14} ähnlich, die das System der Gleichungen:

$$(13)\quad \begin{cases} dz + x_1 dy_1 - y_1 dx_1 + x_2 dy_2 - y_2 dx_2 = 0 \\ dx_2^2 + \sqrt{3}\, dy_1 dy_2 = 0, \quad dy_2^2 + \sqrt{3}\, dx_1 dx_2 = 0 \\ dx_2 dy_2 - 3 dx_1 dy_1 = 0 \end{cases}$$

invariant lässt. Diese Gruppe G_{14} lässt ferner eine Schaar von ∞^5 Geraden invariant, die (13) erfüllt und die durch die Gleichungen:

$$(14)\quad \begin{cases} y_2 = -x_1\sqrt{3}\,\mathfrak{x}_1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathfrak{x}_2 \\ x_2 = \quad y_2\mathfrak{x}_1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathfrak{x}_3 \\ y_1 = -\frac{x_2}{\sqrt{3}}\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_4 \\ z = \quad \frac{y_2}{\sqrt{3}}\mathfrak{x}_3 + \frac{x_2}{2\sqrt{3}}\mathfrak{x}_2 + x_1\mathfrak{x}_4 + \mathfrak{x}_5 \end{cases}$$

dargestellt wird, unter den $\mathfrak{x}$ Parameter verstanden*). Fasst man die Gleichungen (14) als Bestimmungsgleichungen einer Berührungstransformation des R_5 auf und führt man die betreffende Berührungstransformation auf G_{14} aus, so erhält man eine neue Gruppe G'_{14} von Punkttransformationen, die das System der drei Pfaffschen Gleichungen:

$$(15)\quad \begin{cases} \Delta_3 = d\mathfrak{x}_3 + \quad \mathfrak{x}_1 d\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_2 d\mathfrak{x}_1 = 0 \\ \Delta_4 = d\mathfrak{x}_4 + \frac{1}{2}(\mathfrak{x}_3 d\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_1 d\mathfrak{x}_3) = 0 \\ \Delta_5 = d\mathfrak{x}_5 + \frac{1}{2}(\mathfrak{x}_2 d\mathfrak{x}_3 - \mathfrak{x}_3 d\mathfrak{x}_2) = 0 \end{cases}$$

invariant lässt. Dieses System (15) wird von den ∞^5 Geraden befriedigt, die durch (14) dargestellt werden, wenn man die z, x, y als Parameter auffasst. Ausserdem lässt G'_{14} aber noch das System der beiden Pfaffschen Gleichungen:

$$(16)\quad 2\Delta_5 + \mathfrak{x}_2\Delta_3 = 0, \quad 2\Delta_4 - \mathfrak{x}_1\Delta_3 = 0$$

und die Gleichung:

$$(17)\quad d\mathfrak{x}_3\Delta_3 + 2d\mathfrak{x}_2\Delta_4 + 2d\mathfrak{x}_1\Delta_5 = d\mathfrak{x}_3^2 + 2d\mathfrak{x}_2 d\mathfrak{x}_4 + 2d\mathfrak{x}_1 d\mathfrak{x}_5 = 0$$

invariant, man kann daher G'_{14} in eine Untergruppe der conformen Gruppe des R_5 überführen.

*) Es sind das alle Geraden eines gewissen linearen Complexes, die einen gewissen Kegel dritter Ordnung treffen.

Die durch (14) bestimmte Berührungstransformation ist deshalb sehr merkwürdig, weil sie gewisse Analogien mit der von Lie entdeckten Berührungstransformation darbietet, bei der die Geraden des R_3 in die Kugeln übergehen.

Auch Cartan hat im R_5 zwei verschiedene vierzehngliedrige einfache Gruppen von Punkttransformationen aufgestellt, es ist ihm jedoch entgangen, dass sie durch eine Berührungstransformation ähnlich sind. Er hat aber ausserdem noch bemerkt, dass die eine von ihnen als Gruppe von Berührungstransformationen des R_3 aufgefasst, eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung und ein System von zwei solchen Gleichungen invariant lässt.

Die neueste Arbeit von Engel über die Differentialquotienten höherer Ordnung*) verdient deshalb hier erwähnt zu werden, weil in ihr gezeigt wird, dass die Bestimmung der Differentialinvarianten n-ter Ordnung jeder projectiven Gruppe auf die Bestimmung der gewöhnlichen Invarianten einer gleichzusammengesetzten projectiven Gruppe in einem höheren Raume zurückgeführt werden kann.

Wir fügen hier noch einige von Engel herrührende Betrachtungen ein, die sich an die Entwicklungen des § 135 anschliessen und diese vervollständigen.

In § 135 haben wir uns noch gar nicht genauer mit den verschiedenen Reihen von einfachen Gruppen beschäftigt, die nach S. 703 f. durch die verschiedenen Normalreihen von Untergruppen einer r-gliedrigen Gruppe G bestimmt werden. Wir wollen jetzt über diese einfachen Gruppen einen Satz beweisen, von dem das Theor. 63 auf S. 704 eine unmittelbare Folge ist. Dieser Satz lautet so:

Satz 5**). *Es sei* $G, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2 \ldots$ *eine Normalreihe von Untergruppen der* r*-gliedrigen Gruppe* G *und* $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2 \ldots$ *seien die Zusammensetzungen von einfachen Gruppen, die durch diese Normalreihe bestimmt sind; es sei also* $\mathfrak{E}_k$ *die Zusammensetzung einer einfachen mit* $\mathfrak{G}_{k-1}$ *meroedrisch isomorphen Gruppe, die dadurch erhalten wird, dass man in den Relationen für die Zusammensetzung von* $\mathfrak{G}_{k-1}$ *alle infinitesimalen Transformationen der invarianten Untergruppe* $\mathfrak{G}_k$ *von* $\mathfrak{G}_{k-1}$ *gleich Null setzt, unter* $\mathfrak{G}_0$ *die Gruppe* G *selbst verstanden. Unter diesen Voraussetzungen ist die Reihe der Zusammensetzungen:* $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2 \ldots$, *wenn von der Anordnung*

*) Leipz. Ber. 1893, S. 468 ff.

**) Der entsprechende Satz der Substitutionentheorie ist zuerst von Hölder aufgestellt und bewiesen worden (s. Math. Ann. Bd. 34, S. 30—39, 1889).

ihrer Glieder abgesehen wird, ganz von der Wahl der Normalreihe: G, $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2 \ldots$ *unabhängig; mit andern Worten: Ist* G, Γ_1, $\Gamma_2 \ldots$ *irgend eine andre Normalreihe von Untergruppen von* G *und sind:* E_1, $\mathsf{E}_2 \ldots$ *die Zusammensetzungen von einfachen Gruppen, die durch diese Normalreihe bestimmt sind, so kommt jede Zusammensetzung aus der Reihe:* $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2 \ldots$ *auch in der Reihe:* E_1, $\mathsf{E}_2 \ldots$ *vor und zwar in beiden Reihen gleich oft.*

Um nun diesen Satz zu beweisen, nehmen wir wie auf S. 705 an, dass: G, $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2 \ldots$ und: G, Γ_1, $\Gamma_2 \ldots$ zwei verschiedene Normalreihen von Untergruppen von G sind und dass $\mathfrak{G}_1$ und Γ_1 nicht zusammenfallen. Wir setzen weiter voraus, dass $\mathfrak{G}_1$ und Γ_1 gerade h unabhängige infinitesimale Transformationen gemein haben, dass also $\mathfrak{G}_1$ auf die Form: $\mathfrak{Y}_1 f \ldots \mathfrak{Y}_{r_1-h} f$, $Z_1 f \ldots Z_h f$ gebracht werden kann und Γ_1 auf die Form: $\Upsilon_1 f \ldots \Upsilon_{\varrho_1-h} f$, $Z_1 f \ldots Z_h f$.

Unter diesen Voraussetzungen hat die Gruppe G selbst, wie wir auf S. 706 sahen, die Form:

$$\mathfrak{Y}_1 f \ldots \mathfrak{Y}_{r_1-h} f, \quad \Upsilon_1 f \ldots \Upsilon_{\varrho_1-h} f, \quad Z_1 f \ldots Z_h f,$$

ihre Zusammensetzung wird daher durch Gleichungen von der Gestalt:

$$(18)\quad \begin{cases} (\mathfrak{Y}_i \mathfrak{Y}_j) = \sum_1^{r_1-h} {}_s\, a_{ijs} \mathfrak{Y}_s f + \sum_1^{h} {}_\tau\, b_{ij\tau} Z_\tau f \\ (\Upsilon_\mu \Upsilon_\nu) = \sum_1^{\varrho_1-h} {}_s\, \alpha_{\mu\nu s} \Upsilon_s f + \sum_1^{h} {}_\tau\, \beta_{\mu\nu\tau} Z_\tau f \\ (\mathfrak{Y}_i Z_\pi) = \sum_1^{h} {}_\tau\, \lambda_{i\pi\tau} Z_\tau f, \quad (\Upsilon_\mu Z_\pi) = \sum_1^{h} {}_\tau\, \varrho_{\mu\pi\tau} Z_\tau f \\ (\mathfrak{Y}_i \Upsilon_\mu) = \sum_1^{h} {}_\tau\, \gamma_{i\mu\tau} Z_\tau f, \quad (Z_\pi Z_\sigma) = \sum_1^{h} {}_\tau\, c_{\pi\sigma\tau} Z_\tau f \\ (i,j = 1 \ldots r_1 - h;\ \mu,\nu = 1 \ldots \varrho_1 - h;\ \pi,\sigma = 1 \ldots h) \end{cases}$$

bestimmt.

Nach S. 706 erzeugen: $Z_1 f \ldots Z_h f$ eine h-gliedrige invariante Untergruppe H von G, $\mathfrak{G}_1$ und Γ_1, die weder in einer grösseren invarianten Untergruppe von $\mathfrak{G}_1$, noch in einer solchen von Γ_1 steckt. Ist daher: H, H_1, $H_2 \ldots$ eine Normalreihe von Untergruppen von H, so sind zugleich: G, $\mathfrak{G}_1$, H, $H_1 \ldots$ und G, Γ_1, H, $H_1 \ldots$ zwei neue Normalreihen von Untergruppen von G. Wir werden zeigen, dass unser Satz für diese beiden neuen Normalreihen richtig ist.

Zu diesem Zwecke brauchen wir offenbar nur zu zeigen, dass die beiden Zusammensetzungen von einfachen Gruppen, die durch die Reihe der Gruppen: G, $\mathfrak{G}_1$, H bestimmt sind, mit den beiden Zusammen-

setzungen von einfachen Gruppen, die durch: G, Γ_1, H bestimmt sind, zusammenfallen. Das aber ist sehr leicht.

In der That, die invariante Untergruppe $\mathfrak{G}_1$ von G liefert die Zusammensetzung einer einfachen mit G isomorphen Gruppe, wenn wir in (18) alle infinitesimalen Transformationen von $\mathfrak{G}_1$ gleich Null setzen. Die Zusammensetzung dieser einfachen Gruppe wird daher durch die Gleichungen:

$$(19) \qquad (\overline{Y}_\mu \overline{Y}_\nu) = \sum_1^{\varrho_1 - h} {}_s \alpha_{\mu\nu s} \overline{Y}_s f \qquad (\mu, \nu = 1 \ldots \varrho_1 - h)$$

bestimmt. Ferner liefert H die Zusammensetzung einer mit $\mathfrak{G}_1$ isomorphen Gruppe und zwar wird die betreffende Zusammensetzung offenbar durch die Gleichungen:

$$(20) \qquad (\overline{\mathfrak{Y}}_i \overline{\mathfrak{Y}}_j) = \sum_1^{r_1 - h} {}_s \alpha_{ijs} \overline{\mathfrak{Y}}_s f \qquad (i, j = 1 \ldots r_1 - h)$$

bestimmt.

Andrerseits wird die Zusammensetzung der mit G isomorphen einfachen Gruppe, die Γ_1 liefert, offenbar durch die Relationen (20) dargestellt und die Zusammensetzung der mit Γ_1 isomorphen einfachen Gruppe, die H liefert, durch die Gleichungen (19). Demnach liegt auf der Hand, dass die beiden Normalreihen: G, $\mathfrak{G}_1$, H, $H_1 \ldots$ und: G, Γ_1 H, $H_1 \ldots$ dieselben Reihen von Zusammensetzungen einfacher Gruppen liefern.

Nunmehr braucht blos noch gezeigt zu werden, dass die beiden Normalreihen: G, $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2 \ldots$ und G, $\mathfrak{G}_1$, H, $H_1 \ldots$ dieselben Reihen von einfachen Gruppen liefern und dass von den beiden Normalreihen: G, Γ_1, $\Gamma_2 \ldots$ und: G, Γ_1, H, $H_1 \ldots$ das Gleiche gilt. Das aber kommt offenbar darauf hinaus, unsern Satz für die beiden Gruppen: $\mathfrak{G}_1$ und Γ_1 zu beweisen. Es ist klar, dass hierzu nur eine genügend oft wiederholte Anwendung der eben durchgeführten Betrachtungen erforderlich ist.

Dass endlich das Theor. 63, S. 704 eine unmittelbare Folge unsers Satzes ist, liegt auf der Hand. Die ganzen Zahlen: $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$, ..., die im Sinne von Theor. 63 zu der Normalreihe: G, $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2 \ldots$ gehören, lassen sich nämlich offenbar auch so definiren: $\mathfrak{l}_k$ ist jedesmal die Differenz zwischen der Gliederzahl einer einfachen Gruppe von der Zusammensetzung $\mathfrak{E}_k$ und der Gliederzahl der grössten in ihr enthaltenen Untergruppen. Da nun die beiden Reihen von Zusammensetzungen: $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2 \ldots$ und E_1, $\mathsf{E}_2 \ldots$ mit einander übereinstimmen, so muss dasselbe auch von den beiden Reihen: $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2 \ldots$ und λ_1, $\lambda_2 \ldots$ von ganzen Zahlen gelten.

Für die Zwecke der Integrationstheorie besitzt der Satz 5 gewisse Vorzüge vor dem Theor. 63, doch wollen wir hier nicht darauf eingehen.

§ 142.

Killing.

Seit Juli 1884 hat Killing eine beträchtliche Anzahl von Arbeiten über endliche continuirliche Gruppen veröffentlicht*). Einige dieser Arbeiten sind von sehr untergeordnetem Werthe, die meisten dagegen haben sogar bedeutenden Werth; ihnen allen ist aber gemeinsam, dass die Darstellung sehr viel zu wünschen übrig lässt. Die Beweise sind zum Theil nicht in Ordnung, die Fassung der Sätze ist nicht selten unklar oder unrichtig. Ueberhaupt geht Killing nur zu oft wirklichen Schwierigkeiten aus dem Wege und hilft sich bei vielen seiner Behauptungen damit, dass er erklärt: „auf den Beweis glaube ich nicht eingehen zu sollen".

Als er seine „Erweiterung des Raumbegriffs" schrieb, kannte Killing die gruppentheoretischen Untersuchungen Lies noch nicht; nicht einmal das Wort Gruppe gebraucht er, sondern er sagt dafür „Raumform". In § 3 und 4 dieser Arbeit leitet er, natürlich unter Benutzung andrer Ausdrücke die beiden Sätze ab, dass r unabhängige infinitesimale Transformationen: $X_1 f \ldots X_r f$ einer r-gliedrigen Gruppe stets in Beziehungen von der Form:

$$(21) \qquad (X_i X_k) = \sum_1^r{}_s \, c_{iks} X_s f \qquad (i, k = 1 \ldots r)$$

stehen und dass hier die Constanten c_{iks} den bekannten Gleichungen: $c_{iks} + c_{kis} = 0$ u. s. w. genügen. In beiden Fällen unterlässt er aber auf die ungleich schwierigere Umkehrung dieser Sätze einzugehen. Auch in seinen späteren Arbeiten erwähnt er nirgends, dass man erst beweisen muss, dass zu jedem Systeme von c_{iks}, das die erwähnten Gleichungen erfüllt, r-gliedrige Gruppen von der Zusammensetzung c_{iks} gehören.

---

*) Es sind das die folgenden: Drei Braunsberger Programme: Erweiterung des Raumbegriffs (1884); Zur Theorie der Lieschen Transformationsgruppen (1886); Ueber eine gewisse Determinante (1889). Ferner in den Math. Ann.: vier Arbeiten über die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen: Bd. 31, S. 252—290; Bd. 33, S. 1—48; Bd. 34, S. 57—122; Bd. 36, S. 161—189; je eine Arbeit über die Erweiterung des Begriffs der Invarianten und über die grössten Untergruppen endlicher Gruppen: Bd. 35, S. 423—432 und Bd. 36, S. 239—254. Endlich die Arbeit über die Grundlagen der Geometrie, Crelle, Bd. 109.

In dem § 3 giebt er ferner einen allerdings ungenügenden Beweis für den Satz, dass die endlichen Transformationen zweier eingliedriger Gruppen: Xf und Yf dann und nur dann mit einander vertauschbar sind, wenn $(XY) \equiv 0$ ist. Dazu fügt er zwei Sätze, die beide falsch sind. Der erste sagt aus, dass jede n-gliedrige Gruppe des R_n, die aus paarweise vertauschbaren Transformationen besteht und in der keine zwei infinitesimalen Transformationen die Bahncurven gemein haben, mit der Gruppe der Translationen ähnlich sei. Dieser Satz ist für $n > 2$ unrichtig, wie schon die Gruppe:

$$p_1,\ p_2,\ x_3 p_1 + x_3^2 p_2$$

zeigt. Der zweite Satz sagt aus, dass für $r > n$ jede r-gliedrige Gruppe von vertauschbaren Transformationen des R_n mindestens zwei unabhängige infinitesimale Transformationen mit gemeinsamen Bahncurven enthalte. Auch dieser Satz ist für $n > 2$ falsch, wie man sofort an der Gruppe:

$$p_1,\ p_2,\ x_3 p_1 + x_3^2 p_2,\ x_3^3 p_1 + x_3 p_2$$

erkennt. Endlich theilt Killing in § 3 noch einen Satz mit, der allerdings neu und richtig ist, er giebt aber keinen Beweis dafür; wir meinen den Satz, dass jede Gruppe mit mehr als drei Parametern immer unabhängige infinitesimale Transformationen enthält, die mit einander vertauschbar sind (vgl. S. 756).

In § 5 und 6 folgen einige Betrachtungen über zwei- und dreigliedrige Gruppen, sie enthalten aber nichts nennenswerthes Neues. In § 7 endlich steht ein Satz, der gänzlich in der Luft schwebt:

„Zwei Raumformen, für welche die in den Gleichungen (6) auftretenden Constanten a*) denselben Werth haben, können stetig so auf einander abgebildet werden, dass diese Beziehung bei jeder Bewegung der einen Raumform bestehen bleibt, wenn gleichzeitig die andere in entsprechender Weise bewegt wird."

Es hat offenbar keinen Zweck, den Sinn dieser Worte ergründen zu wollen.

In seinem 1886er Programm erkannte Killing an, dass „der ganze Inhalt der §§ 3 und 4 seiner frühern Arbeit zuvor von Herrn Lie gefunden und veröffentlicht worden sei", später aber (s. Math. Ann. Bd. 34, S. 58 Anm.) glaubte er, dieses Zugeständniss wieder einschränken zu müssen, indem er hervorhob, dass einige der in diesen Paragraphen enthaltenen kleineren Einzelheiten zuerst von ihm angegeben seien. In Wahrheit verhält es sich so: *Mit Ausnahme des unbewiesenen*

*) Es sind das die c_{iks} in den Gleichungen (21).

Satzes, dass jede Gruppe mit mehr als drei Parametern vertauschbare infinitesimale Transformationen enthält, gehören die richtigen unter den Sätzen jener Paragraphen Lie, die falschen gehören Killing.

In dem soeben erwähnten 1886er Programm stellt Killing in § 2 ohne Beweis einen beachtenswerthen Satz auf, den wir so aussprechen können:

Satz 6. *Sind S und T zwei endliche Transformationen der r-gliedrigen Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$, so gehört die Transformation: $STS^{-1}T^{-1}$ stets der ersten Derivirten der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ an.*

In § 3 leitet er aus den Relationen zwischen den c_{iks} andre Relationen ab, die er in § 5 benutzt, um die Invarianten der zur Adjungirten dualistischen Gruppe zu untersuchen. Die Sätze, die sich dabei ergeben, sind leider sehr unklar gefasst. In § 6 beweist er den Satz, dass in jeder r-gliedrigen Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$, die eine dreigliedrige invariante Untergruppe: $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ ohne vertauschbare infinitesimale Transformationen enthält, $X_4 f \ldots X_r f$ so wählbar sind, dass sie mit $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ vertauschbar werden (vgl. S. 737 f.). Die übrigen Sätze des § 6 sind zum Theil unrichtig formulirt.

Die Arbeit über die Erweiterung des Begriffs der Invarianten haben wir schon auf S. 296 erwähnt, sie enthält kein einziges Ergebniss, das zugleich neu und richtig ist.

Den Ausgangspunkt für die gruppentheoretischen Arbeiten Killings haben seine Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie gebildet, hauptsächlich im Interesse dieser Untersuchungen hat er sich mit der Gruppentheorie beschäftigt. Um so merkwürdiger ist es, dass er seine wirklich werthvollen gruppentheoretischen Arbeiten, nämlich die über Zusammensetzung, in seinen Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie *fast gar nicht* verwerthet und dass seine neueste grosse Abhandlung über die Grundlagen der Geometrie so ziemlich verfehlt ist. Wir haben über diese letztere Arbeit schon auf S. 532 ff. gesprochen, wir begnügen uns daher jetzt mit einer kurzen Bemerkung.

Killing wiederholt ohne wesentliche Aenderung Lies ursprüngliche Begründung von Riemanns Hauptergebniss, dass nämlich, sobald ein quadratisches Bogenelement und ausserdem freie Beweglichkeit im Infinitesimalen vorhanden ist, nur die Euklidischen und die Nichteuklidischen Bewegungen möglich sind. Er rühmt sodann die Einfachheit seiner Begründung und sagt, dass er aus der Lieschen Theorie der Transformationsgruppen nur ein paar Sätze benutzt habe. Er vergisst ganz, dass er sich nicht nur auf Lies Theorie der Aehn-

lichkeit gestützt hat, sondern auch auf das schwierige Theor. 110, S. 614 von Abschn. I.

Lies Begründung der Riemannschen Resultate ist gewiss nicht einfach, auf dem von Lipschitz eingeschlagenen Wege lassen sich diese Resultate in viel elementarerer Weise ableiten; aber das Interesse der Lieschen Begründung liegt auch auf ganz andern Gebieten.

In den bisher besprochenen Killingschen Arbeiten sind nicht allzuviel Ergebnisse enthalten, die richtig und neu sind. *Bewiesen richtig* und *neu* sind noch viel weniger. Wir halten es daher für unnöthig im Einzelnen nachzuweisen, dass Killing vielfach die Beziehungen seiner Untersuchungen zu denen Lies unrichtig darstellt.

Wir kommen jetzt zu den bei Weitem wichtigsten unter Killings Arbeiten, zu seinen allgemeinen Untersuchungen über die Zusammensetzung der endlichen continuirlichen Gruppen. Leider ist auch in diesen Arbeiten die Darstellung unbefriedigend und die Beweise sowie die Sätze sind zum Theil unzuverlässig. Es war deshalb unbedingt nöthig eine Nachprüfung der Killingschen Ergebnisse vorzunehmen. Einige Beiträge zu einer solchen Nachprüfung hatte bereits Engel geliefert, neuerdings aber hat Cartan*) diese Aufgabe, wie es scheint, mit grossem Erfolge in Angriff genommen und hat die Richtigkeit der wichtigsten Ergebnisse, zu denen Killing gelangt war, bestätigt gefunden.

Durch die Relationen:

$$(X_i X_k) = \sum_1^r{}_s c_{iks} X_s f, \tag{21}$$

die zwischen den r unabhängigen infinitesimalen Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe bestehen, war Lie auf den Begriff der Zusammensetzung einer r-gliedrigen Gruppe geführt worden. Die Constanten c_{iks}, die die Zusammensetzung bestimmten, genügten einmal den Relationen:

$$c_{iks} + c_{kis} = 0 \quad (i, k, s = 1 \dots r) \tag{22}$$

und dann den Relationen:

$$\left\{ \sum_1^r{}_\tau (c_{ik\tau} c_{\tau js} + c_{kj\tau} c_{\tau is} + c_{ji\tau} c_{\tau ks}) = 0 \right. \tag{23}$$
$$(i, k, j, s = 1 \dots r).$$

Umgekehrt liess sich nachweisen, dass r^3 Constanten c_{iks}, die den Gleichungen (22) und (23) genügten, stets die Zusammensetzung einer

*) C. R. 1893, Bd. 116, S. 784 u. 962; Leipz. Ber. 1893.

r-gliedrigen Gruppe bestimmten. Demnach war hierdurch die Aufgabe, alle Zusammensetzungen r-gliedriger Gruppen zu finden, auf ein *algebraisches* Problem zurückgeführt, nämlich auf das Problem, alle Systeme von r^3 Constanten c_{iks} zu finden, die den Gleichungen (22) und (23) genügen, und diese Systeme auf möglichst einfache Normalformen zu bringen (vgl. Abschn. I, S. 289 ff. und S. 297 ff.).

Lie selbst hat dieses algebraische Problem nur für kleine Werthe von r (für $r < 7$) behandelt und erledigt, seine allgemeinen Sätze über Zusammensetzung hat er dagegen auf anderm Wege gefunden (vgl. Kap. 28). Erst Killing hat das ganze Problem in voller Allgemeinheit in Angriff genommen und neue Wege zu seiner Behandlung eröffnet. Wenn wir jetzt zur Besprechung dieser Killingschen Untersuchungen übergehen, so müssen wir uns allerdings sehr beschränken; schon der Raum erlaubt uns nicht, mehr zu bieten als eine kurze Uebersicht über ihre wichtigsten Ergebnisse.

Killing geht aus von der Aufgabe, die Lie schon 1876 in Bd. I seines norwegischen Archivs behandelt und erledigt hat, von der Aufgabe nämlich, eine solche zweigliedrige Untergruppe einer r-gliedrigen Gruppe zu finden, der eine gegebene eingliedrige Gruppe: $\Sigma e_k X_k f$ angehört (vgl. Abschn. I, S. 590 f.). Setzt man voraus, dass die eingliedrige Gruppe: $\Sigma c_k X_k f$ nicht die erste Derivirte der betreffenden zweigliedrigen ist, was sie offenbar im Allgemeinen nicht sein wird, so kommt diese Aufgabe darauf hinaus, $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ und ω so zu bestimmen, dass die Gleichung:

$$(24) \qquad \Big(\sum_1^r{}^k e_k X_k f, \quad \sum_1^r{}^j \lambda_j X_j f\Big) = \omega \sum_1^r{}^s \lambda_s X_s f$$

besteht, ohne dass die λ_k den e_k proportional sind. Die Gleichung (24) nun zerlegt sich in die folgenden:

$$(25) \qquad \sum_1^r{}^j \lambda_j \sum_1^r{}^k c_{kjs} e_k = \omega \lambda_s \qquad (s = 1 \ldots r),$$

die nur bestehen können, wenn ω eine Wurzel der Gleichung r-ten Grades:

$$(26) \qquad \Delta = \left| \varepsilon_{js}\,\omega - \sum_k^{1 \ldots r} c_{kjs} e_k \right|_{(j,\, s = 1 \ldots r)} = 0$$

ist. Hat diese Gleichung*) eine von Null verschiedene Wurzel, so

*) Killing nennt sie die charakteristische Gleichung der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$, dabei denkt er sich die e als ganz willkürlich. Haben aber die e_k bestimmte

kann man immer durch geeignete Wahl der λ die Gleichungen (25) befriedigen, ohne dass die λ_k den e_k proportional sind.

Aus dem auf S. 673 Gesagten geht hervor, dass $\omega = 0$ immer eine Wurzel der Gleichung (26) ist, dass also die Determinante Δ die Form:

$$(27) \quad \Delta = \omega^r - \psi_1(e)\omega^{r-1} + \psi_2(e)\omega^{r-2} - \cdots + (-1)^{r-1}\psi_{r-1}(e)\omega$$

besitzt, wo ψ_k eine ganze homogene Function k-ter Ordnung von den e ist. Killing beweist nun, dass die Functionen $\psi_k(e)$ sämmtlich Invarianten*) der adjungirten Gruppe:

$$E_k f = \sum_{js}^{1 \ldots r} c_{jks} e_j \frac{\partial f}{\partial e_s} \quad (k = 1 \ldots r)$$

der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ sind. Er benutzt dazu gewisse Relationen, die er aus den Gleichungen (22) und (23) für die c_{iks} ableitet, etwas einfacher gestaltet sich aber der Beweis, wenn man mit Engel von der Form (26) der Determinante Δ ausgeht, da lässt sich nämlich (vgl. Math. Ann. Bd. 31, S. 262 Anm.) direct durch Benutzung der Gleichungen (22) und (23) zeigen, dass $E_k \Delta \equiv 0$ ist. Uebrigens ist auch von vornherein klar, dass das ω in der Gleichung (24) eine irrationale Invariante der adjungirten Gruppe ist und dass infolgedessen die Coefficienten der Gleichung (27) rationale Invarianten sind.

Auf die Invarianten $\psi_1(e) \ldots \psi_{r-1}(e)$ gründet Killing eine bemerkenswerthe Classification der r-gliedrigen Gruppen. Er sagt nämlich, dass die Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ den *Rang* l habe, wenn sich unter den $r - 1$ Functionen $\psi_1 \ldots \psi_{r-1}$ gerade l von einander unabhängige befinden**). Verschwinden daher die ψ_k für alle Werthe der e identisch, so hat man es mit einer Gruppe vom Range Null zu thun; eine solche Gruppe enthält offenbar lauter zweigliedrige Untergruppen mit vertauschbaren Transformationen. Natürlich ist der Rang einer Gruppe höchstens so gross, wie die Zahl der von einander unabhängigen

---

Werthe, hat man es also mit einer bestimmten Transformation $\Sigma e_k X_k f$ zu thun, so wird man am Besten sagen: die zur Transformation: $\Sigma e_k X_k f$ gehörige charakteristische Gleichung.

*) In seiner auf S. 768, Anm. angeführten Programmarbeit von 1889 theilt Killing gewisse einfacher gebildete Invarianten der adjungirten Gruppe mit, die sich ganz und rational durch die ψ_k und durch die sich wiederum die ψ_k ganz und rational ausdrücken lassen.

**) Zum Beispiel hat die allgemeine projective Gruppe des R_l gerade den Rang l; Killing giebt sehr einfache Ausdrücke für l unabhängige Invarianten der Adjungirten dieser Gruppe und ebenso für die Invarianten der Adjungirten gewisser andrer Gruppen.

Invarianten der adjungirten Gruppe; wenn daher in der Determinante Δ für $\omega = 0$ alle $(m+1)$-reihigen Determinanten verschwinden, nicht aber alle m-reihigen, so ist $l \leqq r - m$. Hieraus ergiebt sich, dass l niemals grösser ist als die Anzahl der verschwindenden Wurzeln der Gleichung (26).

Die Invarianteneigenschaft der Functionen $\psi_k(e)$ führt zu einem einfachen Beweise des Satzes 21, S. 745, den wir damals ohne Beweis mittheilten. Sind nämlich nicht alle $\psi_k(e)$ identisch null, so hat die adjungirte Gruppe offenbar mindestens eine Invariante, die eine homogene Function aber nicht von nullter Ordnung ist; verschwinden andrerseits alle ψ_k identisch, so enthält die Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ nur zweigliedrige Untergruppen mit vertauschbaren Transformationen, die Invarianten ihrer adjungirten Gruppe können daher ebenfalls nicht alle homogen von nullter Ordnung sein.

Killing hat übrigens einen Satz bewiesen, der den eben besprochenen umfasst, er lautet so*):

Satz 7. *Besteht zwischen zwei von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen: $\Sigma e_k X_k f$ und $\Sigma \lambda_j X_j f$ einer r-gliedrigen Gruppe eine Beziehung von der Form:*

$$\Big(\sum_1^r{}_k e_k X_k f, \quad \sum_1^r{}_j \lambda_j X_j f\Big) = \varrho \sum_1^r{}_k e_k X_k f,$$

wo $\varrho \neq 0$ ist, so verschwinden alle Wurzeln der charakteristischen Gleichung, die zu der Transformation $\Sigma e_k X_k f$ gehört.

Ueber die Gruppen vom Range Null hat Killing eine Reihe von Sätzen aufgestellt, die aber zum Theil der Berichtigung bedürfen. Wir erwähnen nur die folgenden: Jede G_r vom Range Null ist integrabel, sie enthält mindestens eine ausgezeichnete infinitesimale Transformation und ihre erste Derivirte ist höchstens $(r-2)$-gliedrig. Die Integrabilität folgt ohne Weiteres daraus, dass jede zweigliedrige Untergruppe von G_r aus paarweise vertauschbaren Transformationen besteht und dass G_r infolgedessen keine dreigliedrige einfache Gruppe enthalten kann (s. Satz 2, S. 757). Aus der Integrabilität ergiebt sich, dass die G_r mindestens eine invariante eingliedrige Untergruppe enthält, und deren infinitesimale Transformation ist augenscheinlich in

*) Einen andern von Engel herrührenden Beweis dieses Satzes hat Umlauf in seiner Dissertation (Ueber die Zusammensetzung der Gruppen, insbesondre der vom Range Null, Leipzig 1891) mitgetheilt (S. 19 ff.). Es wird da direct gezeigt, dass in einer *endlichen* continuirlichen Gruppe eine infinitesimale Transformation Xf niemals zwei zweigliedrigen Untergruppen: Xf, Yf und Xf, Zf derart angehören kann, dass zu gleicher Zeit: $(XY) = Yf$ und: $(XZ) = Xf$ ist.

G_r ausgezeichnet. Den Beweis dafür, dass die erste Derivirte der G_r $(r-2)$-gliedrig ist, lese man in der vorhin angeführten Dissertation von Umlauf nach, in der nach einer von Engel angegebenen Methode die Zusammensetzungen aller Gruppen vom Range Null mit weniger als zehn Parametern aufgestellt sind.

Killing hat ferner die Gruppen untersucht, bei denen die charakteristische Gleichung (26) blos eine verschwindende Wurzel besitzt, es sind das offenbar Gruppen vom Range 1. Unter der Voraussetzung, dass die betreffenden Gruppen ihre eignen ersten Derivirten sind und dass die charakteristische Gleichung keine vielfachen Wurzeln besitzt, beweist er, dass die Gliederzahl r ungerade ist und bestimmt die möglichen Zusammensetzungen. Wir können sein Ergebniss so aussprechen: für $r>3$ ist jede Gruppe von der besprochenen Beschaffenheit gleichzusammengesetzt mit der $(2n+3)$-gliedrigen projectiven Gruppe eines gewissen R_{2n}, bei der die unendlich ferne $(2n-1)$-fach ausgedehnte Ebene E_{2n-1} des R_{2n}, ferner die Volumina und endlich eine möglichst gekrümmte rationale Curve $(2n-1)$-ter Ordnung auf E_{2n-1} invariant bleibt. Auch den Fall vielfacher Wurzeln hat Killing behandelt, jedoch befinden sich da in seinen Entwicklungen einige Lücken, wir gehen deshalb nicht darauf ein.

Wir kommen jetzt zu den allgemeinen Untersuchungen, die Killing zur Bestimmung aller Zusammensetzungen von einfachen Gruppen geführt haben. Wir müssen uns leider versagen, diese Untersuchungen genauer zu besprechen und können nur einige Hauptpunkte herausgreifen.

Killing beweist zunächst den

Satz 8. *Hat die charakteristische Gleichung* (26) *der Gruppe:* $X_1 f \ldots X_r f$ *bei beliebigen Werthen der e gerade m verschwindende Wurzeln, so gehört jede infinitesimale Transformation:* $\Sigma e_k X_k f$ *von allgemeiner Lage einer m-gliedrigen Untergruppe vom Range Null an. Setzt man* $\Sigma e_k X_k f = Y_r f$, *so kann die Gruppe eine solche Form:* $Y_1 f \ldots Y_r f$ *erhalten, dass:* $Y_r f$, $Y_{r-1} f \ldots Y_{r-m+1} f$ *diese m-gliedrige Untergruppe vom Range Null ist und dass Relationen von der Form:*

$$(28) \qquad (Y_{r-k} Y_\mu) = \sum_1^{r-m} {}_\nu c_{k\mu\nu} Y_\nu f \qquad (k = 0, 1 \ldots m-1;\ \mu = 1 \ldots r-m)$$

bestehen, wo die Determinante der $(r-m)^2$ *Constanten:* $c_{0\mu\nu}$ *nicht verschwindet.*

Killing behauptet auch, dass die hier erwähnte m-gliedrige Untergruppe vom Range Null immer dann aus paarweise vertauschbaren Transformationen bestehe, wenn die r-gliedrige Gruppe keine

ausgezeichnete infinitesimale Transformation enthalte. In dem Fall, dass alle nicht verschwindenden Wurzeln der zu $\Sigma e_k X_k f$ gehörigen charakteristischen Gleichung von einander verschieden sind, ist das sehr einfach zu beweisen; ob es aber Killing auch für den Fall mehrfacher Wurzeln wirklich bewiesen hat, das wagen wir nicht zu entscheiden.

Von der in Satz 8 angegebenen Normalform der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ ausgehend, untersucht Killing nun die Beziehungen zwischen den Wurzeln der charakteristischen Gleichung, die zu einer beliebigen Transformation der m-gliedrigen Untergruppe vom Range Null: $Y_r f \ldots Y_{r-m+1} f$ gehört. Unter der Voraussetzung, dass die nicht verschwindenden Wurzeln der zu $Y_r f$ gehörigen charakteristischen Gleichung alle von einander verschieden sind, dass ferner die Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ ihre eigne erste Derivirte*) ist und dass sie überdies keine ausgezeichneten infinitesimalen Transformationen enthält, ergeben sich die merkwürdigsten Beziehungen zwischen diesen Wurzeln. Namentlich ist es überraschend, dass zwischen den $r - m$ nicht verschwindenden Wurzeln m lineare homogene Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten bestehen, die sich nach m von den Wurzeln auflösen lassen. Ausserdem zeigt sich, dass m der Rang der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ ist.

Die gewonnenen Beziehungen zwischen den Wurzeln setzen nun Killing in den Stand, mit Erfolg die Bestimmung aller Zusammensetzungen von einfachen Gruppen in Angriff zu nehmen. Er stützt sich dabei namentlich auf die zuerst von Lipschitz aufgestellten Kriterien für die Periodicität einer linearen homogenen ganzzahligen Substitution und macht so diese algebraischen Untersuchungen für die Theorie der continuirlichen Transformationsgruppen nutzbar. Seine von Cartan bestätigten Ergebnisse gehen dahin, dass es ausser den vier grossen von Lie angegebenen Klassen von einfachen Gruppen (s. S. 682) nur noch eine endliche Zahl Zusammensetzungen von einfachen Gruppen giebt, nämlich noch fünf mit den Gliederzahlen: 14, 52, 78, 133, 248**). Im allgemeinen giebt es für jeden Werth der Zahl l grade vier einfache Gruppen vom Range l, nämlich die vier Gruppen, die den vier Lieschen Klassen angehören, für einzelne Werthe von l verhält sich jedoch die Sache anders. Für $l = 1$ enthält die eine der vier Klassen gar keine Gruppe und die drei andern enthalten drei

*) Killing sagt dafür: sie ist ihre eigne Hauptuntergruppe.

**) Killing führt an, dass es zwei verschiedene Gruppen mit je 52 Parametern giebt, Cartan hat jedoch bemerkt, dass diese beiden Gruppen gleichzusammengesetzt sind.

gleichzusammengesetzte Gruppen. Für $l = 2$ enthält eine der vier Klassen keine einfache Gruppe und die drei andern liefern drei Gruppen, von denen zwei gleichzusammengesetzt sind, dafür giebt es aber noch eine 14-gliedrige einfache Gruppe vom Range 2. Für $l > 3$ liefern die vier Klassen stets lauter verschiedene einfache Gruppen, es kommt aber für $l = 4, 6, 7, 8$ noch je eine singuläre einfache Gruppe hinzu, mit bezüglich 52, 78, 133, 248 Parametern.

Besonderes Interesse haben natürlich die fünf einfachen Gruppen, die für sich allein dastehen und keiner Klasse von unendlich vielen einfachen Gruppen angehören. Killing hat die Zusammensetzung der 14-gliedrigen einfachen Gruppe vollständig und die Zusammensetzungen der übrigen wenigstens theilweise berechnet, er selbst aber hat keine Gruppe von derartiger Zusammensetzung aufgestellt. Für die 14-gliedrige einfache Gruppe haben zuerst Cartan und Engel gleichzeitig zwei Repräsentanten im R_5 veröffentlicht (vgl. S. 763). Cartan hat ferner, wie er in einer demnächst erscheinenden Arbeit*) mittheilt, auch für die vier übrigen Zusammensetzungen Repräsentanten gefunden, die aber noch der Veröffentlichung harren.

Killing hat sich nicht mit der Bestimmung aller Zusammensetzungen von einfachen Gruppen begnügt, sondern auch äusserst wichtige Sätze über die Zusammensetzung beliebiger Gruppen aufgestellt. Obwohl die Beweise dieser Sätze bei Killing nicht mit der nöthigen Strenge geführt sind, so sind doch nach Cartans Angabe glücklicherweise die Sätze richtig. Wir begnügen uns mit der Mittheilung der nachstehenden:

Satz 9. *Enthält die erste Derivirte einer r-gliedrige Gruppe keine dreigliedrige einfache Untergruppe, so hat sie den Rang Null***).

Hieraus folgt, dass die erste Derivirte einer integrabeln Gruppe stets den Rang Null hat. Es ist klar, dass hierdurch die Bestimmung aller r-gliedrigen integrabeln Gruppen auf die Bestimmung aller Gruppen vom Range Null mit weniger als r Parametern zurückgeführt ist. Schon für die Bestimmung aller integrabeln Gruppen mit vier Parametern ist das von wesentlichem Nutzen, wieviel mehr, wenn man die integrabeln Gruppen mit fünf und mehr Parametern sucht (vgl. S. 737).

---

*) Leipz. Ber. 1893, S. 395—420.

**) Hier verdient auch ein Satz erwähnt zu werden, den Cartan allerdings ohne Beweis veröffentlicht hat. Dieser Satz sagt aus, dass die r-gliedrige Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ dann und nur dann integrabel ist, wenn die Function $\psi_2(e)$ für alle Transformationen: $\Sigma e_k X_k f$ der ersten Derivirten der Gruppe verschwindet.

Satz 10. *Jede endliche continuirliche Gruppe G kann auf die Form:*

$$J,\ \mathsf{E}_1 \ldots \mathsf{E}_m$$

gebracht werden, wo $J, \mathsf{E}_1 \ldots \mathsf{E}_m$ *Untergruppen sind, von denen keine zwei eine infinitesimale Transformation gemein haben und deren Gliederzahlen zusammen gleich der Gliederzahl von G sind. Man kann es dabei so einrichten, dass J die grösste in G enthaltene invariante integrable Gruppe ist, dass jede der Gruppen* $\mathsf{E}_1 \ldots \mathsf{E}_m$ *einfach und mindestens dreigliedrig ist und dass jedesmal, wenn* $i \neq k$ *ist, die infinitesimalen Transformationen von* E_i *mit denen von* E_k *vertauschbar sind.*

Dieser Satz, der wesentlich weiter geht als das Theor. 63, S. 704 und der Satz 5, S. 765, ist auch für die Integrationstheorie von sehr grosser Bedeutung.

Endlich hat Killing auch Untersuchungen angestellt über die grössten Untergruppen, die in einer einfachen Gruppe enthalten sein können. Er hat dabei nicht blos die später zu erwähnenden Wernerschen Resultate über die grössten Untergruppen der projectiven Gruppe einer $(n-1)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit zweiten Grades im R_n bestätigt, sondern auch die grössten Untergruppen der projectiven Gruppe des linearen Complexes im R_{2n-1} bestimmt, was Lie bisher nur für den R_3 ausgeführt hatte.

So kurz unser Bericht über diese Killingschen Arbeiten auch ist, so wird der Leser doch daraus erkennen können, dass die Ergebnisse dieser Arbeiten äusserst wichtig sind. Wenn auch die Darstellung und die Beweise Killings an vielen Mängeln leiden, so kann doch Niemand leugnen, dass Killing neue und fruchtbare Methoden geschaffen hat, die die Erledigung des allgemeinen Problems der Bestimmung aller möglichen Zusammensetzungen ausserordentlich gefördert haben.

§ 143.

Study.

Study ist der erste, der den Zusammenhang zwischen den höheren complexen Zahlen und den Transformationsgruppen vollständig aufgeklärt und erschöpfend dargestellt hat*).

Ist: $x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ ein geschlossenes System von complexen Zahlen mit den n Einheiten $e_1 \ldots e_n$, das dem associativen Gesetz gehorcht und für das die Multiplicationsregeln:

*) In der Arbeit: Complexe Zahlen und Transformationsgruppen, Leipz. Ber. 1889, S. 177—228, wieder abgedruckt in den Wiener Monatsheften 1890, S. 312 ff.

$$(29) \qquad e_i e_k = \sum_1^n{}_s \gamma_{iks} e_s \qquad (i, k = 1 \ldots n)$$

gelten, so bilden, wie wir auf S. 750 sahen, die Transformationen:

$$(30) \qquad x_s' = \sum_1^n{}_i \left\{ \sum_1^n{}_k \gamma_{iks} y_k \right\} x_i \qquad (s = 1 \ldots n)$$

mit den n Parametern $y_1 \ldots y_n$ eine einfach transitive lineare homogene Gruppe mit der identischen Transformation und mit paarweise inversen Transformationen. Diese Gruppe ist ihre eigne Parametergruppe, ihre zweite Parametergruppe hat daher die Form:

$$(31) \qquad y_s' = \sum_1^n{}_k \left\{ \sum_1^n{}_i \gamma_{iks} x_i \right\} y_k \qquad (s = 1 \ldots n),$$

wo die x als Parameter aufzufassen sind. Demnach gehören zu jedem derartigen Systeme von n Einheiten zwei reciproke einfach transitive lineare homogene Gruppen, die beide die Parameter in ihren endlichen Gleichungen nur linear und homogen enthalten. Soweit ergab sich alles von selbst, wenn man die ältere Theorie der *Parametergruppen* zu der von Poincaré gemachten Bemerkung hinzunahm.

Study hat nun gezeigt, dass auch umgekehrt zu jedem Paare von reciproken einfach transitiven linearen homogenen Gruppen in n Veränderlichen ein geschlossenes Zahlensystem mit n Einheiten gehört, das dem associativen Principe gehorcht. Er bewies zunächst den folgenden an und für sich bemerkenswerthen

Satz 11*). *Ist:* $X_1 f \ldots X_r f$ *eine* r*-gliedrige lineare homogene Gruppe in den Veränderlichen* $x_1 \ldots x_n$ *und giebt es in* $x_1 \ldots x_n$ *gerade* m *unabhängige lineare homogene infinitesimale Transformationen:* $Y_1 f \ldots Y_m f$*, die mit allen* $X_k f$ *vertauschbar sind, so erzeugen:* $Y_1 f \ldots Y_m f$ *eine* m*-gliedrige lineare homogene Gruppe, deren endliche Gleichungen auf eine solche Form:*

$$(32) \qquad x_i' = \sum_1^n{}_k \left\{ \sum_1^m{}_\mu \varrho_{i\mu k} a_\mu \right\} x_k \qquad (i = 1 \ldots n)$$

gebracht werden können, dass die m *Parameter* $a_1 \ldots a_m$ *der Gruppe nur linear und homogen auftreten.*

---

*) Dieser Satz kann natürlich sofort auf die projectiven Gruppen des R_{n-1} übertragen werden, wichtig ist namentlich, dass er über die Form der reciproken einfach transitiven projectiven Gruppen des R_{n-1} Aufschluss giebt. Bei Study findet man das näher ausgeführt.

Der Beweis dieses Satzes ist sehr einfach. Der Inbegriff aller linearen homogenen Transformationen, die mit allen Transformationen der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ vertauschbar sind, bildet nämlich offenbar eine Gruppe. Nun aber werden alle linearen homogenen Transformationen:

$$x_i' = \sum_1^n{}_k \alpha_{ik} x_k \quad (i = 1 \ldots n), \tag{33}$$

die mit einer gegebenen linearen homogenen Transformation:

$$x_i' = \sum_1^n{}_k c_{ik} x_k \quad (i = 1 \ldots n)$$

vertauschbar sind, durch die linearen homogenen Gleichungen:

$$\sum_1^n{}_i c_{vi} \alpha_{ik} = \sum_1^n{}_i \alpha_{vi} c_{ik} \quad (v, k = 1 \ldots n)$$

zwischen den α_{ik} bestimmt, folglich werden auch alle linearen homogenen Transformationen (33), die mit allen Transformationen der linearen homogenen Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ vertauschbar sind, durch lineare homogene Gleichungen zwischen den α_{ik} bestimmt. Die Gruppe, die von diesen Transformationen gebildet wird, ist demnach continuirlich und wird durch Gleichungen von der Form (32) dargestellt, in denen die Parameter $a_1 \ldots a_m$ der Gruppe nur linear und homogen auftreten. Dass schliesslich diese Gruppe von den im Satze 11 definirten infinitesimalen Transformationen: $Y_1 f \ldots Y_m f$ erzeugt wird, ist unmittelbar klar.

Aus diesem Studyschen Satze folgt sofort, dass jede einfach transitive lineare homogene Gruppe in $x_1 \ldots x_n$, deren reciproke einfach transitive Gruppe ebenfalls linear und homogen ist, die Form:

$$x_i' = \sum_1^n{}_s \left\{ \sum_1^n{}_k h_{iks} u_k \right\} x_s \quad (i = 1 \ldots n) \tag{34}$$

erhalten kann, wo die h_{iks} bestimmte Zahlen sind und die u_k willkürliche Parameter. Die zugehörige reciproke einfach transitive Gruppe kann natürlich auf eine entsprechende Form gebracht werden. Wir werden nun zeigen, dass zu diesen beiden reciproken einfach transitiven Gruppen ein ganz bestimmtes geschlossenes Zahlensystem mit n Einheiten gehört, das dem associativen Principe gehorcht.

Wir können zunächst die Parameter u_k der Gruppe (34) so wählen, dass diese Gruppe ihre eigne Parametergruppe wird. In der That, die Parametergruppe der Gruppe (34) wird durch die Gleichungen:

$$(35) \qquad \sum_1^n{}_i \, h_{\mu i s} u_i' = \sum_{\nu i k}^{1 \ldots n} h_{\mu \nu i} h_{i k s} v_\nu u_k \qquad (\mu, s = 1 \ldots n)$$

bestimmt, die natürlich nach den u_k' auflösbar sind und keine von den u_k' freie Relation liefern; sie kann daher auf Form:

$$(35') \qquad \mathfrak{u}_i' = \sum_1^n{}_s \left\{ \sum_1^n{}_k \, l_{iks} \mathfrak{v}_k \right\} \mathfrak{u}_s \qquad (i = 1 \ldots n)$$

gebracht werden, wo wir, um Verwechselungen vorzubeugen, für u und v $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ geschrieben haben. Diese Parametergruppe (35′) ist nun einfach transitiv und mit der Gruppe (34) gleichzusammengesetzt, sie ist also auch mit ihr ähnlich (s. Abschn. I, S. 407 und 340). Ferner sind beide Gruppen offenbar holoedrisch isomorph auf einander bezogen, wenn man jeder Transformation (34) mit den Parametern u_k die Transformation (35′) mit den Parametern: $\mathfrak{v}_k = u_k$ zuordnet. Nach Abschn. I, S. 425—428 können wir daher sehr leicht eine Transformation finden, vermöge deren beide Gruppen ähnlich sind. Wir brauchen nämlich blos in dem Raume der Gruppe (34) einen Punkt: $x_1^0 \ldots x_n^0$ von allgemeiner Lage auszuwählen und in dem Raume der Gruppe (35′) einen Punkt: $\mathfrak{u}_1^0 \ldots \mathfrak{u}_n^0$ von allgemeiner Lage; eine Transformation von der verlangten Beschaffenheit ist dann die, bei der jeder Punkt:

$$(36) \qquad x_i = \sum_1^n{}_s \left\{ \sum_1^n{}_k \, h_{iks} u_k \right\} x_s^0 \qquad (i = 1 \ldots n)$$

in den Punkt:

$$(37) \qquad \mathfrak{u}_i = \sum_1^n{}_s \left\{ \sum_1^n{}_k \, l_{iks} u_k \right\} \mathfrak{u}_s^0 \qquad (i = 1 \ldots n)$$

übergeht. Die Gleichungen dieser Transformation erhält man daher, wenn man $u_1 \ldots u_n$ aus (36) und (37) wegschafft, die Transformation hat somit die Form:

$$(38) \qquad \mathfrak{u}_i = \sum_1^n{}_s \, \alpha_{is} x_s \qquad (i = 1 \ldots n),$$

das heisst sie ist linear und homogen. Führen wir nunmehr in der Gruppe (35′) an Stelle der $\mathfrak{u}_i$ und $\mathfrak{u}_i'$ vermöge (38) die neuen Veränderlichen x_i und x_i' ein und führen wir ausserdem noch vermöge:

$$\mathfrak{v}_i = \sum_1^n{}_s \, \alpha_{is} w_s \qquad (i = 1 \ldots n)$$

die neuen Parameter $w_1 \ldots w_n$ ein, so erhalten wir eine lineare homogene Gruppe, die ihre eigne Parametergruppe ist (vgl. Abschn. I,

S. 411). Diese Gruppe ist aber offenbar keine andre als die Gruppe (34), nur dass an Stelle der Parameter $u_1 \ldots u_n$ die neuen Parameter $w_1 \ldots w_n$ getreten sind, die natürlich gewisse lineare homogene Functionen von $u_1 \ldots u_n$ sind.

Wir können uns also die Parameter $u_1 \ldots u_n$ der Gruppe (34) *immer so gewählt denken, dass diese Gruppe ihre eigne Parametergruppe ist.* Thun wir das, so werden offenbar die Gleichungen (35) bei der Substitution:

$$u_i' = \sum_1^n{}^s \left\{ \sum_1^n{}^k h_{iks} v_k \right\} u_s \qquad (i = 1 \ldots n)$$

identisch erfüllt, zwischen den h_{iks} bestehen daher die Gleichungen:

$$\sum_1^n{}^i h_{ivk} h_{\mu is} = \sum_1^n{}^i h_{\mu vi} h_{iks} \qquad (\mu, \nu, k, s = 1 \ldots n),$$

diese aber sagen aus, dass das System der n Einheiten $e_1 \ldots e_n$ für das die Multiplicationsregeln:

$$e_i e_k = \sum_1^n{}^s h_{ski} e_s \qquad (i, k = 1 \ldots n)$$

gelten, dem associativen Principe gehorcht. Man sieht das am schnellsten ein, wenn man die lineare homogene Gruppe, die nach S. 750 zu dem Zahlensysteme mit den Multiplicationsregeln:

$$e_i e_k = \sum_1^n{}^s \gamma_{iks} e_s$$

gehört, mit der Gruppe (34) vergleicht, beide Gruppen fallen nämlich zusammen, wenn man $h_{iks} = \gamma_{ski}$ setzt. Damit ist nun der folgende wichtige Satz bewiesen, dessen zweite Hälfte vollständig Studys Eigenthum ist:

Satz 12. *Zwischen den geschlossenen Zahlensystemen mit n Einheiten, die dem associativen Gesetze gehorchen, und den Paaren von reciproken einfach transitiven linearen homogenen Gruppen in n Veränderlichen besteht eine eindeutig umkehrbare Beziehung: zu jedem derartigen Systeme von Einheiten gehört ein ganz bestimmtes Paar von solchen Gruppen und umgekehrt gehört zu jedem Paare von solchen Gruppen ein ganz bestimmtes derartiges System von Einheiten.*

Mit Recht erblickt Study wenn auch nicht den alleinigen, so doch den hauptsächlichsten Nutzen der höhern complexen Zahlen darin, dass sie zur Untersuchung gewisser projectiver Gruppen verwendet werden können; es sind das die einfach transitiven projectiven Gruppen,

die bei geeigneter Wahl der Parameter ihre eignen Parametergruppen werden. Durch Bestimmung aller Systeme von complexen Zahlen mit n Einheiten findet man nämlich nicht blos alle derartigen projectiven Gruppen des R_{n-1} in besonders einfacher Weise, sondern man erhält zugleich für jede dieser Gruppen und für gewisse mit ihr zusammenhängende projective Gruppen eine analytische Darstellung, die an Einfachheit nichts zu wünschen übrig lässt*). Einen ähnlichen, wenn auch minder grossen Vortheil bieten die Systeme von complexen Zahlen bei der Behandlung beliebiger Gruppen, deren beide Parametergruppen bei geeigneter Wahl der Parameter projectiv werden.

Im Zusammenhange hiermit wollen wir noch die merkwürdige Parameterdarstellung erwähnen, die Study für die Gruppe der Euklidischen Bewegungen des gewöhnlichen Raumes gegeben hat. Die Parameter dieser Gruppe lassen sich nicht so wählen, dass beide Parametergruppen projectiv werden. Man kann aber, wie Study gezeigt hat, durch Einführung von acht homogenen Parametern, zwischen denen eine quadratische Relation besteht, der Gruppe eine solche Form geben, dass die Parameter der Bewegung ST, die durch Ausführung der beiden Bewegungen S und T nacheinander entsteht, bilineare Functionen der Parameter von S und T werden, und zwar ist das im Wesentlichen nur auf eine Weise möglich**).

Die übrigen Untersuchungen Studys über höhere complexe Zahlen können hier nicht besprochen werden, da sie keinen gruppentheoretischen Charakter tragen. Dagegen wollen wir noch kurz auf die von Scheffers eingehen, soweit sie mit der Gruppentheorie zusammenhängen.

Scheffers hat eine Reihe von Arbeiten über höhere complexe Zahlen veröffentlicht***). Von diesen lassen wir hier die beiden letzten in den Comptes Rendus unberücksichtigt und erwähnen nur, dass in ihnen eine interessante Verallgemeinerung der Theorie der Functionen gewöhnlicher complexer Zahlen entwickelt wird.

In seiner ersten Arbeit über complexe Zahlen hat Scheffers auf Lies Veranlassung die Zahlensysteme mit drei Einheiten bestimmt,

---

*) Study hat auch gezeigt, wie man die Symbolik der complexen Zahlen benutzen kann, um die Lieschen Sätze über reciproke einfach transitive Gruppen in besonders einfacher Weise abzuleiten und darzustellen (s. Leipz. Ber. 1889, S. 177—184).

**) Leipz. Ber. 1890, S. 341 ff.; Math. Ann. Bd. 39, S. 515 ff.

***) Leipz. Ber. 1889, S. 290 ff. u. 1890, S. 400 ff.; Math. Ann. Bd. 39, S. 293 ff.; C. R. 1893, Bd. 116, S. 1114 u. 1242.

indem er sich auf Lies Bestimmung aller projectiven Gruppen der Ebene stützte. Weit wichtiger sind die zweite und die dritte, in denen jedoch die Gruppentheorie viel mehr zurücktritt. Ausser den allgemeinen Sätzen über den Zusammenhang der Systeme von complexen Zahlen mit gewissen Gruppen wird eigentlich aus der Gruppentheorie nur die von Lie herrührende Eintheilung der Gruppen in integrable und nicht integrable benutzt in Verbindung mit dem Engelschen Satze über die nicht integrabeln Gruppen (s. S. 757). Scheffers erhält dadurch ohne Weiteres eine Eintheilung der Systeme von complexen Zahlen in sogenannte Quaternionsysteme und Nichtquaternionsysteme, jenachdem die zugehörigen Gruppen nicht integrabel oder integrabel sind; er beweist, dass jedes Quaternionsystem mit nicht mehr als acht Einheiten das System der Hamiltonschen Quaternionen enthält. Durch seine Methoden gelangt Scheffers in äusserst einfacher Weise dazu, alle Zahlensysteme in drei, vier und fünf Einheiten aufzustellen, während die von Study angegebene Methode nur die Systeme von vier Einheiten noch in bequemer Weise lieferte, für die mit fünf aber sehr weitläufige Rechnungen verlangte. Auf Näheres können wir uns hier nicht einlassen.

Auch die grosse Arbeit*) von Molien über höhere complexe Zahlen können wir hier nicht besprechen. Nur einen Satz, den Molien beweist, wollen wir erwähnen. Die n-gliedrige Gruppe G_n, die zu einem Zahlensystem mit n Einheiten gehört, enthält nämlich, wie aus den Entwicklungen auf S. 750 f. leicht folgt, immer die infinitesimale Transformation:

$$\sum_1^n x_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu}$$

und infolgedessen zugleich immer eine $(n-1)$-gliedrige invariante Untergruppe G_{n-1}, die der speciellen linearen homogenen Gruppe angehört. Es hat nun, wie schon von Lie betont worden ist (Leipz. Ber. 1889, S. 326), besonderes Interesse alle Zahlensysteme zu kennen, für die diese Gruppe G_{n-1} einfach ist. Diese Frage, deren Beantwortung sich für $n < 9$ ohne Weiteres aus den Lieschen Sätzen über einfache Gruppen ergiebt, hat Molien allgemein beantwortet, indem er gezeigt hat, dass jedes Zahlensystem mit n Einheiten, bei dem die zugehörige Gruppe G_{n-1} einfach ist, gerade $n = m^2$ Einheiten enthält und dass es eine solche Form erhalten kann, dass die zugehörige Gruppe G_n die Parametergruppe der allgemeinen linearen homogenen Gruppe des R_m wird.

*) Math. Ann. Bd. 41. S. 83 ff.

Lie hatte schon 1879 in Bd. 16 der Math. Ann. darauf hingewiesen, dass zwischen der gewöhnlichen Invariantentheorie und seiner Gruppentheorie gewisse Beziehungen bestehen; 1884 machte er in Bd. 24 der Ann. auf S. 545 f. einige nähere Andeutungen über den Zusammenhang zwischen beiden Gebieten. Study hat sehr bald in seinen Veröffentlichungen diesen Zusammenhang auf das schärfste betont, weil er erkannte, wie viel einfacher sich die Begriffe der Invariantentheorie definiren lassen, wenn man von den in der Gruppentheorie entwickelten Begriffen Gebrauch macht. Er hat diesen Gedanken namentlich in seinem Buche über ternäre Formen (Leipzig 1889 bei Teubner) genauer ausgeführt. Wir wollen jedoch hierauf nicht näher eingehen, sondern wenden uns zur Besprechung gewisser Untersuchungen, die Study über projective Gruppen angestellt, die er aber leider, von einigen Andeutungen auf S. 113 seines Buches abgesehen, bisher noch nirgends veröffentlicht hat. Wir benutzen dabei ein von Study zur Verfügung gestelltes Manuscript.

Lie hat schon längst alle projectiven Gruppen des R_n bestimmt, die mit der allgemeinen projectiven Gruppe auf der Geraden gleichzusammengesetzt sind und keine ebene Punktmannigfaltigkeit des R_n in Ruhe lassen. Es sind das, wie sich aus dem Früheren ergiebt (s. S. 187, Satz 2 u. S. 758) keine andern als die dreigliedrigen projectiven Gruppen der möglichst gekrümmten rationalen Curven n-ter Ordnung. Study stellte sich die Aufgabe, überhaupt alle projectiven Gruppen des R_n aufzustellen, die mit der allgemeinen projectiven Gruppe der Geraden gleichzusammengesetzt sind, und fand den schönen Satz, dass bei jeder solchen Gruppe in dem R_n gewisse zu einander windschiefe ebene Mannigfaltigkeiten: E_1, $E_2 \ldots E_q$ invariant bleiben, die so beschaffen sind, dass auf keiner von ihnen eine ebene Mannigfaltigkeit von niedrigerer Dimensionenzahl in Ruhe bleibt und dass die Summe ihrer Stufenzahlen gerade gleich der Stufenzahl $n+1$ des R_n ist. Dieser Satz erlaubt, alle derartigen Gruppen hinzuschreiben; es giebt ihrer offenbar so viel, als es Möglichkeiten giebt, die Zahl $n+1$ als Summe von positiven ganzen Zahlen $\geqq 0$ darzustellen. Vollständig bewiesen hat Study allerdings den Satz nicht, jedoch hat sich Engel durch ähnliche Rechnungen wie die auf S. 758 f. angedeuteten von der Richtigkeit des Satzes überzeugt. Wir sehen aber von der Mittheilung dieses Beweises ab, theils weil er zu lang ist, theils weil wir hoffen, dass sich ein wesentlich einfacherer Beweis finden lassen wird.

Study ist aber hierbei nicht stehen geblieben, er hat sich auch mit den projectiven Gruppen beschäftigt, die mit der allgemeinen pro-

jectiven Gruppe eines beliebigen Raumes gleichzusammengesetzt sind. Für diese Gruppen gilt zweifellos ein ähnlicher Satz wie der oben aufgestellte, es wird daher vor allen Dingen darauf ankommen, unter ihnen alle die aufzustellen, die ihren Raum so transformiren, dass keine ebene Mannigfaltigkeit in Ruhe bleibt. In dem oben erwähnten Manuscript behandelt Study die projectiven Gruppen, die mit der allgemeinen projectiven Gruppe der Ebene und des Raumes und mit gewissen andern projectiven Gruppen gleichzusammengesetzt sind.

Ist eine achtgliedrige projective Gruppe G_8 des R_{N-1} mit der allgemeinen projectiven Gruppe g_8 der Ebene gleichzusammengesetzt und lässt sie keine ebene Mannigfaltigkeit des R_{N-1} in Ruhe, so ist die kleinste krumme Mannigfaltigkeit, die bei ihr invariant bleibt, entweder zweifach oder dreifach ausgedehnt. In der That, die G_8 enthält eine fünfgliedrige integrable Untergruppe G_5, die der fünfgliedrigen projectiven Gruppe eines gewissen Linienelements der Ebene entspricht. Diese G_5 lässt nach S. 681, Satz 7 sicher einen Punkt des R_{N-1} in Ruhe und dieser Punkt nimmt bei der G_8 offenbar entweder ∞^2 oder ∞^3 verschiedene Lagen an, die eine bei der G_8 invariante krumme Mannigfaltigkeit bilden.

Study erledigt nun den Fall vollständig, wo die G_8 durch die kleinste bei ihr invariante krumme Mannigfaltigkeit definirt ist. Wir entnehmen darüber seinem Manuscripte die folgenden Sätze:

Ist eine projective Gruppe G_8 des R_{N-1} mit der allgemeinen projectiven Gruppe g_8 der Ebene gleichzusammengesetzt und lässt sie eine krumme zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit M_2 invariant, durch die sie definirt ist, so hat die ganze Zahl N die Form $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$, wo n eine beliebige positive ganze Zahl > 0 sein kann. Die Mannigfaltigkeit M_2 ist der Schnitt gewisser $(N-2)$-fach ausgedehnter Mannigfaltigkeiten zweiten Grades, sie ist eindeutig umkehrbar auf die Ebene abbildbar und eine rationale sogenannte *Normalfläche* von der Ordnung n^2. Für $n=2$ erhält man zum Beispiel im R_5 eine Fläche vierter Ordnung, von der die Steinersche Fläche eine Projection ist. Die G_8 selbst kann definirt werden als die projective Gruppe, durch die die ∞^{N-1} Curven n-ter Ordnung der Ebene bei der allgemeinen projectiven Gruppe der Ebene transformirt werden.

Ist eine projective G_8 des R_{N-1} gleichzusammengesetzt mit der allgemeinen projectiven Gruppe der Ebene und lässt sie keine zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit invariant, wohl aber eine krumme drei-

fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit M_3, durch die sie definirt ist, so hat N den Werth:

$$\frac{1}{2}(m+1)(n+1)(m+n+2),$$

unter m und n von Null verschiedene positive ganze Zahlen verstanden. Die ∞^3 Punkte von M_3 lassen sich eindeutig umkehrbar auf die ∞^3 Linienelemente der Ebene abbilden, ausserdem ist M_3 von der Ordnung $3mn(m+n)$; M_3 ist der Schnitt gewisser Mannigfaltigkeiten zweiten Grades und enthält zwei invariante Schaaren von je ∞^2 Curven, deren eine aus rationalen Normalcurven n-ter, die andre aus Normalcurven m-ter Ordnung besteht. Die G_8 selbst lässt sich definiren als die projective Gruppe, durch die eine gewisse ebene Mannigfaltigkeit von ∞^{N-1} Connexen der Ebene bei der allgemeinen projectiven Gruppe der Ebene transformirt wird.

In seinem Manuscripte hat Study die Beweise dieser Sätze fast vollständig ausgeführt, wir müssen aber hier auf die Wiedergabe seiner Beweise verzichten, dagegen wollen wir noch einige andre Sätze mittheilen, die Study aufgestellt hat und die sich ebenso wie die ersten beweisen lassen.

Ist eine projective Gruppe G_{15} des R_{N-1} mit der allgemeinen projectiven Gruppe g_{15} des R_3 gleichzusammengesetzt und ist sie durch die kleinste bei ihr invariante Mannigfaltigkeit M_k definirt, so giebt es folgende Möglichkeiten: 1) Die Zahl k hat den Werth 3 und die Punkte von M_3 sind eindeutig umkehrbar auf die Punkte des R_3 abbildbar (rationale Normalräume). 2) Es ist $k=4$ und die Punkte von M_4 entsprechen eindeutig umkehrbar den Geraden des R_3. 3) Es ist $k=5$ und die Punkte von M_5 entsprechen eindeutig umkehrbar entweder den Flächenelementen oder den Linienelementen des R_3. 4) Es ist $k=6$ und die Punkte von M_6 entsprechen eindeutig umkehrbar den Figuren des R_3, die aus einem Punkte, einer hindurchgehenden Geraden und einer durch beide gehenden Ebene bestehen.

Ist eine projective Gruppe G_6 des R_{N-1} mit der projectiven Gruppe g_6 einer Fläche zweiten Grades F_2 im R_3 gleichzusammengesetzt und lässt sie eine krumme zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit M_2 invariant, durch die sie definirt ist, so hat N den Werth $(m+1)(n+1)$. Die M_2 lässt sich eindeutig umkehrbar auf die F_2 abbilden und stimmt überein mit der Fläche, die aus der Theorie gewisser doppelt-binärer Formen entspringt, sie enthält zwei invariante Schaaren von je ∞^1 rationalen Curven, die bezüglich die Ordnungen m und n haben.

Sucht man endlich alle projectiven G_6 des R_{N-1}, die mit der allgemeinen linearen Gruppe g_6 der Ebene gleichzusammengesetzt sind

und die eine M_2 invariant lassen, durch die sie definirt sind, so kommt man folgendermassen zum Ziele: Man betrachte die projective Gruppe g_6 eines Punktes P der Ebene und führe diese Gruppe aus auf die Schaar aller ebenen Curven n-ter Ordnung, die in P einen k-fachen Punkt haben ($k = 1, 2 \ldots n - 1$), auf diese Weise entstehen alle Gruppen G_6 von der verlangten Beschaffenheit. Die M_2 liegt in einem Raume, dessen Stufenzahl $N = k(2n - k + 3)$ ist, und sie besitzt die Ordnung $n^2 - k^2$, sie ist nur „im Allgemeinen" auf die Ebene eindeutig umkehrbar bezogen, da der Punkt P ein Ausnahmepunkt ist.

Es ist klar, dass alle diese Betrachtungen nach mehreren Richtungen hin verallgemeinert werden können. Hoffentlich wird Study bald dazu kommen, sie ausführlich zu veröffentlichen.

§ 144.

Schur.

Die gruppentheoretischen Arbeiten Schurs*) beschäftigen sich in der Hauptsache mit den Grundlagen der Theorie und mit der Aufgabe, alle transitiven Gruppen von gegebener Zusammensetzung zu bestimmen; namentlich bei der Behandlung des letzteren Problems ist Schur zu schönen Ergebnissen gelangt, die nicht blos ein gruppentheoretisches sondern auch ein functionentheoretisches Interesse haben und die sicher noch zu weitern wichtigen Ergebnissen führen werden. Zu bedauern ist, dass Schur die Benutzung des Lieschen Symbols für die infinitesimalen Transformationen grundsätzlich vermeidet und dass er sich nicht enger an die in diesem Werke benutzten Bezeichnungen anschliesst.

In seiner ersten Arbeit behandelt Schur die aus n Einheiten gebildeten complexen Zahlen, er fasst die Addition und die Multiplication solcher Zahlen als Transformationen eines n-fach ausgedehnten Raumes auf und verlangt, dass die Addition dem associativen und dem commutativen Principe gehorche, die Multiplication dem distributiven und associativen. Der gruppentheoretische Theil dieser Arbeit enthält schon gewisse Entwicklungen, die Schur in der Abhandlung „Neue Begründung u. s. w." wesentlich weiter geführt hat.

*) Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Zahlen, Math. Ann. Bd. 33, S. 49 ff. Ueber die kanonische Form der Parametergruppe, Leipz. Ber. 1889, S. 229 ff. Neue Begründung u. s. w., Ann. Bd. 35, S. 161 ff. Die Darstellbarkeit der inf. Trff. transitiver Gruppen durch Quotienten beständig convergenter Potenzreihen, Leipz. Ber. 1890, S. 1 ff. Zur Theorie der endlichen Transformationsgruppen, Ann. Bd. 38, S 263 ff. Functionentheoretisches bei Transformationsgruppen, Ann. Bd 41, S. 509 ff.

Diese letztere Abhandlung erwähnten wir schon auf S. 564. Wir betonten schon damals, dass wir die Voraussetzungen, von denen Schur ausgeht, nicht für zweckmässig halten, denn die blose Annahme, dass eine r-gliedrige Gruppe die identische Transformation enthält, bedeutet noch keine genügende Vereinfachung. In der That macht Schur im Anfange seiner Entwicklungen implicite eine Voraussetzung, die sich zwar, wie er später (Ann. Bd. 41, S. 523. Anm.) hervorhebt, immer durch Einführung neuer Parameter und neuer Veränderlicher erfüllen lässt, deren Beseitigung aber doch die Einfachheit seiner Begründung beeinträchtigt.

Die Hauptergebnisse dieser Arbeit sind die folgenden: Schur zeigt, dass die infinitesimalen Transformationen der kanonischen Parametergruppe einer r-gliedrigen Gruppe von der Zusammensetzung c_{iks} durch gewisse Potenzreihen mit einem endlichen Convergenzgebiete darstellbar sind; diese Potenzreihen sind ziemlich einfach gebildet und sind durch die c_{iks} vollkommen bestimmt*). Ebenso lässt sich überhaupt jede r-gliedrige transitive Gruppe von der Zusammensetzung c_{iks} durch Einführung neuer Veränderlicher auf eine solche Form bringen, dass ihre infinitesimalen Transformationen gewisse Potenzreihen werden, deren Coefficienten nur von den c_{iks} abhängen; allerdings sind diese Potenzreihen ganz wesentlich complicirter. Endlich beschäftigt sich Schur noch mit den r-gliedrigen Gruppen, die die identische Transformation nicht enthalten. Wir müssen jedoch hier darauf verzichten, Genaueres über diese seine Betrachtungen, die entschieden beachtenswerth sind, mitzutheilen.

Durch Scheibner war Schur darauf hingewiesen worden, dass gewisse Zahlencoefficienten, die in seinen Reihenentwicklungen für die infinitesimalen Transformationen der kanonischen Parametergruppe auftreten, mit den Bernouillischen Zahlen in genauem Zusammenhange stehen. Diese Bemerkung führte ihn zu dem merkwürdigen Satze, dass die infinitesimalen Transformationen der kanonischen Parametergruppe als Quotienten beständig convergenter Potenzreihen darstellbar sind, und auf Grund dieses Satzes konnte er nun zeigen, dass jede r-gliedrige transitive Gruppe bei geeigneter Wahl der Veränderlichen eine solche Form erhält, dass ihre infinitesimalen Transformationen Quotienten beständig convergenter Potenzreihen werden. Diese

*) Dieses Ergebniss hatte Schur schon vorher in den Leipz. Ber. von 1889 mitgetheilt; in ihm liegt zugleich ein neuer Beweis für den früher von Lie aufgestellten und bewiesenen Satz, dass jedes System von r^3 Constanten c_{iks}, das die bekannten Relationen erfüllt, die Zusammensetzung gewisser r-gliedriger Gruppen darstellt (vgl. S. 599).

Ergebnisse, die Schur zuerst in den Leipz. Ber. von 1890 veröffentlichte, hat er in seiner Arbeit in Bd. 38 der Ann. noch wesentlich vervollständigt. Er zeigte nämlich, dass man, wenn man die infinitesimalen Transformationen von zwei r-gliedrigen reciproken einfach transitiven Gruppen von der Zusammensetzung c_{iks} kennt, ohne Integration die Aufgabe lösen kann, für jeden Typus (s. Abschn. I, S. 434) von transitiven Gruppen von der Zusammensetzung c_{iks} einen Repräsentanten aufzustellen, das heisst die infinitesimalen Transformationen eines solchen Repräsentanten anzugeben. Lie hatte vorher diese Aufgabe schon gelöst, aber er brauchte dazu, wenn die betreffenden r-gliedrigen Gruppen ausgezeichnete infinitesimale Transformationen enthielten, gewisse Quadraturen, die ihm allerdings auch noch die endlichen Gleichungen der einzelnen Repräsentanten aufzustellen erlaubten (s. S. 664 f.).

Unsre früheren Entwicklungen setzen uns in den Stand, diese Schurschen Sätze wesentlich kürzer abzuleiten, als es auf dem von Schur selbst befolgten Wege möglich ist. Bei der Wichtigkeit dieser Sätze wollen wir auch nachher ihre Ableitung mittheilen. Jetzt werden wir aber noch kurz den übrigen Inhalt seiner Arbeiten besprechen.

In der Arbeit von der wir eben sprachen ist noch besonders beachtenswerth ein analytisch sehr eleganter Beweis, den Schur für den zweiten Theil des ersten Fundamentalsatzes giebt. Dieser Beweis, den wir schon auf S. 564 erwähnten, beruht auf folgenden Ueberlegungen:

Bilden die ∞^r Transformationen:

$$x_i' = f_i(x_1 \dots x_n;\ a_1 \dots a_r) \quad (i = 1 \dots n) \tag{39}$$

eine r-gliedrige Gruppe, folgen also aus (39) und: $x_i'' = f_i(x', b)$ die Gleichungen: $x_i'' = f_i(x, c)$, wo die c_k sich in bekannter Weise:

$$c_k = \varphi_k(a_1 \dots a_r;\ b_1 \dots b_r) \quad (k = 1 \dots r) \tag{40}$$

durch die a und b ausdrücken, so befriedigen die x_i' als Functionen der a betrachtet Differentialgleichungen von der bekannten Form:

$$\xi_{ji}(x_1' \cdots x_n') = \sum_1^r{}_k \alpha_{jk}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} \quad (j = 1 \dots r;\ i = 1 \dots n) \tag{41}$$

und die c_k als Functionen der a betrachtet erfüllen Differentialgleichungen von der Form:

$$\alpha_{j\mu}(c_1 \cdots c_r) = \sum_1^r{}_k \alpha_{jk}(b_1 \cdots b_r) \frac{\partial c_\mu}{\partial b_k} \quad (j, \mu = 1 \dots r), \tag{42}$$

wo die Determinante der α_{jk} nicht identisch verschwindet und wo die r Ausdrücke:

$$\sum_1^n{}_i \xi_{ji}(x_1 \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (j = 1 \ldots r)$$

ebensoviele unabhängige infinitesimale Transformationen darstellen (s. Abschn. I, S. 33, Theor. 3 u. S. 404 f.).

Hat man nun umgekehrt ein System von Differentialgleichungen (41), in dem die ξ_{ji} und die α_{jk} die eben angegebene Beschaffenheit besitzen, und weiss man, dass dieses System unbeschränkt integrabel ist, so kann man aus (41) die x_i' derart als Functionen der a und der x bestimmen, dass sich für $a_k = a_k^0$ ergiebt: $x_i' = x_i$, unter $a_1^0 \ldots a_r^0$ ein Werthsystem von allgemeiner Lage verstanden, und zwar ist das nur in einer Weise möglich, wir können daher annehmen, dass die betreffenden Lösungen die Form (39) besitzen. Unter den gemachten Voraussetzungen sind ferner offenbar auch die Gleichungen (42) unbeschränkt integrabel und bestimmen zusammen mit den Anfangsbedingungen: $c_k = a_k$ für $b_k = a_k^0$ die c_k vollständig. Wir nehmen an, dass die betreffenden Lösungen die Form (40) haben.

Setzen wir nun:

$$x_i'' = f_i(x_1 \ldots x_n;\ c_1 \ldots c_r) \quad (i = 1 \ldots n),$$

so wird:

$$\xi_{ji}(x_1'' \cdots x_n'') = \sum_1^r{}_k \alpha_{jk}(c_1 \cdots c_r) \frac{\partial x_i''}{\partial c_k},$$

also wegen (42):

$$\xi_{ji}(x_1'' \cdots x_n'') = \sum_{k\mu}^{1 \ldots r} \alpha_{j\mu}(b_1 \cdots b_r) \frac{\partial c_k}{\partial b_\mu} \frac{\partial x_i''}{\partial c_k}$$

$$= \sum_1^r{}_\mu \alpha_{j\mu}(b_1 \cdots b_r) \frac{\partial x_i''}{\partial b_\mu}.$$

Da nun x_i'' für $b_k = a_k^0$ die Form $f_i(x, a)$ annimmt, ergiebt sich hieraus:

$$x_i'' = f_i(f_1(x, a) \ldots f_n(x, a);\ b_1 \ldots b_r),$$

wodurch bewiesen ist, dass die Gleichungen (39) unter den gemachten Voraussetzungen eine Gruppe darstellen.

Der vorstehende Beweis ist entschieden sehr einfach und durchsichtig, er hat aber den Nachtheil, dass er sich auf die Integrationstheorie der Differentialgleichungen von der Form (41) stützt und dass er ausserdem die grundlegenden Differentialgleichungen für die Parametergruppe benutzt, während unser Beweis für den zweiten Theil des ersten Funda-

mentalsatzes auf wesentlich elementareren Hülfsmitteln beruht. Ausserdem ist zu bemerken, dass durch die Schurschen Betrachtungen streng genommen nicht der zweite Theil des ersten Fundamentalsatzes bewiesen wird, sondern ein andrer ihm allerdings sehr nahe stehender Satz.

In seiner neuesten gruppentheoretischen Arbeit (Ann. Bd. 41) beschäftigt sich Schur mit der Aufgabe, festzustellen, in wie weit die Fundamentalsätze der Gruppentheorie auch für solche Gruppen gelten, deren endliche Gleichungen nicht durch analytische Functionen dargestellt werden. Namentlich ist sein Ziel, den von Lie ohne Beweis aufgestellten Satz zu beweisen, dass jede transitive reelle Gruppe, deren Gleichungen eine gewisse Anzahl von Differentiationen gestatten, mit einer durch analytische Gleichungen darstellbaren Gruppe ähnlich ist*). Da wir mittlerweile selbst, wenn auch nur kurz auf diese Frage eingegangen sind (s. S. 360 ff.), so mag hier die Mittheilung genügen, dass Schur beweist, dass die r-gliedrige transitive reelle Gruppe: $x_i' = f_i(x, a)$ jedenfalls dann immer in eine durch analytische Gleichungen darstellbare Gruppe überführbar ist, wenn die folgenden Voraussetzungen erfüllt sind: die $f_i(x, a)$ besitzen alle Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung nach den a und die $\varphi_k(a, b)$ besitzen alle Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung nach den b, endlich sind die Ausdrücke:

$$\left[\frac{\partial f_i(x, a)}{\partial a_k}\right]_{a=a^0},$$

in denen $a_1^0 \ldots a_r^0$ ein Werthsystem von allgemeiner Lage bedeutet, je einmal nach $x_1 \ldots x_n$ differentiirbar. Für den Leser bietet die Schursche Abhandlung eine werthvolle Ergänzung unsrer etwas knapp gehaltenen Auseinandersetzungen in Kapitel 19.

Wir wollen jetzt das oben gegebene Versprechen einlösen, wir wollen nämlich die Schurschen Sätze, die wir bisher ohne Beweis mitgetheilt haben, kurz begründen und sie dadurch in Zusammenhang mit unsern sonstigen Entwicklungen bringen. Wir folgen da zum Theil dem Wege, den Engel angegeben hat**).

Sind: $X_1 f \ldots X_r f$ r unabhängige infinitesimale Transformationen, die in den bekannten Beziehungen:

$$(43) \qquad (X_i X_k) = \sum_1^r{}_s c_{iks} X_s f \qquad (i, k = 1 \ldots r)$$

*) Leipz. Ber. 1888, S. 17 und 1890, S. 312.

**) Leipz. Ber. 1891, S. 308 ff. u. 585 ff.

stehen und setzt man $\Sigma e_k X_k f = Xf$, so ist:

$$(44)\quad \left\{ x_i' = x_i + Xx_i + \frac{1}{1.2} XXx_i + \cdots = f_i(x_1 \cdots x_n;\ e_1 \cdots e_r) \right. \quad (i = 1 \ldots n)$$

die kanonische Form der endlichen Gleichungen der von $X_1 f \ldots X_r f$ erzeugten Gruppe, nach dem ersten Fundamentalsatze bestehen daher vermöge (44) Differentialgleichungen von der Form:

$$(45)\quad \frac{\partial x_i'}{\partial e_k} = \sum_1^r{}^j \psi_{jk}(e_1 \cdots e_r)\, \xi_{ji}(x_1' \cdots x_n').$$

Löst man diese Gleichungen nach den ξ_{ji} auf, was immer möglich ist:

$$\xi_{ji}(x_1' \cdots x_n') = \sum_1^r{}^k \alpha_{jk}(e_1 \cdots e_r) \frac{\partial x_i'}{\partial e_k},$$

so sind:

$$A_k f' = \sum_1^r{}^j \alpha_{kj}(e_1 \cdots e_r) \frac{\partial f}{\partial e_j} \quad (k = 1 \ldots r)$$

r unabhängige infinitesimale Transformationen der ersten kanonischen Parametergruppe. Um diese infinitesimalen Transformationen zu finden braucht man daher nur die Functionen ψ_{jk} in den Gleichungen (45) zu bestimmen.

Zu diesem Zwecke setzen wir: $e_k = \lambda_k t$, so dass (44) die Form erhält:

$$(44')\quad x_i' = f_i(x_1 \ldots x_n;\ \lambda_1 t, \ldots,\ \lambda_r t) \quad (i = 1 \ldots n).$$

Dann genügen die x_i' als Functionen der λ den Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial x_i'}{\partial \lambda_k} = \sum_1^r{}^j \Psi_{jk}(\lambda_1 \cdots \lambda_r,\ t)\, \xi_{ji}(x_1' \cdots x_n'),$$

wo offenbar:

$$(46)\quad \Psi_{jk} = t\psi_{jk}(\lambda_1 t, \ldots,\ \lambda_r t)$$

ist, und als Functionen von t genügen sie den Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial x_i'}{\partial t} = \sum_1^r{}^j \lambda_j \xi_{ji}(x').$$

Verstehen wir daher unter F eine willkürliche Function von $x_1 \ldots x_n$ und setzen wir: $F(x_1' \ldots x_n') = F'$, so ist:

$$(47)\quad \frac{\partial F'}{\partial \lambda_k} = \sum_1^r{}^j \Psi_{jk} X_j' F' \quad (k = 1 \ldots r)$$

und:

$$(48)\quad \frac{\partial F'}{\partial t} = \sum_1^r{}^j \lambda_j X_j' F'.$$

Differentiiren wir jetzt (47) nach t und (48) nach λ_k und vergleichen wir die entstehenden Ausdrücke, so ergiebt sich:*)

$$X_k' F' + \sum_{j\mu}^{1\ldots r} \lambda_j \Psi_{\mu k} (X_\mu' X_j' F' - X_j' X_\mu' F') = \sum_1^r {}_j \frac{\partial \Psi_{jk}}{\partial t} X_j' F',$$

eine Gleichung, die wegen (43) und wegen der Unabhängigkeit der infinitesimalen Transformationen: $X_1 f \ldots X_r f$ in die folgenden zerfällt:

$$\frac{\partial \Psi_{sk}}{\partial t} = \varepsilon_{sk} + \sum_1^r {}_j \lambda_j \sum_1^r {}_\mu c_{\mu j s} \Psi_{\mu k} \quad (s, k = 1 \ldots r). \tag{49}$$

Durch diese Differentialgleichungen und durch die aus (46) folgenden Anfangsbedingungen:

$$[\Psi_{sk}]_{t=0} = 0 \quad (s, k = 1 \ldots r) \tag{50}$$

sind die Ψ_{sk} vollständig bestimmt. Man kann daher auch die Ψ_{sk} sofort berechnen und kann sie entweder nach Auflösung einer algebraischen Gleichung durch Exponentialfunctionen ausdrücken — so findet man die von Lie herrührende Darstellung (s. § 125) — oder man kann sie durch beständig convergente Potenzreihen darstellen und gelangt so zu den von Schur aufgestellten Reihen**).

Benutzt man die auf S. 760 eingeführten Abkürzungen, so erhält man für ψ_{sk} die folgende beständig convergente Potenzreihe:

$$\psi_{sk} = \sum_0^\infty {}_\nu \frac{1}{(\nu+1)!} E_{sk}^{(\nu)} \quad (s, k = 1 \ldots r) \tag{51}$$

und da die α_{kj} mit den ψ_{sk} durch die Gleichungen:

$$\sum_1^r {}_s \psi_{sk} \alpha_{sj} = \varepsilon_{kj} \quad (k, j = 1 \ldots r) \tag{52}$$

verbunden sind, so werden die α_{sj} Quotienten beständig convergenter Potenzreihen. Setzt man die Determinante der ψ_{sk} gleich Δ, so bekommt man:

$$A_k f = \sum_1^r {}_j \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \psi_{kj}} \frac{\partial f}{\partial e_j} \quad (k = 1 \ldots r). \tag{53}$$

Aus diesen Quotienten beständig convergenter Potenzreihen kann man endlich mit Schur für die $A_k f$ Potenzreihen mit beschränktem Con-

*) Dieses Verfahren ist im Grunde nur eine analytische Einkleidung der Betrachtungen, die in § 125 in mehr begrifflicher Fassung dargestellt sind; man kann nämlich die dortigen Betrachtungen so umgestalten, dass die Zurückführung des Ausdrucks: $\Sigma \lambda_k X_k f$ auf eine kanonische Form vermieden wird.

**) Die Identität zwischen den Schurschen Potenzreihen und den von Lie angegebenen endlichen Ausdrücken wurde zuerst von Engel bemerkt.

vergenzgebiete herleiten. Beachtet man nämlich, dass die Zahlencoefficienten in der Reihe für ψ_{sk} gerade die Coefficienten der Reihenentwicklung von:

$$\frac{e^x - 1}{x}$$

sind und dass

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{B_1}{2!} x^2 - \frac{B_3}{4!} x^4 + \frac{B_5}{6!} x^6 - \cdots$$

ist, wo B_1, B_3, $B_5 \ldots$ die Bernouillischen Zahlen sind, und berücksichtigt man endlich die von Schur angegebenen Gleichungen (6) auf S. 760, die für die $E_{sk}^{(r)}$ gelten, so erhält man für α_{kj} die Reihenentwicklung:

$$\alpha_{kj} = \sum_0^\infty {}_\nu \lambda_\nu E_{jk}^{(\nu)} \quad (k, j = 1 \ldots r), \tag{54}$$

in der die λ_ν durch die Gleichungen:

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_1 = -\frac{1}{2}, \quad \lambda_{2\nu} = (-1)^{\nu+1} \frac{B_{2\nu-1}}{(2\nu)!}, \quad \lambda_{2\nu+1} = 0$$

definirt sind.

Bisher setzten wir voraus, dass r unabhängige infinitesimale Transformationen: $X_1 f \ldots X_r f$ vorlagen, die in den Beziehungen (43) standen. Jetzt wollen wir die allgemeinere Voraussetzung machen, dass blos r^3 Constanten c_{iks} gegeben sind, die den bekannten Gleichungen:

$$\begin{cases} c_{iks} + c_{kis} = 0 \\ \sum_1^r {}_\tau (c_{ik\tau} c_{\tau js} + c_{kj\tau} c_{\tau is} + c_{ji\tau} c_{\tau ks}) = 0 \end{cases} \tag{55}$$

genügen, und werden zeigen, dass unter dieser Voraussetzung die r infinitesimalen Transformationen (53), die offenbar von einander unabhängig sind, in den Beziehungen:

$$(A_i A_k) = \sum_1^r {}_s c_{iks} A_s f \quad (i, k = 1 \ldots r) \tag{56}$$

stehen und also eine r-gliedrige einfach transitive Gruppe von der Zusammensetzung c_{iks} erzeugen.

Wir denken uns zunächst die Ψ_{sk} aus den Differentialgleichungen (49) und den Anfangsbedingungen (50) bestimmt. Diese Functionen genügen dann auch noch gewissen andern Differentialgleichungen, nämlich den Integrabilitätsbedingungen, die sich aus (47) unter Be-

rücksichtigung von (43) ergeben. In der That, diese Integrabilitätsbedingungen lauten*):

$$(57) \qquad \left\{ \frac{\partial \Psi_{sk}}{\partial \lambda_\mu} - \frac{\partial \Psi_{s\mu}}{\partial \lambda_k} - \sum_{j\tau}^{1\ldots r} c_{j\tau s} \Psi_{jk} \Psi_{\tau\mu} = 0 \right. \qquad (s, k, \mu = 1 \ldots r).$$

Setzt man nun die linken Seiten dieser Gleichungen $= V_{sk\mu}$ und berücksichtigt man, dass die Ψ_{sk} den Differentialgleichungen (49) genügen und dass die c_{iks} in den Beziehungen (55) stehen, so findet man durch eine leichte Rechnung, dass:

$$\frac{\partial V_{sk\mu}}{\partial t} \equiv \sum_{\tau j}^{1\ldots r} \lambda_\tau c_{j\tau s} V_{jk\mu} \qquad (s, k, \mu = 1 \ldots r)$$

ist. Diese Identitäten aber können als Differentialgleichungen für die $V_{sk\mu}$ aufgefasst werden, und da für $t = 0$ offenbar $V_{sk\mu} = 0$ wird, so zeigen sie, dass $V_{sk\mu}$ identisch verschwindet. *Wenn also die Ψ_{sk} den Differentialgleichungen* (49) *und den Anfangsbedingungen* (50) *genügen und wenn die Gleichungen* (55) *bestehen, so erfüllen die Ψ_{sk} auch die Gleichungen* (57) *identisch.*

Sind daher die Gleichungen (55) erfüllt, so genügen die durch (51) definirten Functionen ψ_{sk} den Differentialgleichungen:

$$(57') \qquad \frac{\partial \psi_{sk}}{\partial e_\mu} - \frac{\partial \psi_{s\mu}}{\partial e_k} = \sum_{j\tau}^{1\ldots r} c_{j\tau s} \psi_{jk} \psi_{\tau\mu}.$$

Da nun die Determinante der ψ_{sk} nicht identisch verschwindet, so sind durch die Gleichungen (52) r^2 Functionen α_{kj} bestimmt, die ausserdem auch noch den Gleichungen:

$$(58) \qquad \sum_1^r{}^s \psi_{ks} \alpha_{js} = \varepsilon_{kj} \qquad (k, j = 1 \ldots r)$$

genügen. Differentiirt man die Gleichungen (52) und (58) und verbindet man sie mit (57'), so kann man nach dem Vorgange von Maurer**) durch eine einfache Rechnung zeigen, dass die α_{kj} den Gleichungen:

$$(59) \qquad \left\{ \sum_1^r{}^j \left(\alpha_{ij} \frac{\partial \alpha_{k\mu}}{\partial e_j} - \alpha_{kj} \frac{\partial \alpha_{i\mu}}{\partial e_j} \right) = \sum_1^r{}^s c_{iks} \alpha_{s\mu} \right. \qquad (i, k, \mu = 1 \ldots r)$$

*) Es sind dies die zuerst von Maurer angegebenen Differentialgleichungen (vgl. S. 581).

**) Münchn. Ber. 1888, S. 118.

genügen, dass also die infinitesimalen Transformationen (53) wirklich in den Beziehungen (56) stehen.

Damit ist bewiesen, dass die von Schur angegebenen Ausdrücke (53) wirklich die infinitesimalen Transformationen einer r-gliedrigen einfach transitiven Gruppe von der Zusammensetzung c_{iks} darstellen, und zwar ist dabei nur der Umstand benutzt, dass die c_{iks} den Gleichungen (55) genügen. Wir haben also hierin einen neuen Beweis für die zweite Hälfte des dritten Fundamentalsatzes.

Hierzu noch eine kleine Bemerkung. Aus den Differentialgleichungen (49) folgt:

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_1^r{}^k \lambda_k \Psi_{sk} = \lambda_s + \sum_{j,\mu}^{1\ldots r} \lambda_j c_{\mu j s} \sum_1^r{}^k \lambda_k \Psi_{\mu k},$$

woraus sich wegen der Anfangsbedingungen (50) sofort ergiebt: $\Sigma \lambda_k \Psi_{sk} = \lambda_s t$. Demnach ist:

$$\sum_1^r{}^k e_k \psi_{sk} = e_s \quad (s = 1 \ldots r) \tag{60}$$

und wegen (52) wird zugleich:

$$\sum_1^r{}^s e_s \alpha_{sj} = e_j \quad (j = 1 \ldots r). \tag{61}$$

Die Relationen (61) waren es, die Schur seinerzeit zur Aufstellung der Potenzreihen (54) führten. Schur erkannte nämlich, dass die Functionen α_{js} durch die Differentialgleichungen (59), durch die Relationen (61) und durch die Anfangsbedingungen: $\alpha_{sj} = \varepsilon_{sj}$ für: $e_1 = \ldots = e_r = 0$ vollständig bestimmt sind.

Wir kommen jetzt zur Ableitung des wichtigsten der Schurschen Ergebnisse, nämlich zu dem

Satz 13. *Kennt man in r Veränderlichen $x_1 \ldots x_r$ irgend zwei reciproke einfach transitive Gruppen:*

$$X_k f = \sum_1^r{}^i \xi_{ki}(x_1 \ldots x_r) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \ldots r)$$

und:

$$Z_k f = \sum_1^r{}^i \xi_{ki}(x_1 \ldots x_r) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \ldots r)$$

von der Zusammensetzung c_{iks}, so kann man ohne Integration blos durch algebraische Operationen für jeden Typus r-gliedriger transitiver Gruppen von der Zusammensetzung c_{iks} einen Repräsentanten finden, das heisst

die infinitesimalen Transformationen einer r-gliedrigen transitiven Gruppe angeben, die dem betreffenden Typus angehört.

Schur hat diesen Satz sozusagen zufällig gefunden, er erkannte nämlich zuerst, dass er gilt, wenn: $X_1 f \dots X_r f$ und $Z_1 f \dots Z_r f$ die beiden kanonischen Parametergruppen sind, die zu der Zusammensetzung c_{iks} gehören, erst später bemerkte er, dass seine Formeln auch dann anwendbar blieben, wenn er zwei beliebige reciproke einfach transitive Gruppen benutzte. Engel hat dann gezeigt, dass der Satz unmittelbar aus den Entwicklungen des Kap. 22 von Abschn. I abgeleitet werden kann, indem er zeigte, dass die dort erforderlichen Integrationen erspart werden können, wenn man die Theorie der Hauptlösungen eines vollständigen Systems benutzt; er wurde so unmittelbar zu den von Schur auf ganz anderm Wege gefundenen Formeln geführt (Leipz. Ber. 1891, S. 585 ff.). Hier wollen wir für den Satz einen andern noch viel einfachern Beweis mittheilen, der von Lie herrührt und auf einer Methode beruht, die Lie schon 1874 angedeutet und 1884 in den Math. Ann. (Bd. 25, S. 81 f.) angegeben hat.

Es sei:

$$Y_\mu f = \sum_1^r{}_k \lambda_{\mu k} Z_k f \quad (\mu = 1 \dots r - m)$$

irgend eine $(r - m)$-gliedrige Untergruppe der Gruppe: $Z_1 f \dots Z_r f$ und: $u_1(x) \dots u_m(x)$ seien m unabhängige Invarianten dieser Untergruppe. Aus dem auf S. 662 f. Gesagten ergiebt sich dann, dass unser Satz bewiesen ist, wenn es uns gelingt, ohne Integration r infinitesimale Transformationen in m Veränderlichen anzugeben, bei denen die ∞^m Punkte des R_m genau so unter einander vertauscht werden, wie die unbekannten ∞^m $(r - m)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten:

$$(62) \qquad u_1(x_1 \dots x_r) = \text{const.}, \dots, \quad u_m(x_1 \dots x_r) = \text{const.}$$

des R_r bei den infinitesimalen Transformationen: $X_1 f \dots X_r f$ unter einander vertauscht werden. Um r solche infinitesimale Transformationen zu finden, verfahren wir folgendermassen:

Das $(r - m)$-gliedrige vollständige System:

$$(63) \qquad Y_1 f = 0, \dots, \quad Y_{r-m} f = 0$$

mit den m unabhängigen Lösungen: $u_1 \dots u_m$ gestattet die r infinitesimalen Transformationen: $X_1 f \dots X_r f$, es gestattet daher (vgl. Abschn. I, S. 140, Theor. 20) auch jede infinitesimale Transformation von der Form:

$$(64) \qquad X_k f + \sum_1^{r-m}{}_\mu \chi_{k\mu}(x_1 \dots x_r) Y_\mu f \quad (k = 1 \dots r),$$

welche Functionen der x auch die $\chi_{k\mu}$ sein mögen. Da überdies jede infinitesimale Transformation von der Form: $\Sigma\chi_\mu(x)Y_\mu f$ alle ∞^m Mannigfaltigkeiten (62) in Ruhe lässt, so ist klar, dass die r infinitesimalen Transformationen (64) diese Mannigfaltigkeiten gerade so transformiren wie: $X_1 f \ldots X_r f$. Wir können nun die $\chi_{k\mu}$ immer so bestimmen, dass aus (64) $r - m$ der Differentialquotienten von f verschwinden. Denn nehmen wir an, dass die $r - m$ von einander unabhängigen Gleichungen (63) gerade nach den Differentialquotienten von f nach $x_{m+1} \ldots x_r$ auflösbar sind, so können wir $(r-m)^2$ Functionen $\varrho_{\mu\nu}$ so bestimmen, dass

$$(65)\quad \sum_1^{r-m}{}_\nu \varrho_{\mu\nu}(x) Y_\nu f \equiv \frac{\partial f}{\partial x_{m+\mu}} + \sum_1^m{}_\tau \eta_{\mu\tau}(x_1 \ldots x_r)\frac{\partial f}{\partial x_\tau} \quad (\mu = 1 \ldots r-m)$$

wird, dann aber enthalten die r infinitesimalen Transformationen:

$$(66)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}_k f = X_k f - \sum_{\mu\nu}^{1\ldots r-m} \xi_{k,\,m+\mu}\varrho_{\mu\nu} Y_\nu f \\ \qquad = \sum_1^m{}_\tau \left\{ \xi_{k\tau} - \sum_1^{r-m}{}_\mu \xi_{k,\,m+\mu}\eta_{\mu\tau} \right\} \frac{\partial f}{\partial x_\tau} \\ \qquad\qquad (k = 1 \ldots r) \end{cases}$$

nur noch die Differentialquotienten von f nach $x_1 \ldots x_m$.

Die r infinitesimalen Transformationen: $\mathfrak{X}_1 f \ldots \mathfrak{X}_r f$ vertauschen die ∞^m Mannigfaltigkeiten (62) genau so wie $X_1 f \ldots X_r f$, ausserdem erzeugen sie aber auch noch eine Gruppe. In der That, es ist:

$$(X_i X_k) = \sum_1^r{}_s c_{iks} X_s f,$$

also ergiebt sich, da alle $(X_i Y_\mu)$ identisch verschwinden, dass Relationen von der Form:

$$(\mathfrak{X}_i \mathfrak{X}_k) = \sum_1^r{}_s c_{iks}\mathfrak{X}_s f + \sum_1^{r-m}{}_\mu \chi_{ik\mu}(x) Y_\mu f$$

bestehen. Nun aber sind hier die linken Seiten frei von den Differentialquotienten von f nach $x_{m+1} \ldots x_r$, die rechten müssen es also auch sein, folglich müssen alle $\chi_{ik\mu}$ identisch verschwinden. Demnach bekommen wir die Relationen:

$$(\mathfrak{X}_i \mathfrak{X}_k) = \sum_1^r{}_s c_{iks}\mathfrak{X}_s f,$$

die zeigen, dass $\mathfrak{X}_1 f \ldots \mathfrak{X}_r f$ eine Gruppe erzeugen.

Die Gruppe: $\mathfrak{X}_1 f \ldots \mathfrak{X}_r f$ transformirt die ∞^m Mannigfaltigkeiten (62) genau so wie die Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$, andrerseits transformirt sie die Veränderlichen $x_{m+1} \ldots x_r$ gar nicht. Ertheilen wir daher in: $\mathfrak{X}_1 f \ldots \mathfrak{X}_r f$ den Veränderlichen $x_{m+1} \ldots x_r$ irgend welche Zahlenwerthe von allgemeiner Lage, so erhalten wir in den m Veränderlichen $x_1 \ldots x_m$ eine Gruppe, die die ∞^m Punkte des R_m geradeso transformirt, wie die ∞^m Mannigfaltigkeiten (62) bei der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ transformirt werden. Da wir diese Gruppe ohne Integration gefunden haben, ist somit unser Satz bewiesen.

Wendet man diesen Satz auf den besonderen Fall an, dass die beiden Gruppen $X_k f$ und $Z_k f$ die beiden kanonischen Parametergruppen sind, die zu der Zusammensetzung c_{iks} gehören, und erinnert man sich der auf S. 794 u. 658 abgeleiteten Darstellung für diese beiden Parametergruppen, so erhält man sogleich noch den zuerst von Schur aufgestellten und bewiesenen:

Satz 14. *Jede r-gliedrige transitive Gruppe kann durch geeignete Wahl der Veränderlichen auf eine solche Form gebracht werden, dass ihre infinitesimalen Transformationen Quotienten beständig convergenter Potenzreihen werden.*

Für jede einfach transitive Gruppe giebt es eine ausgezeichnete Form dieser Art, nämlich die zu ihr gehörige kanonische Parametergruppe, die bis auf lineare homogene Transformationen der Veränderlichen eindeutig bestimmt ist (s. S. 657). Für die r-gliedrigen transitiven Gruppen in weniger als r Veränderlichen erhält man dagegen im Allgemeinen mehrere verschiedene Formen. Eine andre Darstellung dieser Gruppen folgt aus Theor. 52, S. 657.

§ 145.

Maurer.

In drei Arbeiten*) hat Maurer gruppentheoretische Fragen behandelt. Leider wird das Verständniss dieser Arbeiten dadurch recht erschwert, dass Maurer ganz neue Bezeichnungen einführt; alles wäre wesentlich kürzer und leichter verständlich geworden, wenn sich Maurer der in diesem Werke eingeführten und sehr wohl durchdachten Bezeichnungsweise angeschlossen hätte. So aber muss man sich erst mühsam neue Bezeichnungen aneignen und ist genöthigt, lange vorbereitende Entwicklungen zu studiren, in denen nichts wesentlich Neues enthalten ist, bevor man das wirklich Neue überhaupt nur ver-

*) Münch. Ber. 1888, S. 103—150; Crelle Bd. 107, S. 89—116 (1890); Math. Ann. Bd. 39, S. 409—440 (1891).

stehen kann. Diese Ausstellung richtet sich übrigens nur gegen Maurers letzte zwei Arbeiten; die erste ist vor dem Erscheinen des ersten Abschnitts der Transformationsgruppen geschrieben, überdies war Maurer damals mit den Lieschen Arbeiten noch nicht genauer bekannt.

Die erste der drei Maurerschen Arbeiten enthält an neuen gruppentheoretischen Ergebnissen allgemeinerer Natur folgende: Erstens die Aufstellung der auf S. 581 erwähnten Differentialgleichungen für die ψ_{kj}, zweitens den auf S. 796 erwähnten Uebergang von diesen Differentialgleichungen zu den dortigen Gleichungen (59) für die infinitesimalen Transformationen der Parametergruppe und drittens eine bemerkenswerthe, wenn auch sehr nahe liegende Umformung der grundlegenden Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial a_i'}{\partial b_k} = \sum_1^r{}_j \psi_{jk}(b)\, \alpha_{ji}(a') \qquad (i, k = 1 \ldots r)$$

der Parametergruppe (s. Abschn. I, S. 404 f.). Wegen der Identitäten:

$$\sum_1^r{}_i \alpha_{ji}(a)\, \psi_{si}(a) \equiv \varepsilon_{js}$$

lassen sich nämlich diese Differentialgleichungen durch das System der Pfaffschen Gleichungen:

$$(67) \qquad \left\{ \sum_1^r{}_i \psi_{si}(a_1' \ldots a_r')\, da_i' = \sum_1^r{}_i \psi_{si}(b_1 \ldots b_r)\, db_i \right. \qquad (s = 1 \ldots r)$$

ersetzen.

Der Hauptzweck der ganzen Arbeit ist aber die Aufstellung der Bedingungen, unter denen alle Invarianten einer r-gliedrigen linearen homogenen Gruppe in n Veränderlichen als Functionen von rationalen Invarianten darstellbar sind. Maurer stützt sich dabei auf einen Satz, den er in seiner Dissertation*) bewiesen hat und der so ausgesprochen werden kann:

Satz 15. *Soll sich der Parameter der eingliedrigen linearen homogenen Gruppe, die von der infinitesimalen linearen homogenen Transformation:*

$$Xf = \sum_{i\,v}^{1 \ldots n} a_{iv} x_v \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

erzeugt wird, so wählen lassen, dass die Coefficienten in den endlichen Gleichungen der Gruppe rationale Functionen dieses Parameters werden,

*) Ueber lineare Substitutionen, Strassburg 1887.

so ist nothwendig und hinreichend, dass entweder alle Wurzeln der Gleichung n-ten Grades:

$$\Delta = |a_{iv} - \varepsilon_{iv}\omega| = 0 \tag{68}$$

verschwinden oder dass für jede m-fache Wurzel dieser Gleichung stets auch alle $(n - m + 1)$-reihigen Unterdeterminanten der Determinante Δ gleich Null werden und dass überdies die Quotienten der Wurzeln der Gleichung: $\Delta = 0$ rationale Zahlen sind.

Auf diesen Satz gestützt beweist Maurer den nachstehenden:

Satz 16. *Gestattet eine rationale homogene Function $F(x_1 \ldots x_n)$ der Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$ gerade r und nicht mehr unabhängige infinitesimale lineare homogene Transformationen:*

$$X_k f = \sum_{iv}^{1 \ldots n} a_{kiv} x_v \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \ldots r),$$

so lassen sich aus diesen r infinitesimalen Transformationen immer r solche von einander unabhängige linear ableiten, die sämmtlich eingliedrige Gruppen von der im vorigen Satze besprochenen Beschaffenheit erzeugen.

Unter den Voraussetzungen dieses Satzes erzeugen natürlich $X_1 f \ldots X_r f$ eine r-gliedrige lineare homogene Gruppe. Diese Gruppe enthält r eingliedrige Gruppen, deren infinitesimale Transformationen von einander unabhängig sind und deren Parameter so gewählt werden können, dass die Coefficienten ihrer endlichen Gleichungen rationale Functionen je eines Parameters werden. Hieraus folgt*), dass die endlichen Gleichungen der betreffenden r-gliedrigen Gruppe in einer solchen Form darstellbar sind, dass ihre Coefficienten rationale Functionen der r Parameter der Gruppe werden. Die r-gliedrige Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ hat demnach offenbar ebensoviele unabhängige rationale Invarianten, als sie überhaupt unabhängige Invarianten besitzt. Dem von Maurer herrührenden Satze, der hiermit bewiesen ist, können wir die folgende Fassung geben:

Satz 17. *Soll eine r-gliedrige intransitive lineare homogene Gruppe in n Veränderlichen ebenso viele unabhängige rationale Invarianten haben als sie überhaupt unabhängige Invarianten besitzt, so ist nothwendig und hinreichend, dass sie r unabhängige infinitesimale Transformationen enthält, die eingliedrige Gruppen von der in Satz 15 besprochenen Beschaffen-*

*) Maurer beweist direct, dass die allgemeinste Transformation der r-gliedrigen linearen homogenen Gruppe erhalten wird, wenn man diese r eingliedrigen Untergruppen nach einander ausführt. Viel kürzer lässt sich das aber und zwar für beliebige Gruppen beweisen, wenn man sich auf Abschn. I, S. 65, Satz 4 stützt und in der dort auf S. 76 angegebenen Weise verfährt.

heit erzeugen; die Coefficienten der endlichen Gleichungen der Gruppe lassen sich dann als rationale Functionen von r Parametern darstellen.

Wir gehen jetzt gleich zu der dritten Arbeit Maurers über, weil die mit der eben besprochenen in sehr engem Zusammenhange steht. Maurer sucht darin festzustellen, welchen Bedingungen eine gegebene Zusammensetzung c_{iks} genügen muss, damit es r-gliedrige Gruppen von der Zusammensetzung c_{iks} giebt, deren endliche Gleichungen sowohl in den Veränderlichen als in den Parametern algebraisch sind; es ist ihm aber nur gelungen, die nothwendigen Bedingungen aufzufinden, sein Beweis, dass die gefundenen nothwendigen Bedingungen auch hinreichend sind, ist unzureichend.

Nach einigen einleitenden Betrachtungen beweist Maurer den Satz, dass jede r-gliedrige Gruppe G_r dadurch erhalten werden kann, dass man r geeignete ihrer eingliedrigen Untergruppen nach einander ausführt. Dieser Satz ist an und für sich nicht besonders merkwürdig und sein Beweis kann viel kürzer und einfacher geführt werden (vgl. die Anm. auf S. 802), sehr sinnreich ist aber das Verfahren, das Maurer bei dem Beweise dieses Satzes benutzt, um die infinitesimalen Transformationen der zweiten Parametergruppe der Gruppe G_r zu berechnen. Wir wollen sein Verfahren kurz auseinandersetzen, natürlich mit unsern gewohnten Bezeichnungen.

Es sei: $X_1 f \ldots X_r f$ im R_n eine r-gliedrige Gruppe von der Zusammensetzung c_{iks} und:

$$x_i^{(\mu)} = f_i^{(\mu)}(x_1^{(\mu-1)} \ldots x_n^{(\mu-1)};\ u_\mu) \quad (i = 1 \ldots n) \tag{69}$$

seien die kanonischen endlichen Gleichungen der von $X_\mu f$ erzeugten eingliedrigen Gruppe, ferner seien:

$$e_k^{(\mu)} = \sum_1^r{}_j \varrho_{kj}^{(\mu)}(u_\mu) e_j^{(\mu-1)} \quad (k = 1 \ldots r) \tag{70}$$

die kanonischen endlichen Gleichungen der eingliedrigen Untergruppe: $E_\mu f$ der adjungirten Gruppe. Dann bestehen vermöge (69) Relationen von der Form:

$$X_j^{(\mu-1)} f = \sum_1^r{}_k \varrho_{kj}^{(\mu)}(u_\mu)\, X_k^{(\mu)} f \quad (j = 1 \ldots r),$$

wo wie gewöhnlich:

$$X_j^{(\mu)} f = \sum_1^n{}_i \xi_{ji}(x_1^{(\mu)} \ldots x_n^{(\mu)}) \frac{\partial f}{\partial x_i^{(\mu)}}$$

gesetzt ist.

Wir lösen die letzten Gleichungen nach den $X_k^{(\mu)} f$ auf:

$$(71) \qquad X_k^{(\mu)} f = \sum_1^r{}_j \varrho_{jk}^{(\mu)}(-u_\mu) X_j^{(\mu-1)} f \quad (k = 1 \ldots r),$$

setzen μ der Reihe nach gleich $1, 2 \ldots \mu$ und schaffen $X_j^{(1)} f \ldots X_j^{(\mu-1)} f$ weg; dadurch bekommen wir Gleichungen von der Form:

$$(72) \qquad X_k^{(\mu)} f = \sum_1^r{}_j \Theta_{jk}^{(\mu)}(u_1 \ldots u_\mu) X_j f \quad (k = 1 \ldots r)$$

wo für $x_i^{(0)}$ kurz x_i geschrieben ist und wo sich die Θ in sehr einfacher Weise aus den ϱ_{jk} zusammensetzen*).

Die Gleichungen (72) sind eine Folge der Gleichungen, die man aus (69) erhält, wenn man μ der Reihe nach $= 1, 2 \ldots \mu$ setzt und dann die $x_i^{(1)} \ldots x_i^{(\mu-1)}$ wegschafft. Für $\mu = r$ erhält man aber auf diese Weise aus (69) gerade die allgemeine Transformation:

$$(73) \qquad x_i^{(r)} = f_i(x_1 \ldots x_n;\ u_1 \ldots u_r) \quad (i = 1 \ldots n)$$

der r-gliedrigen Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$, also sind die Gleichungen (72) für $\mu = r$ eine Folge der Gleichungen (73). Nun aber ist, wie die Entstehung der Gleichungen (73) zeigt:

$$\frac{\partial x_i^{(r)}}{\partial u_\mu} = \sum_1^n{}_\tau \frac{\partial x_i^{(r)}}{\partial x_\tau^{(\mu)}} \frac{\partial x_\tau^{(\mu)}}{\partial u_\mu},$$

also, da (69) die kanonische Form der eingliedrigen Gruppe $X_\mu f$ ist:

$$(74) \qquad \frac{\partial x_i^{(r)}}{\partial u_\mu} = \sum_1^n{}_\tau \frac{\partial x_i^{(r)}}{\partial x_\tau^{(\mu)}} \xi_{\mu\tau}(x^{(\mu)}),$$

andrerseits lassen sich die Gleichungen (72) in die folgenden zerlegen:

$$(72') \qquad \xi_{k\tau}(x^{(\mu)}) = \sum_1^r{}_j \sum_1^n{}_\nu \Theta_{jk}^{(\mu)}(u_1 \ldots u_\mu) \frac{\partial x_\tau^{(\mu)}}{\partial x_\nu} \xi_{j\nu}(x),$$

also ergiebt sich aus (74):

$$(75) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x_i^{(r)}}{\partial u_\mu} = \displaystyle\sum_1^r{}_j \sum_1^n{}_\nu \Theta_{j\mu}^{(\mu)}(u_1 \ldots u_\mu) \frac{\partial x_i^{(r)}}{\partial x_\nu} \xi_{j\nu}(x) \\ (i = 1 \ldots n;\ \mu = 1 \ldots r), \end{cases}$$

das heisst die $x_i^{(r)}$ in den Gleichungen (73) genügen als Functionen der x und der u betrachtet den Differentialgleichungen (75).

Es ist leicht, die Gleichungen (75) auf eine uns bekannte Form zu bringen; sie zeigen nämlich, dass in (73) die x als Functionen der u betrachtet den Differentialgleichungen:

*) Man sieht das am Besten ein, wenn man die Gleichungen (71) für $\mu = 1, 2 \ldots$ geradezu als lineare homogene Substitutionen auffasst, die nach einander ausgeführt werden.

$$\frac{\partial x_\nu}{\partial u_\mu} = -\sum_1^r{}^j \Theta_{j\mu}^{(\mu)}(u_1 \ldots u_\mu)\, \xi_{j\nu}(x)$$

genügen, und das sind, wenn man $\Theta_{j\mu}^{(\mu)} = -\vartheta_{j\mu}$ setzt, genau die Differentialgleichungen des Theor. 4 auf S. 43 von Abschn. I. Das eben auseinandergesetzte Verfahren liefert daher in sehr einfacher Weise die Functionen ϑ_{jk}, die zu der Form (73) der endlichen Gleichungen der Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ gehören, und zwar ausgedrückt durch die Coefficienten in den eingliedrigen Untergruppen (70) der adjungirten Gruppe: $E_1 f \ldots E_r f$. Schliesslich ist noch zu bemerken, dass man aus den $\vartheta_{j\mu}$ sofort die infinitesimalen Transformationen:

$$B_k f = \sum_1^r{}^j \beta_{kj}(u_1 \ldots u_r) \frac{\partial f}{\partial u_j} \quad (k = 1 \ldots r)$$

der zweiten Parametergruppe der Gruppe (73) berechnen kann, es ist nämlich:

$$\sum_1^r{}^j \vartheta_{kj} \beta_{sj} = \varepsilon_{ks} \quad (k = 1 \ldots r),$$

woraus man die β_{js} durch Auflösung erhält. Den Beweis hierfür überlassen wir dem Leser, er ergiebt sich ohne Schwierigkeit aus den Entwicklungen der §§ 108 und 122.

Diese von Maurer herrührende Darstellung für die infinitesimalen Transformationen der zweiten Parametergruppe*) einer r-gliedrigen Gruppe, die durch Nacheinanderausführung von r ihrer eingliedrigen Untergruppen gebildet ist, hat nicht geringes Interesse; sie ist ein Seitenstück zu der in § 124 und 125 gegebenen Darstellung der infinitesimalen Transformationen der beiden kanonischen Parametergruppen. Uebrigens ist klar, dass man in ähnlicher Weise auch die infinitesimalen Transformationen der ersten Parametergruppe der Gruppe (73) bilden kann.

Nun zu Maurers Untersuchungen über algebraische Gruppen.

Die r-gliedrige Gruppe: $x_i' = f_i(x, a)$ sei algebraisch, die f_i seien also algebraische Functionen sowohl von den x als von den a. Dann sind offenbar auch die infinitesimalen Transformationen der Gruppe algebraisch, bilden wir daher nach Anleitung von Abschn. I, S. 270 f. die endlichen Gleichungen:

*) Maurer sagt, dass Lie diese Gruppe die Parametergruppe der Gruppe (73) nenne, das beruht jedoch auf einer Verwechselung; die bei Maurer auftretende Gruppe ist nämlich nicht die in Abschn. I als Parametergruppe bezeichnete Gruppe, sondern sie ist die jetzt so genannte *zweite* Parametergruppe.

$$(76) \qquad e_k' = \sum_1^r{}_j \varrho_{kj}(a_1 \ldots a_r) e_j \qquad (k = 1 \ldots r)$$

der zu unsrer Gruppe gehörigen Adjungirten, so werden auch die $\varrho_{kj}(a)$ algebraische Functionen ihrer Argumente. Demnach kann es algebraische Gruppen von einer gegebenen Zusammensetzung c_{iks} nur dann geben, wenn die endlichen Gleichungen der zu der Zusammensetzung c_{iks} gehörigen (vgl. S. 671) adjungirten Gruppe:

$$E_k f = \sum_{js}^{1 \ldots r} c_{jks} e_j \frac{\partial f}{\partial e_s}$$

eine solche Form (76) erhalten können, dass die ϱ_{kj} algebraische Functionen ihrer Argumente werden.

Maurer giebt dieser nothwendigen Bedingung noch eine andre Form. Da nämlich die adjungirte Gruppe: $E_1 f \ldots E_r f$ immer intransitiv ist (s. S. 673), so gelingt es ihm auf Grund seines Satzes 17 S. 802 leicht nachzuweisen, dass die endlichen Gleichungen der adjungirten Gruppe nur dann die erforderliche Form erhalten können, wenn ihre Gliederzahl genau so gross ist, wie die Zahl der in ihr enthaltenen unabhängigen infinitesimalen Transformationen, die den Bedingungen des Satzes 15, S. 801 genügen. Die adjungirte Gruppe lässt sich demnach in diesem Falle sogar auf eine solche Form bringen, dass die ϱ_{kj} rationale Functionen ihrer Argumente werden.

Ist nun aber diese nothwendige Bedingung auch hinreichend, giebt es wirklich immer, wenn die adjungirte Gruppe: $E_1 f \ldots E_r f$ die angegebene Beschaffenheit besitzt, r-gliedrige algebraische Gruppen von der Zusammensetzung c_{iks}? Maurer bejaht diese Frage, aber sein Beweis dafür ist nicht stichhaltig.

Er benutzt nämlich*), so können wir es ausdrücken, bei seinem Beweise den Satz, dass jede r-gliedrige Gruppe, die gerade m unabhängige ausgezeichnete infinitesimale Transformationen enthält, eine solche Form: $X_1 f \ldots X_r f$ erhalten könne, dass $X_1 f \ldots X_m f$ ausgezeichnete infinitesimale Transformationen seien, während $X_{m+1} f \ldots X_r f$ eine $(r - m)$-gliedrige Untergruppe erzeugen. Dieser Satz ist aber unrichtig, wie schon die dreigliedrige Gruppe auf S. 295 von Abschn. I zeigt.

In der That enthalten auch die Ueberlegungen, die Maurer zu diesem Satze führen, einen Fehler. Auf S. 433 seiner Arbeit sagt er nämlich ohne Weiteres, dass $\overline{P}_\lambda^\mu$ immer dann $= \varepsilon_{\lambda\mu}$ sei, wenn

*) Auf diesen Umstand hat Schur seinerzeit brieflich aufmerksam gemacht.

eine der beiden Zahlen λ und $\mu \leqq m - m_1$ sei, während er nur bewiesen hat, dass es für $\mu \leqq m - m_1$ immer $= \varepsilon_{\lambda\mu}$ ist. Die eben erwähnte dreigliedrige Gruppe zeigt auch wirklich sofort, dass $\overline{P_\lambda}^\mu$ für $\lambda \leqq m - m_1$ nicht $= \varepsilon_{\lambda\mu}$ zu sein braucht. Die Schlüsse, die Maurer auf S. 438 seiner Arbeit zieht, werden infolgedessen hinfällig.

Die im Crelleschen Journal erschienene Arbeit Maurers können wir hier nicht besprechen, da uns das zu weit führen würde. Man wird aber auch schon daraus, dass wir auf die beiden andern Arbeiten so ausführlich eingegangen sind, erkennen, dass wir seine Arbeiten schätzen.

§ 146.

Verschiedene.

Hier sind zunächst einige Dissertationen zu besprechen, die in Leipzig entstanden sind und Schüler Lies zu Verfassern haben. Sie behandeln Aufgaben, die Lie gestellt hatte und durch deren Lösung verschiedene wichtige Fragen beantwortet werden sollten.

Um festzustellen, was für r-gliedrige einfache Gruppen es giebt, die Untergruppen mit $r - 4$ aber keine mit mehr Parametern enthalten, war es nöthig (vgl. S. 684 f.) alle endlichen continuirlichen *primitiven* Gruppen des R_4 zu bestimmen. Diese Aufgabe wurde Page gestellt; ihre Lösung war vorbereitet erstens durch die von Lie ausgeführte Bestimmung zweier Klassen von primitiven Gruppen des R_n (s. Abschn. I, Kap. 29 u. III, Kap. 17) und zweitens durch die Bestimmung aller projectiven Gruppen des R_3. Ist nämlich G_r eine primitive Gruppe des R_4 und hält man einen Punkt P von allgemeiner Lage fest, so wird der ebene R_3 der ∞^3 Linienelemente durch P durch eine projective Gruppe transformirt; diese projective Gruppe darf aber jedenfalls kein Linienelement und, wie aus der Theorie des Pfaffschen Problems folgt, auch kein ebenes Bündel von ∞^2 Linienelementen in Ruhe lassen, es kommen also von vornherein nur die projectiven Gruppen des R_3 in Betracht, die weder einen Punkt noch eine Ebene des R_3 in Ruhe lassen (s. Kap. 13). Demnach konnten für alle noch etwa vorhandenen primitiven Gruppen des R_4 sofort die Glieder erster Ordnung in den Reihenentwicklungen der infinitesimalen Transformationen, die einen Punkt von allgemeiner Lage invariant lassen, hingeschrieben werden und es handelte sich nur noch darum, jedesmal die Anfangsglieder der infinitesimalen Transformationen höherer Ordnung zu bestimmen und die Zusammensetzung der Gruppe zu ermitteln, denn dann musste sich entweder herausstellen, dass man es nicht mit

einer primitiven Gruppe zu thun hatte, oder man konnte die Gruppe, wenn sie wirklich primitiv war, auf Grund der in Kap. 28 von Abschn. I entwickelten Sätze auf eine Normalform bringen.

Die hierzu erforderlichen Rechnungen hat Page*) mit Geschick durchgeführt und es stellte sich heraus, dass es im R_4 ausser den elf primitiven Gruppen, deren Existenz von vornherein feststand, keine andern endlichen continuirlichen primitiven Gruppen giebt. Da unter diesen elf Gruppen nur eine einfache enthalten war, die als Gruppe von Punkttransformationen in keinem Raume von weniger als vier Dimensionen existirt, so konnte jetzt Lie seinen früheren Sätzen über einfache Gruppen (s. S. 685 f.) diesen hinzufügen (vgl. Leipz. Ber. 1888, S. 18):

Satz 18. *Enthält eine r-gliedrige einfache Gruppe Untergruppen mit $r-4$ Parametern, aber keine mit mehr als $r-4$, so ist sie mit der allgemeinen projectiven Gruppe des R_4 gleichzusammengesetzt.*

Auch zu den Theoremen auf S. 691 liess sich ein neues hinzufügen, das wir wohl nicht erst zu formuliren brauchen.

Wie so oft, wenn es sich darum handelt nachzuweisen, dass es etwas nicht giebt, so war es auch hier für Page am schwierigsten nachzuweisen, dass es im R_4 keine primitiven Gruppen giebt, bei denen mit jedem festgehaltenen Punkte von allgemeiner Lage zugleich ein ebenes Büschel von ∞^1 Linienelementen durch den Punkt in Ruhe bleibt. Die weitläufigen Rechnungen, die zur Erledigung dieses Falles nothwendig waren, hat Page nur zum Theile veröffentlicht; sie sind auch mittlerweile durch den von Engel aufgestellten Satz (s. S. 761 f.) entbehrlich geworden, denn dieser Satz zeigt unmittelbar, dass eine Gruppe des R_4 von der hier betrachteten Beschaffenheit niemals primitiv sein kann. Die Zahl der zu berücksichtigenden Fälle wird dadurch wesentlich verringert, denn unter den projectiven Gruppen des R_3, die nach S. 807 in Frage kommen, sind auch alle die auszuschliessen, die eine Gerade invariant lassen, es bleiben also nur vier Fälle übrig (s. S. 226, Theor. 11 u. S. 236, Satz 2), von denen zwei bereits durch Lie erledigt waren.

In den Math. Ann. Bd. 25, S. 135 hatte Lie die Vermuthung aufgestellt, dass es stets, wenn eine einfache G_r eine G_{r-m}, aber keine Untergruppe mit mehr als $r-m$ Parametern enthalte, im R_m eine projective mit G_r gleichzusammengesetzte Gruppe gebe. Im Jahre 1886 erklärte er aber (Ges. d. Wiss. zu Kristiania), dass diese Vermuthung

*) Leipziger Dissertation, Amer. Journal Bd. 10 (1888).

unzutreffend sei, da sie für $n > 5$ bei der projectiven Gruppe einer Mannigfaltigkeit zweiten Grades im R_n unrichtig zu sein scheine. Um diese, namentlich für die Integralrechnung wichtige Frage zu entscheiden, stellte er Werner die Aufgabe, die grössten Untergruppen der genannten Gruppe zu bestimmen*), und Werner hat diese immerhin nicht ganz einfache Aufgabe mit Lies Unterstützung vollständig erledigt**). Seine bald darauf von Killing bestätigten Ergebnisse kommen auf Folgendes hinaus:

Die continuirliche projective Gruppe G_N einer nicht ausgearteten Mannigfaltigkeit zweiten Grades im R_n enthält, wenn $n = 4$ oder > 5 ist, keine Untergruppen mit mehr als $N - (n - 1)$ Parametern und zwar sind im Allgemeinen alle Untergruppen von G_N mit gerade $N - (n - 1)$ Parametern innerhalb G_N mit einander gleichberechtigt und dadurch gekennzeichnet, dass bei jeder von ihnen ein gewisser Punkt der Mannigfaltigkeit in Ruhe bleibt. Nur in den Fällen $n = 4$ und $n = 7$ giebt es noch einen zweiten Typus von $(N - n + 1)$-gliedrigen Untergruppen der G_N; dieser zweite Typus ist dadurch charakterisirt, dass bei jeder ihm angehörigen Untergruppe eine grösste ebene Mannigfaltigkeit auf der Mannigfaltigkeit zweiten Grades in Ruhe bleibt. Ist dagegen $n = 3$ oder $= 5$, so enthält G_N auch noch Untergruppen mit $N - (n - 2)$ Parametern, diese sind alle innerhalb G_N mit einander gleichberechtigt und bei jeder von ihnen behält eine grösste ebene Mannigfaltigkeit auf der Mannigfaltigkeit zweiten Grades ihre Lage.

Die entsprechenden Sätze über die grössten Untergruppen der conformen Gruppe des R_{n-1} (vgl. S. 357) übergehen wir.

In der Ebene giebt es nur drei Typen von irreducibeln Berührungstransformationsgruppen, im R_3 ist aber die Zahl dieser Gruppen beträchtlich grösser. Eine sehr wichtige Klasse von solchen Gruppen hatte Lie schon bestimmt (s. Abschn. II, Kap. 25). Um die Erledigung des Problems zu fördern, stellte er Scheffers die Aufgabe, im R_3 alle irreducibeln Gruppen von Berührungstransformationen zu bestimmen, bei denen eine Schaar von ∞^1 partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\Phi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = \text{const.}$$

invariant bleibt. Scheffers hat diese Aufgabe nach einer von Lie

*) Für $n \leq 5$ waren übrigens diese grössten Untergruppen schon längst von Lie bestimmt worden.

**) Leipziger Dissertation 1889, s. Math. Ann. Bd. 35, S. 113—160.

angegebenen Methode gelöst*), der ganze Gegenstand liegt aber dem wesentlichen Inhalte dieses Werkes so fern, dass wir auf die werthvolle Arbeit von Scheffers hier nicht näher eingehen können.

Von Leipziger Dissertationen erwähnen wir ferner die schöne Arbeit von Żorawski über Biegungsinvarianten (1891, s. Acta. math. Bd. 16), die allerdings ganz in das Gebiet der Differentialinvarianten gehört und daher nur kurz berührt werden kann. Lie hatte gezeigt, dass die Gauss-Mindingsche Theorie der Abwicklung von Flächen als die Invariantentheorie einer unendlichen Gruppe aufgefasst werden kann, und veranlasste nun Żorawski, die Zahl der von einander unabhängigen Differentialinvarianten der verschiedenen Ordnungen zu bestimmen. Die hierzu erforderlichen recht grossen Rechnungen hat Żorawski mit grossem Geschick durchgeführt. In dem Werke über Differentialinvarianten werden wir bei der Besprechung der bekannten Untersuchungen Lamés und namentlich Beltramis auch auf die Arbeit von Żorawski zurückkommen.

Endlich nennen wir noch die Leipziger Dissertationen von Umlauf und Knothe. Die erste, die von Engel veranlasst worden ist, haben wir schon bei Besprechung der Killingschen Arbeiten angeführt. Die zweite ist schon auf S. 258 Anm. besprochen.

Die schöne Thèse von de Tannenberg: „Sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables indépendentes, qui admettent un groupe continu de transformations“ erwähnten wir schon auf S. 128; sie erledigt ebenfalls ein Problem, das Lie dem Verfasser gestellt hatte.

Ferner hat Tresse sehr geschickt die ihm von Lie gestellte Aufgabe gelöst, alle Differentialinvarianten der conformen Gruppe des R_3 zu berechnen**). Dagegen können die übrigen Untersuchungen von Tresse hier nicht besprochen werden, weil sie sich auf die unendlichen Gruppen beziehen; sie sind überdies bis jetzt nur in einem sehr knappen Auszuge veröffentlicht.

Von Cartans werthvollen Beiträgen zu den Killingschen Arbeiten über Zusammensetzung sprachen wir schon; hoffentlich veröffentlicht Cartan bald eine vollständige Darstellung seiner Untersuchungen.

In dem zweiten Bande seiner Vorlesungen über Geometrie benutzt auch Lindemann gruppentheoretische Betrachtungen, seine Ueber-

*) Leipz. Diss. 1890, s. Acta math. Bd. 14, S. 111—178.

**) C. R. 1892, Bd. 114, S. 948.

legungen sind aber durchaus nicht einwandfrei. Nachdem er nämlich den Raum als Zahlenmannigfaltigkeit eingeführt hat, definirt er die Bewegungen als eine gewisse Gruppe von projectiven Transformationen. Diese Gruppe bestimmt er näher durch die Forderung, dass die Untergruppe, die eine Gerade in Ruhe lässt, jedesmal die Punkte der Geraden eingliedrig transformire. Hieraus folgt, dass auf jeder festgehaltenen Geraden entweder zwei getrennte oder zwei zusammenfallende Punkte in Ruhe bleiben. Lindemann bezeichnet diese Punkte als die unendlich fernen Punkte der betreffenden Geraden, er setzt aber stillschweigend voraus, dass ein Punkt, der in diesem Sinne auf einer Geraden unendlich ferner Punkt ist, auch auf jeder andern durch ihn gehenden Geraden unendlich fern sei.

Die Frage, unter welchen Bedingungen die Differentialgleichungen für die geodätischen Linien zweier Flächen in einander überführbar sind, hatte Tissot mit wesentlichen Realitätsbeschränkungen, Lie aber *ganz* allgemein erledigt (Math. Ann. Bd. 20). Lie hatte auch bereits wiederholt auf den Zusammenhang dieses Problems mit der Mechanik hingewiesen. In neuerer Zeit haben Painlevé, Staude und Stäckel Untersuchungen veröffentlicht, die sich hieran anschliessen und die direct darauf ausgehen, die Gruppentheorie auf die Mechanik anzuwenden. Es ist das sicher ein sehr aussichtsreiches Forschungsgebiet, das wir aber natürlich hier nicht betreten können.

Endlich sind seit 1885 in zahlreichen englischen Arbeiten specielle Beispiele zu Lies allgemeiner Theorie der Differentialinvarianten aufgestellt worden, etwas wirklich Neues ist jedoch in diesen Arbeiten, soweit wir sie kennen, nicht enthalten.

§ 147.

Eine ganz besonders hervorragende Stellung nimmt die Anwendung der Gruppentheorie ein, die Picard auf die Integrationstheorie der linearen Differentialgleichungen gemacht hat und die nachher von Vessiot weiter geführt worden ist. Hier können wir aber natürlich auf diese Theorie nicht eingehen, sondern wir müssen uns das für das Werk über Differentialinvarianten und Integrationstheorie vorbehalten. Wie ausserordentlich wichtig jedoch diese Untersuchungen sind, geht schon daraus hervor, *dass durch sie die Integrationstheorie der linearen Differentialgleichungen in jeder Beziehung analog wird der Galoisschen Theorie der algebraischen Gleichungen.*

Auch auf gewisse Untersuchungen von Picard, die mit der Theorie der unendlichen Gruppen zusammenhängen, können wir hier nicht eingehen. Wir bemerken hier nur so viel: Picard*) verallgemeinert die partiellen Differentialgleichungen, die in der Theorie einer Function $u + iv$ der complexen Veränderlichen: $x + iy$ auftreten. Er zeigt, wie man das allgemeinste System von partiellen Differentialgleichungen aufstellen kann, das dieselben charakteristischen Eigenschaften besitzt, und gelangt so im Grunde zur Bestimmung einer ausgedehnten Klasse von unendlichen Gruppen. Besonders überraschend ist, dass hierdurch ähnlich wie bei Engel (s. S. 754) die Bestimmung dieser unendlichen Gruppen auf die Bestimmung gewisser endlicher continuirlicher Gruppen zurückgeführt wird.

Picard ist auch der erste, der allgemeinere Untersuchungen über algebraische Gruppen angestellt hat. In einer Preisschrift**) bestimmt er zweigliedrige Gruppen von birationalen Transformationen in drei Veränderlichen, bei denen eine algebraische Fläche in sich übergeht. Die Punkte der betreffenden Fläche werden dann durch eine algebraische Gruppe transformirt, deren infinitesimale Transformationen natürlich ebenfalls algebraisch sind.

Ohne auf Picards schöne Untersuchungen einzugehen, die selbstverständlich auch verallgemeinert werden können, wollen wir hier noch flüchtig ein allgemeines Problem besprechen, dessen eingehende Behandlung wir als äusserst wünschenswerth bezeichnen müssen. Es ist das folgende:

Vorgelegt sind die infinitesimalen Transformationen: $X_1 f \ldots X_r f$ *einer ganz beliebigen Gruppe in n Veränderlichen, man sucht alle mit dieser Gruppe ähnlichen Gruppen, deren infinitesimale Transformationen:*

$$Z_k f = \sum_1^n{}_i \, \xi_{ki}(z_1 \ldots z_n) \frac{\partial f}{\partial z_i} \quad (k = 1 \ldots r)$$

algebraisch sind.

Wir begnügen uns mit der Betrachtung zweier Beispiele***).

---

*) C. R. Bd. 112, S. 1399 ff. (1891) u. Bd. 114, S. 805 ff. Eine besondere Klasse der hier auftretenden unendlichen Gruppen betrachtet Scheffers in den auf S. 783 erwähnten Untersuchungen.

**) Sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables, Journal de math. 1889.

***) Die folgenden Betrachtungen rühren von Lie her, Lie hat aber bisher nur sehr wenig darüber veröffentlicht.

Erstes Beispiel. Die Gruppe: $X_1 f \dots X_r f$ sei die Gruppe aller Transformationen des R_n, also:

$$X_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (i = 1 \dots n).$$

Vermöge einer Transformation: $x_i = \omega_i(z_1 \dots z_n)$ soll nun werden:

$$\sum_1^n{}^{\nu} \xi_{i\nu}(z_1 \dots z_n) \frac{\partial f}{\partial z_\nu} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (i = 1 \dots n), \tag{77}$$

wo die $\xi_{i\nu}$ algebraische Functionen ihrer Argumente sind. Hieraus ergiebt sich:

$$\sum_1^n{}^{\nu} \xi_{i\nu}(z_1 \dots z_n) \frac{\partial x_\tau}{\partial z_\nu} = \varepsilon_{i\tau} \quad (i, \tau = 1 \dots n),$$

also, da die Determinante der $\xi_{i\nu}$ natürlich nicht verschwinden darf:

$$\frac{\partial x_\tau}{\partial z_\nu} = \alpha_{\tau\nu}(z_1 \dots z_n) \quad (\tau, \nu = 1 \dots n), \tag{78}$$

wo die $\alpha_{\tau\nu}$ ebenfalls algebraisch sind und den bekannten Integrabilitätsbedingungen genügen müssen. Demnach wird:

$$x_\tau = \int \sum_1^n{}^{\nu} \alpha_{\tau\nu}(z_1 \dots z_n) dz_\nu \quad (\tau = 1 \dots n). \tag{79}$$

Man erhält also die allgemeinste Lösung der Aufgabe, wenn man n beliebige Integrale*) über algebraische totale Differentialausdrücke auswählt und diese der Reihe nach gleich $x_1 \dots x_n$ setzt, nur müssen natürlich die betreffenden Integrale in solcher Weise von einander unabhängig sein, dass sich die Gleichungen (79) nach $z_1 \dots z_n$ auflösen lassen.

Zweites Beispiel. Es sei:

$$X_k f = x_0^k \frac{\partial f}{\partial x_0} + x_1^k \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2^k \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad (k = 0, 1, 2), \tag{80}$$

es soll werden:

$$\sum_0^2{}^{i} x_i^k \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_0^2{}^{i} \xi_{ki}(z_0, z_1, z_2) \frac{\partial f}{\partial z_i} \quad (k = 0, 1, 2),$$

wo die ξ_{ki} algebraische Functionen sind, deren Determinante natürlich nicht verschwinden darf. Hieraus ergiebt sich, dass x_0, x_1, x_2 einer totalen Riccatischen Differentialgleichung:

$$dx = \sum_{ik}^{0,1,2} \alpha_{ik}(z_0, z_1, z_2) x^i dz_k \tag{81}$$

*) Derartige Integrale sind zuerst von Picard betrachtet worden.

genügen, wo die α_{ik} algebraische Functionen sind, deren Determinante nicht verschwindet.

Hat man nun umgekehrt eine beliebige *unbeschränkt integrable* totale Riccatische Gleichung (81) von der eben besprochenen Beschaffenheit, und sind:

$$x_i = \omega_i(z_0, z_1, z_2) \quad (i = 0, 1, 2) \tag{82}$$

irgend drei verschiedene particuläre Lösungen dieser Gleichung, so kann zwischen x_0, x_1, x_2 keine von den z freie Relation bestehen. Eine solche Relation könnten wir uns nämlich etwa nach x_0 aufgelöst und also auf die Form:

$$x_0 = F(x_1, x_2)$$

gebracht denken; sie würde nun bei der Substitution (82) identisch erfüllt werden, dasselbe müsste also auch von den Gleichungen:

$$\frac{\partial x_0}{\partial z_k} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial z_k} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial z_k} \quad (k = 0, 1, 2)$$

gelten. Diese Gleichungen aber würden durch Benutzung von (81) die Form:

$$\sum_0^2{}^i \alpha_{ik} x_0^i = \sum_0^2{}^i \left\{\frac{\partial F}{\partial x_1} x_1^i + \frac{\partial F}{\partial x_2} x_2^i\right\} \alpha_{ik} \quad (k = 0, 1, 2)$$

erhalten, woraus wegen der Beschaffenheit der α_{ik} die Gleichungen:

$$x_0^i = x_1^i \frac{\partial F}{\partial x_1} + x_2^i \frac{\partial F}{\partial x_2} \quad (i = 0, 1, 2)$$

folgen würden, Gleichungen, die wegen der Verschiedenheit von x_0, x_1, x_2 überhaupt nicht bestehen können.

Demnach stellen die Gleichungen (82) unter der vorhin gemachten Voraussetzung immer eine Transformation dar, bei der die Gruppe (80) wieder in eine Gruppe mit algebraischen infinitesimalen Transformationen übergeht. Die allgemeinste Lösung unsrer Aufgabe erhält man daher, wenn man die allgemeinste unbeschränkt integrable Gleichung (81) von der oben angegebenen Beschaffenheit aufstellt.

Es ist klar, dass man solche Betrachtungen auch für beliebig viele andre Gruppen durchführen kann.

Bisher verlangten wir nur, dass die *infinitesimalen* Transformationen der Gruppe $Z_1 f \ldots Z_r f$ algebraisch seien. Ebenso interessant aber freilich auch schwieriger ist die Frage, unter welchen Bedingungen auch die endlichen Transformationen dieser Gruppe algebraisch sind.

Bei unserm ersten Beispiele liefert das Abelsche Theorem unmittelbar derartige Gruppen. Sind nämlich: $\varphi_1(x) \ldots \varphi_p(x)$ p unab-

hängige Abelsche Integrale von der ersten Gattung und vom Geschlechte p, so bestimmen die Gleichungen:

$$(83) \qquad \sum_1^p{}_\nu \varphi_\mu(x_\nu') = \sum_1^p{}_\nu \{\varphi_\mu(x_\nu) + \varphi_\mu(a_\nu)\} \quad (\mu = 1 \ldots p)$$

augenscheinlich eine p-gliedrige Gruppe, die mit der Gruppe der Translationen des R_p ähnlich ist. Nach dem Abelschen Theoreme werden hier die x' algebraische Functionen sowohl von den x als von den Parametern a. Die Ueberführung dieser Gruppe in die Gruppe der Translationen kommt auf ein Jacobisches Umkehrproblem hinaus*).

Während diese Gruppen sich unmittelbar aus dem Abelschen Theorem ergeben, hat Picard eine andre ganz neue Klasse von derartigen Gruppen entdeckt. In seiner oben angeführten Preisschrift beweist er, dass unter Umständen auch Gleichungen von der Form:

$$(84) \qquad \begin{cases} \int_{a_0 b_0}^{x' y'} \{P_1(x,y)dx + Q_1(x,y)dy\} = \int_{ab}^{xy} (P_1 dx + Q_1 dy) \\ \int_{a_0 b_0}^{x' y'} \{P_2(x,y)dx + Q_2(x,y)dy\} = \int_{ab}^{xy} (P_2 dx + Q_2 dy), \end{cases}$$

eine algebraische Gruppe bestimmen können. Die P und Q sind hier algebraische Functionen, die den Integrabilitätsbedingungen genügen, a_0 und b_0 sind bestimmte Zahlen und a und b sind Parameter. Eine solche Gruppe ist natürlich mit der Gruppe der Translationen in der Ebene ähnlich, ihre Ueberführung in die Gruppe der Translationen kommt auf ein verallgemeinertes Umkehrproblem hinaus.

*) S. die Note von Lie, C. R. Bd. 114, S. 334 (15. Febr. 1892). Hier möge auch noch eine Dissertation von Bohlmann erwähnt werden: Ueber eine gewisse Klasse continuirlicher Gruppen und ihren Zusammenhang mit den Additionstheoremen (Halle 1892). Bohlmann ist selbstständig auf die hier betrachteten Gruppen gekommen, die allerdings schon vorher von Lie angegeben waren.

Sachregister

zu Abschnitt I, II und III.

Abbildung s. endl. Trf., infin. Trf. u. adj. Gr., Charakteristiken.

Abgeleitet s. lin. abgel. u. der. Gr.

Absolute Inv. s. Invariante.

Abstandsfunction, Zusammenh. zw. Abstf. u. Bogenelement III, 487 f., 505. d. Abstandsfct. b. d. Gr. d. Nichteukl. Bew. i. R_3 III, 411. Abstandsfct. b. and. 6-gl. Gr. d. R_3: 419, 421, 423, 425, 432, b. gew. 3-gl. Gr. d. Ebene 436 f.

Adjungirte Gr. e. r-gl. Gr. G, ihre Defin.: I, 270 ff., III, 667—670; ihre inf. Trf.: I, 275 dargestellt d. d. Diffqu. e. trilin. Form: III, 755; ihre Gliederzahl: I, 277, wenn G asyst. ist: I, 510; ihre kanon. Form III, 612; ihre grundl. Diffgl. III, 616. D. adj. Gr. transf. d. R_r d. endl. Trf. v. G: I, 278 ff., ebenso d. R_{r-1} d. inf. Trf. v. G: I, 287. III, 672 ff., d. Punkte d. R_{r-1} stellen inf. Trf. d. Adj. dar: III, 672, d. R_r trf. sie intrans. III, 673. Constr. d. Tg. a. d. Bahnc. ihrer inf. Trf. i. R_{r-1} I, 288; d. inv. Mann. i. d. R_{r-1} III, 675 f. D. Adj. hat e. hom. Inv. 1. O. III, 745, 774. u. Umst. e. Inv. $(r-1)$-ten Grades III, 678. D. adj. Gr., d. z. e. Zuss. gehört III, 671; d. q-te Adj. III, 745 (s. dual., inf. Trf., endl. Trf.; char. Gl.).

Aehnlichkeit v. Gr., Defin.: I, 24. Wann sind zw. r-gl. Gr. d. R_n ähnl.: I, Kap. 19. D. Betr. d. inf. Trf. genügt: I. 328 f. Abl. d. nothw. Bedd. I, 330—333. D. Bedd. s. hinr. I, 353. D. Ueberführung erford. d. Int. vollst. Syst. I, 354 f., bes. einf. Fall I, 338. D. Trf., d. d. zw. Gr. ähnl. s., best. zw. ihnen e. hol. isom. Bez. I, 330. Eig. d. Bez. I, 355 ff. Neue Formul. d. nothw. u. hinr. Bedd. f. d. Aehnl. I, 359, Aehnl. b. Gr., d. nicht gleichv. Ver. enth. I, 362. Einf. Krit. f. d. Aehnl. trans. Gr. I, 425. Best. d. Trf., d. d. Aehnl. vermittelt: I, 427 f. Wann s. d. zw. Gr. ähnl., d. d. Lagen transf., d. zw. Mann. M u. M' b. e. Gr. annehmen I, 489 f. Aehnl. v. Gr. v. hom. BT. durch BT. II, 308—312, d. PT. II, 314 ff., wenn d. Gr. nicht gleichv. Ver. enth. II, 313 f.; Aehnl. v. Gr. v. BT. in z, x, p II, 323, v. Gr., d. d. Ausdr. $dz - \Sigma p\, dx$ inv. lass. II, 325. Aehnl. v. reellen Gr. d. reelle Trf. III, 364 f.

Aehnlichkeitstrf., d. Gr. d. Bew. u. A. im R_3: III, Kap. 11, Tabelle ihr. Ugr. III, 214 ff. d. Gr. i. R_4 ist gleichzusg. m. d. proj. Gr. e. Ger. i. R_3 III, 247—249. d. Ugr. d. Gr. III, 251—258. d. Gr. i. R_n III, 292, 334. ihr. inv. Ug. III, 357.

Aequivalente Glsyst. II, 36.

Algebraische Gr. Gr. m. algebr. inf. Trf. III, 812, m. alg. endl. Trf. III, 814, 805. Notw. Bed. f. d. Zusammens. e. Gr. m. alg. endl. Trf. III, 806. Algeb. lin. hom. Gr. III, 801 f.

Allgemeine inf. Trf. e. r-gl. Gr. I, 77, sie bewahrt ihre Form b. d. endl. Trf. d. Gr. I, 81. allgemeine Lage s. Punkt.

Associatives Gesetz, d. Trf. d. R_n genügen d. ass. G. I, 402; d. ass. Ges. b. höh. compl. Zahlen III, 749 ff.

Asystatische u. systatische Gr. I, 501, ihre Merkmale I, 502, 510, 519 f., ob e. Gr. syst. ist od. nicht, erk. man a. d. Defingl. I, 508 od. a. d. Reihenentw. d. inf. Trf. i. e. Punkte v. allg. Lage I, 509. Aufstellung d. endl. Trf., d. m. d. Trf. e. syst. Gr. vert. sind I. 510 ff. sind zw. asyst. Gr. ähnl., so kann man sie ohne Int. in ein. überf. I, 516. d. grösste Gr., i. d. e. asyst. Gr. inv. ist, ist endl. I, 517. Best. d. kanon. Form d. endl. Gl. e. asyst. Gr. ohne Integr., wenn d. inf. Trf. d. Gr. geg. sind: I. 517 f., Best. d. Bahnc. ihr. inf. Trf. III, 627. Best. aller trans. asyst. Gr. v. geg. Zuss. I, 520.

Ausgezeichnete inf. Trf. e. r-gl. Gr. I, 276; s. best. d. Gliederzahl d. adj. Gr. 276 f. Jede Gr. m. ausg. inf. Trf. ist systatisch I, 510.

Ausgezeichnete Functionen e. r-gl. Fctgr. II, 187, s. sind d. gemeins. Fct. d. Fctgr. u. ihrer Polargr. II, 189. ihre Bedeutung II, 260 f. Best. ihrer Zahl II, 189—191. Ausgez. Fct. e. hom. Fctgr. II, 218. Zahl d. ausgez. Fct. u. d. ausg. Fct. nullter O. II, 218 f. Bestimmung d. Zahlen, wenn man noch nicht r unabh. Fct. d. Gr. kennt II, 219 f. (s. Fctgr.).

Axiome, d. Helmholtzschen III, 438 f. Folgerungen daraus 440 — 451, ihre gruppentheor. Formul. 451—453. Kritik d. H.schen Schlüsse u. Rechn. 453 —460. Aufst. v. Ax., bei denen die H.schen Rechn. genügen 460 — 464. Welche Gr. erfüllen d. urspr. H.schen Ax. 465—471 (s. Monodromieax.). Zweifel a. d. Deutung d. H.schen Ax. 469 f. Neue Ax. d. zur Charakt. d. Eukl. u. Nickteukl. Bew. genügen 1) s. freie Bewegl. i. Inf. 2) im R_3 506 f., im R_4 515, im R_n ($n > 2$) 521 f.

Bahncurven e. inf. Trf. u. e. eingl. Gr. I, 59 f. Jede Bahnc. e. eingl. Gr. bleibt b. d. Gr. inv. 106. Kennt man d. endl. Gl. e. r-gl. Gr., so findet man d. Bahnc. ihr. eingl. Ugr. d. Quadr. III, 625.

Bereiche i. denen d. Fct. $x_i' = f_i(x, a)$ u. $c_k = \varphi_k(a, b)$ (s. I, 17) definirt sind. Die Bereiche (x) u. (a): I, 14; $x' = f((x)(a))$: I, 15; ((x)) u. ((a)) I, 16 f. Aufhebung gewisser Beschränk. d. Ber. III, 552 Anm.

Berührungstransformationen 1) *i. d. Ebene* II, Kap. 1, sie sind spec. Linieneltrf. II, 5 f., andr. Defin. 17, ihre Best. 6—10. Jede Schaar v. ∞^2 Curv. best. e. BT. 19. Ausführ. e. BT. a. Curv. u. Punkte 22—25, alle BT. d. jedes Linienel. i. e. parall. überf. 30, d. BT. d. Ebene als PT. d. R_3: II, 394. 2) *im* R_3 II, Kap. 3. Defin. II, 48, 62. Best. 49—54. Ausf. e. BT. 62—70. BT., d. Haupttgc. i. Haupttgc. od. i. Krümmungslin. überf. 76 f., d. d. Geraden i. d. Kugeln überf. III, 138. 3) *im* R_{n+1}. BT. i. z, x, p: II, 114, 158, d. BT. d. R_{n+1} bilden e. unendl. Gr. 117 f. D. BT. d. R_{n+1} als PT. d. R_{2n+1} II, 466. charakt. Eigensch. d. BT. 122, 145. BT. i. d. x, p 125—132. BT., d. d. Ausdruck $dz - \Sigma p\,dx$ u. d. Klammerausdr. (uv) invar. lassen 131 f., homog BT. 135—139, 216, 283. Ableitung der BT. d. R_{n+1} a. d. homog. BT. i. $2n+2$ Veränd. 139—143. D. BT. d. R_n i. Connexcoord. III, 530—532. Best. aller BT. ohne Integr.: a) d. homog. BT. II, 147—153. b) d. BT. i. z, x, p II, 153—156. Ausführ. e. BT. auf d. Punktmann. d. R_{n+1} 159 ff., 168. d. n-fach ausged. Punktmann., d. Dimension erhalten bleibt 161 ff. Wann best. e. Schaar v. ∞^{n+1} Punktmann. d. R_{n+1} e. BT. 166 ff. (vgl. endl. cont. Gr., Functgr., Zusamms.).

Beweglichkeit, s. frei.

Bogenelement, d. Bogenel. b. d. project. Gr. e. Mann. 2. Gr. i. R_n II, 354, d. Bogenel. e. damit ähnl. UG. d. conform. Gr. 355. Riemanns Betracht. z. Abl. e. beständig pos. quadr. Bogenel. 486—489. Directe Abl. d. Bogel. a. d. freien Bewegl. i. Inf. 495 ff. (vgl. Abstandsfct.).

Cayleysche Linienfläche 3. O., ihre proj. Gr. III, 193—196.

Charakteristiken e. lin. part. Diffgl. 1. O. I, 100; Abbild. d. Ch. e. nicht lin. part. Diffgl. 1. O. i. R_3 auf d. Linienel. d. Ebene III, 126 f. Abbild. d. Ch. e. nichtlin. part. Diffgl. 1. O. i. R_n auf d. M_{n-2}-elem. d. R_{n-1} III, 340—343.

Charakteristische Function e. inf. BT. in z, x, p II, 252 f., ihr Nutzen 254. char. Fct. e. inf. BT. i. d. x, p 261, e. inf. hom. BT. 263. Verhalten der char. Fct. e. inf. BT. bei endl. BT.: 1) hom. BT. 267, 2) b. BT., d. d. Ausdr. $dz - \Sigma p\,dx$ inv. lassen 271, 3) b. BT. i. z, x, p II, 276; III, 759. D. char. Fct. geht b. e. BT. i. e. ch. Fct. über II, 528. D. char. Fct. d. inf. Trf. e. r-gl. Gr. v. BT. II, Kap. 18. Ch. Fct. d. Gr. v. BT. d. R_{n+1}, d. als Gr. v. PT. d. R_{2n+1} transitiv sind II, 540. D. char. Fct. $Z = z - \frac{1}{2}\Sigma xy + \ldots$ II, 545 f. Gr. v. BT., d. e. ch. Fct. v. d. Form Z enthalten 549, 554 (vgl. inf. BT. u. Reihenentw.).

Charakteristische Gleichung e. r-gliedr. Gr. III, 772, d. ch. Gl., d. z. e. inf. Trf. d. Gr. gehört 773, d. Coeff. d. ch. Gl. sind Inv. d. adj. Gr. 773. Form e. Gr., deren ch. Gl. m verschw. Wurzeln hat 775.

Charakteristische Mannigfaltigkeiten e. vollst. Systems I, 101.

Combination zweier inf. Trf. d. Klammerop. I, 94, zweier charakt. Fct. II, 463.

Complexe Zahlen, höhere. Begriff III, 747 f., wenn Division möglich sein soll

748, wenn d. assoc. Gesetz gilt 749, dar. folg. Zush. m. gew. lin. hom. Gr. 750—752. Umkehrbark. d. Zush. 780—782. Syst. v. compl. Z., z. denen e. einf. Gr. gehört 784.

Conforme Gruppe od. Gr. d. recipr. Radien i. R_3 II, 459 f. s. lin. Complex; i. R_4 gleichzusges. m. d. allg. proj. Gr. d. R_3 III, 281. conf. Gr. d. R_n III, 334, 347—351, sie ist gleichzusges. m. d. proj. Gr. e. Mann. 2. Gr. i. R_{n+1} 357, sie kann durch PT. nicht i. e. proj. Gr. übergeführt w. 352; sie ist einfach für $n = 3$ III, 357, 683. Ihre grösst. Ugr., vgl. proj. Gr.

Connexcoordinaten, d. BT. d. R_n i. Cc. III, 530—532.

Continuirliche Gr., allg. Begr. I, 3.

Cremonasche Trf., Gr. v. Cr. T. enth. d. id. Trf. u. paarw. inv. Trf. I, 20 f.

Curven d. Ebene, d. inf. proj. Trf. gestatten III, 86—89, d. R_3, d. inf. proj. Trf. gest. 180—190 (s. ration. C.).

Definitionsgleichungen (Diffgl.) f. d. endl. Trf. e. cont. Gr. I, 5—6. Gr., d. sich nicht d. Diffgl. defin. lassen I, 6. Defingl. f. d. inf. Trf. e. r-gl. Gr. 185. Welche Syst. v. lin. hom. Diffgl. sind Defingl. 187, Th. 28. Die Defgl. bestimmen d. Anfangsglieder i. d. Reihenentw. f. d. inf. Trf. e. Gr. i. d. Umgebung e. Punktes 190 ff., sie lassen erkennen, ob e. Gr. transitiv od. intr., asyst. od. syst. ist 217, 508. D. Defingl. d. endl. cont. Gr. a. d. Geraden III, 7—11.

Derivirte (abgeleitete) Gr. e. r-gl. Gr. III, 678, d. q-te Derivirte 679. Satz ü. endl. Trf. e. r-gl. Gr., d. d. ersten Deriv. angehören 770. Ist d. erste Deriv. e. Gr. integrabel, so hat sie den Rang Null 777 (s. invariante Ugr.).

Differentiale: hom. Gl. 2. Gr. i. dx, dy, dz u. ihr Zush. m. e. nicht intgr. Pfaffsch. Gl. i. x, y, z III, 126 f. Gr., d. e. hom. Gl. 2. Grades in $dx_1 \ldots dx_n$ invar. lassen ($n > 2$) u. d. Richt. durch jeden festgehalt. Punkt mögl. allg. trf. III, Kap. 17. Anfangsgl. d. Reihenentw. ihrer inf. Trf. 320 f., es giebt nur 4 solch. Gr. 334. Die betr. endl. cont. Gr. d. Ebene 335 f. Gr., d. e. hom. nicht lin. Gl. i. $dx_1 \ldots dx_n$ inv. lassen, sind im Allgem. endlich 337—346. Gr. d. R_n ($n > 2$), d. e. *Differentialausdruck* 2. Gr. invar. lassen u. d. Richt. d. jed. festgeh. P. mögl. allg. trf. 353. D. reellen Gr. v. dieser Beschaff. 385—392.

Differentialgleichungen, grundlegende s. grundl. — lin. part. D. 1. O.: eine u. ihr Zush. m. e. simult. Syst. I, 82 f. D. Aufsuch. d. gemeins. Lös. mehrerer kommt a. d. Intgr. e. vollst. Syst. (s.) zurück 83 f. Belieb. Syst. v. lin. part. D. 1. O. u. ihr Zush. m. d. Syst. v. totalen D. (s.) 101—105. Mit jed. Syst. v. lin. part. D. 1. O. ist e. andr. S. d. Art inv. verknüpft III, 761. q unabh. lin. part. D. i. n Ver., d. $n - q$ unabh. Lös. gem. haben, bilden ein q-gl. vollst. Syst. I, 88. Syst. v. part. D. bel. O., deren allg. Lös. nur e. endl. Zahl v. willk. Const. enthalt. I, Kap. 10. Neue Fassung d. Probl. e. gew. D. 1. O. i. x, y, e. part. D. 1. O. i. R_3 u. e. part. D. 1. O. i. R_{n+1} zu integr. II, 31 f., 71—74, 86 f., 110 f. Lösungen e. solchen Gl. i. R_{n+1} II, 101, Zurückführung auf e. v. z freie Gl. 111 f. Integr. e. Gl. v. d. Form: $u(x, p) = a$: II, 174 f. Syst. v. D., d. e. Gr. v. PT. gestatten I, 549 f., e. Gr. v. BT. gest. II, 388. D. Diffgl. niedrigster O., d. b. d. irred. Gr. v. BT. d. Ebene inv. bleiben II, 439, 452. Jede gew. Diffgl. 2. O. i. x, y kann d. BT. i. jede andr. übergef. werden II, 33 f. (vgl. gestatten, Defingl.).

Differentialvarianten I, 548. Jede endl. cont. Gr. v. PT. u. v. BT. hat D. I, 549, II, 388.

Discontinuirliche Gr. I, 3.

Dualistisch. dual. Trf. II, 268, i. d. Ebene III, 80, 105, i. R_3 III, 205, 250. d. z. e. inf. proj. Trf. dual. II, 268. d. dual. e. lin. hom. Gr. I, 492 ff. e. proj. Gr. II, 307. D. dualistische d. adjung. Gr. I, 493, II, Kap. 19. Ihre directe Def. II, 328 f. ihre inf. Trf. u. ihre Gliederz. 333. d. Glsyst. d. b. dieser Gr. inv. bleiben 338 ff. jedes homog. Glsyst. dieser Art, das keine lin. hom. Rel. nach sich zieht, bestimmt r-gl. Gr. v. hom. BT. v. d. Zuss. c_{iks}, d. m. ein. ähnlich sind 343. Wann liefern zwei versch. Glsyst. d. Art zwei ähnl. Gr. v. hom. BT.? 355—362. Bedeutung bel. Glsyst., d. d. dual. d. Adj. gestatten 366 f.

Ebene. 1) *d. allg. lin. hom. Gr.* d. E. u. ihre Ugr. III, 18—28, d. reellen Ugr. III, 370.

2) *d. endl. cont. Gr. v. PT.* d. E. a) d. prim. III, 34 f. b) d. imprim. III, 36—57. Klassific. d. impr. III, 61. Best. d. Schaaren v. ∞^1 Curven (gew. Diffgl. 1. O.), b. e. endl. cont. Gr. d. Eb. inv. bleiben III, 61—65, intes. f. die ge-

fundenen Normalf. 65—71. D. inv. Diffgl. 3. O. b. d. Gr. m. $r > 5$ Par. 129—134. Tabelle aller 2-, 3- u. 4-gl. Gr. v. PT. d. Eb. 57 f., all. endl. cont. Gr. v. PT. d. Eb. 71—73, aller Gr. v. PT., d. e. gew. Diffgl. 2. O. inv. lassen 76 f., d. reellen endl. cont. Gr. v. PT. III, 370—380.

3) *d. endl. cont. Gr. v. BT.* d. Eb. a) irred. s. irr. b) red. III, 74 ff. D. reellen III, 384 f.

4) *d. proj. Gr. d. Ebene.* d. Typen v. eingl. proj. Gr. III, 81—85, d. grössten proj. Gr. 91 ff. Allg. Satz. ü. d. proj. Gr. 94. Best. aller proj. Gr. 94—103. Aufsuchung d. versch. Typen 103—105. Tabelle d. proj. Gr. d. Eb. 106 f., d. grösste proj. Gr., i. d. e. geg. proj. Gr. d. Eb. inv. ist 108 f. D. inf. proj. Trf. d. Eb. hom. geschr. 110. d. reellen proj. Gr. d. Eb. 380—384.

Eigentliche BT. II, 25, 163.

Einfache Gr. Ihre Defin. I, 264, b. reell. Gr. III, 363. nicht einf. = zusammengesetzt. Zu e. einf. Gr. giebt es nur e. meroedr. isom. Gr. I, 305. Einf. r-gl. Gr., deren grösste Ug. $r-1$, $r-2$, $r-3$ od. $r-4$ Par. haben III, 685, 808. Wann giebt es e. einf. Gr., d. mit e. geg. r-gl. Gr. mer. isom. ist III, 703. Zu jeder r-gliedr. Gr. gehört e. ganz best. Reihe v. Zuss. einf. Gr. 703, 765. D. 4 grossen Klassen v. einf. Gr. 682 f., ausserdem giebt es nur noch 5 Zuss. v. einf. Gr. 776. d. 14-gl. einf. Gr. i. R_5 763 f. (vgl. complexe Z.).

Einfach transitive Gr. I, 212. gleichzusammenges. einf. tr. Gr. sind ähnlich I, 340. Z. jed. einf. tr. Gr. geh. e. recipr. (s.) einf. tr. Gr., d. aus all. Trf. best., d. m. d. Trf. d. Gr. vert. sind, u. d. m. ihr gleichzusges. ist 378, 380. Best. aller Zerleg. d. R_n, d. b. e. einf. tr. Gr. des R_n inv. bleiben 383—387. Ausdehnung d. Th. auf gew. nicht einf. tr. Gr. 400. Mannigf., d. b. e. Ugr. e. einf. tr. Gr. inv. bleiben 390. Aus d. endl. Gl. e. einf. tr. Gr. kann man ohne Int. d. der recipr. einf. tr. Gr. finden 394. Best. e. einf. trans. Gr. v. geg. Zuss. 1) wenn d. endl. Gl. e. Gr. v. dieser Zuss. geg. sind 430 f., 490, 2) wenn blos d. inf. Trf. e. solchen Gr. geg. sind 431 f. 3) wenn blos d. Zuss. geg. ist a) unter gew. Beschr. 433, b) allg. u. zwar durch Int. gew. Diffgl. II, 296 f., III, 599—604, d. Aufl. e. alg. Gl. u. d. Exponfct. III, 642 ff., d. gew. Potr. III, 795, d. Quot. best. conv. Potr. III, 794. Einen Fall, i. d. man d. endl. Gl. e. einf. trans. Gr. dch. Quadr. a. d. inf. Trf. finden kann s. u. recipr. einf. tr. Gr.

Eingliedrige Gruppen. I, Kap. 3. Jede eingl. Gr. besteht a. vert. Trf. u. ist m. e. Gr. v. Transl. ähnlich I, 49. Allg. (kanon.) Form e. eingl. Gr. m. d. id. Trf. u. m. paarw. inv. Trf. 51. Zu jed. eingl. Gr. gehört e. ganz best. inf. Trf., v. d. sie u. gew. Bed. erzeugt ist 55, Th. 7. Jede eingl. Gr. stellt eine stationäre Bew. e. compress. Flüssigk. dar 59. Bild e. eingliedr. Ugr. i. d. R_r d. ∞^r Trf. e. r-gl. Gr. 279. Eingl. Gr. v. BT. II, 255. D. endl. Trf. e. eingl. Ugr. v. allg. Lage i. e. r-gl. Gr. sind i. d. r-gl. nicht m. e. gleichber. III, 745, 774.

Element d. R_{n+1} II, 103 f., d. El. d. R_{n+1} als Punkt e. R_{2n+1} II. 465 f. D. El. e. Punktmann. d. R_{n+1} II, 104—106. Jedes El. kann d. e. BT. i. e. El. m. d. Coord. 0, 0 ... 0 übergeführt werden i. d. Ebene II, 402 f., im R_{n+1} II, 462. Jedes El. d. R_n definirt e. gew. inf. proj. Trf. d. R_n I, 577. M_{n-1}-element d. R_n III, 338. M_k-element d. R_n III, 480 (vgl. Linienel. u. Flächenel.).

Elementcoordinaten i. R_{n+1}, nicht homogene II, 104, homogene 109 f. Connexcoord. III, 530.

Elementmannigfaltigkeit (Verein) 1) i. d. Ebene (Element-M_1) II, 14, 22, aufgefasst als Curve d. R_3 393 f. 2) Elmann. i. R_3 II, 55, 66, ihre Bestimmung 55—60, 3) im R_{n+1}. Jede Element-M_n des R_{n+1} wird d. e. $(n+1)$-glied. Glsyst. zw. $z, x_1 \ldots x_n$, $p_1 \ldots p_n$ dargest., d. d. Gl. $dz - \Sigma p\, dx = 0$ genügt (s. Pfaffsche Gl.) II, 106, jede Elem.-M_n d. R_{n+1} besteht a. d. El. e. Punktmann. d. R_{n+1} 104—106. Wann gestattet e. Element-M_n d. R_{n+1} e. inf. BT.? II, 258.

Elementstreifen i. R_3 II, 59.

Endliche continuirliche Gr. Allg. Begr. I, 3, r-gliedrige I, 15, Einführung neuer Par. u. neu. Ver. i. e. r-gl. Gr. 23—25. Auffass. d. Gr. als Gr. v. Oper. 25—27. Zu jeder r-gl. Gr. gehören r unabh. inf. Trf. I, 67, III, 552, Eigensch. d. Schaar v. ∞^{r-1} inf. Trf., d. durch diese inf. Trf. best. ist III, 556 f. Jede r-gl. Gr. m. d. id. Trf. besteht aus ∞^{r-1} eingl. Gr. und enthält gerade r unabh. inf. Trf., von denen

sie erzeugt ist I, 74 f. Enth. sie m unabh. inf. Trf., so auch jede daraus lin. abgel. I, 77. Ihre allg. inf. Trf. ebd. ihre allg. endl. Trf. wird erhalt., wenn man r geeign. ihrer eingl. Ugr. nach ein. ausführt III, 803, jede r-gl. Gr. m. paarw. inf. Trf. ist v. inf. Trf. erzeugt I, 169, III, 566, 582 (s. inf. Trf.). — Endl. cont. Gr. v. PT. i. mögl. wenig Ver., d. gleichzusgs. sind 1) m. d. Gr. d. lin. Compl. i. R_3 II, 460, 2) m. d. allg. proj. Gr., d. allg. lin. u. d. spec. lin. Gr. d. R_n III, 266, 269, 271. D. Gr. i. $n+1$ Ver., d. m. d. allg. proj. Gr. d. R_n gleichzusg. s. III, 282. — Endl. cont. Gr. v. BT. 1) v. hom. BT. II, 300 f. 2) v. BT. i. z, x, p II, 321. 3) v. Trf., d. d. Ausdr. $dz - \Sigma p\,dx$ inv. lassen II, 324. — Gr. m. inf. Trf. v. d. Form $(\varphi f)_{xp}$ II, 327. Best. d. inf. Trf. *einer* Gr. v. hom. BT. m. geg. Zusamms., durch Integr. gew. Diffgl. II, 298. Best. all. r-gl. Gr. v. hom. BT. m. geg. Zusamms. d. Integr. gew. Diffgl. II, 345 (vgl. Fctgr.). Best. aller Gr. v. BT., d. d. Ausdr. $dz - \Sigma p\,dx$ inv. lass. u. geg. Zusammens. haben II, 365—368. r-gl. Gr., deren grösste Ugr. $r-1$, $r-2$, $r-3$ oder $r-4$ Par. haben III, 686—692, 808 (s. ident. Trf., inf. Trf., endl. Gl., transitiv, Typen, Zusamms., Gerade, Ebene, Raum).

Endliche Gleich. e. r-gl. Gr. (s. kan. Form., Bahncurv., asyst.). gew. r-gl. Gr., deren endl. Gl. man a. d. inf. Trf. dch. Quadr. bilden kann III, 632 f. Darstell. d. endl. Gl. e. r-gl. Gr. durch d. Inv. mehrerer Punkte III, 588 f.

Endliche Trf. e. r-gl. Gr., Symbol dafür I, 255, Abbildung d. endl. Trf. e. r-gl. Gr. a. d. Punkt. e. R_r I, 279 (vgl. Schaar).

Erweiterte PT. als specielle BT. i. d. Ebene II, 7, i. R_3 II, 54, i. R_{n+1} II, 161. erweit. inf. PT. als inf. hom. BT. II, 265.

Erweiterung e. Trf. durch Hinzunahm. v. Diffqu. I, 523. Erw. e. endl. Trf., e. inf. Trf. u. e. r-gl. Gr. 1) im R_3 bis zu Diffqu. 2. O. I, 531—540. 2) im R_n, wenn d. unabh. Ver. gar nicht trf. wird I, 524—528. 3) allgemein: 541—548. Erw. e. BT. II, 378—383, e. Gr. v. BT. II, 383—387.

Euklidische Bew., die reell. Gr. v. Eukl. Bew. i. R_3: III, 385. Alle Curv. d. R_3, d. b. d. Gr. d. Euklid. Bew. gerade ∞^4 Lagen annehm. III, 222 ff. d. Gr. d. Eukl. Bew. i. R_n III, 292, 334, 353, ihre inv. Ugr. III, 357. d. reell. Euklid. u. d. Nichteukl. Bew. d. R_n ($n>2$) sind d. d. freie Bewegl. i. Inf. charakt. III, 479, 481, 485 (s. Axiome u. freie Bewegl.).

Figur, I, 487.

Flächen d. R_3, d. inf. proj. Trf. gest. III, 190—198.

Flächenelement od. Element i. R_3 II, 47, d. Flächenel. e. Fläche, e. Curve u. e. Punktes II, 56, 59, 60.

Fortschreitungsrichtung s. Richtung.

Freie Beweglichkeit im Endl. nach Helmholtz III, 452. Unzulässigkeit d. Uebertr. a. unendl. ben. Punkte III, 454—460. Fr. Bewegl. i. Inf. III, 472; reelle Gr., d. freie Bewegl. i. Inf. haben: 1) i. d. Ebene III, 476 f. i. R_3: 477, i. R_n: 481, proj. Gr. v. dies. Besch. III, 476 f., 480, 481. Fr. Bewegl. d. Figuren b. Riemann III, 490—493. d. fr. Bewegl. u. d. Gr-eigensch. ersetzen d. Riemannschen Ford. III, 495 (s. Axiome u. Bogenel.).

Functionen, d. auftret. Fct. sind analyt. I, 1; ihr Geltungsbereich I, 14—17, e. Fct. gestattet e. Trf. I, 95, e. BT. II, 283 (s. gestatten, reelle Gr.).

Functionengruppen. Begr. u. Form e. Fctgr. II, 180. Ueberführ. e. Fctgr. i. e. andr. 182. Jede r-gl. Fctgr. bestimmt e. r-gl. vollst. Syst. 183, e. recipr. Fctgr. (Polargr.) 184 f. (vgl. ausgez. Fct.) u. e. unendl. Gr. v. BT. i. x, p 289. Ist e. Fctgr. dch. e. vollst. Syst. defin., so kann m. ohne Int. d. vollst. Syst. find., d. d. Polargr. def. 192 f. Invar. Eigensch. e. Fctgr. gegüb. BT. i. x, p 204. Wann bleibt e. Fctgr. b. e. BT. i. x, p inv.? 283, wann b. e. inf. BT. (eingl. Gr.) m. d. charakt. Fct. $\varepsilon z + \omega\,(x,p)$ 284. — *Homogene* Fctgr. Begriff II, 213, analyt. Merkmale u. Best. v. r. unabh. Fct. d. Gr. 214 f., d. Polargr. e. hom. Fctgr. ist hom. 217. inv. Eigensch. e. hom. Fctgr. gegüb. hom. BT. 227, d. hom. Fctgr., d. durch e. r-gl. Gr. v. hom. BT. best. ist 303. Best. d. ausgez. Fctgr. dieser Fctgr. durch ausführb. Opp. 347—352 Verallgem. d. Theor. d. hom. Fctgr. 285 ff. Anwend. d. Fctgr. a. d. Theor. d. Zusamms. III, 720 ff.

Fundamentalsätze, d. der Grth. III, 545 f., 563, 590, 597.

Gattung von Typen transit. Gr. I, 448, intransit. Gr. 457.

Gerade, d. endl. cont. Gr. auf ihr III, Kap. 1. D. allg. proj. Gr. a. d. Ger. u. ihre Ugr. III, 12—17. Satz über d. m. ihr gleichzusges. Gr. III, 18, Best. aller trans. m. ihr glchzsg. Gr. v. PT. I, 491 f., all. m. ihr glchzsg. Gr. v. hom. BT. II, 353 ff., d. reellen u. d. reell. proj. Gr. a. d. Geraden III, 369 (vgl. Raum).

Gestatten (zulassen, invar. bleiben). E. Fct. gest. e. Trf. od. e. Gr. I, 95 f., e. inf. Trf. (eingl. Gr.) 96. E. Glsyst. (Mannigf.) gest. e. Trf. 98, 105, e. inf. Trf. (eingl. Gr.) I, 108, 135; II, 37 f.; I, 112 u. 114 Satz 3. begriffl. Deutung I, 135. E. vollst. Syst. gest. e. Trf. I, 137, e. inf. Trf. (eingl. Gr.) 139 ff., begriffl. Deutung 143. E. (lineare) Schaar v. inf. Trf. gest. e. inf. Trf. (eingl. Gr.) I, 249—252. E. Schaar v. Mann. gest. e. Trf. od. e. Gr. I, 459, Kriter. dafür 464, sie gest. e. inf. Trf. (eingl. Gr.) 466—468. Wie viele inf. Trf. e. geg. Gr. gest. e. geg. Schaar v. Mann. 474. E. Syst. v. Pfaffsch. Gl. od. e. Pfaffsch. Ausdr. gest. e. inf. Trf. (eingl. Gr.) 530—531. E. Syst. v. Diffgl. gest. e. Gr. I, 549 f., e. bel. Syst. v. lin. part. Diffgl. gest. e. inf. Trf. (eingl. Gr.) I, 550 f. Gest. e. Fct., Glsyst., Mann., vollst. Syst., Schaar v. inf. Trf. od. v. Mann., Syst. v. Pfaffsch. Gl. u. s. w. d. inf. Trf. Xf und Yf, so gest. es auch d. inf. Trf.: $aXf+bYf$ u. (XY): 97, 118, 144, 253, 469, 531.

Gleichberechtigte Ugr. e. r-gl. Gr. I, 280, d. gemeins. Trf. aller glber. Ugr. bilden e. inv. Ugr. 281, gleichber. Ugr. abgeb. i. d. R_r d. endl. Trf. I, 280, im R_{r-1} d. inf. Trf. III, 673.

Gleichungensysteme, q-gliedr. II, 35. Vorauss. ü. ihre Form I, 108; II, 35. Best. all. Glsyst., d. e. inf. Trf. gest. I, 115—117, d. q geg. inf. Trf. gest. I, 118—133. Klassific. dieser Glsyst. I, 120 u. 123. Best. all. Glsyst., d. e. r-gl. Gr. gest. I, Kap. 14, ohne Integr., wenn d. endl. Gl. d. Gr. bekannt sind I, 226. Sind blos d. inf. Trf. bekannt, so find. m. gew. inv. Glsyst. durch Determbild. I, 228, 239 f., 241 ff. Klassific. aller inv. Glsyst. 230. Best. d. übr. durch Integr. vollst. Syst. 237. Untersch. zw. d. Best. aller Glsyst., d. e. r-gl. Gr. gest., u. all. Glsyst., d. r geg. inf. Trf. gest. 243 ff. (s. auch Pfaffsche Gl.).

Gleichzusammengesetzt = holoedr. isom. I, 291, 293, b. Gr. v. BT. II, 302, 322, b. reell. Gr. III, 364. Zw. gleichzusg. Gr. können stets e. solch. Form. erh., dass s. d. Pargr. gemein haben I, 414. Verschied. Defin. d. Glchzusgesetztseins I, 293, Uebereinst. beider Def. I, 418—420, III, 763.

Gliederzahl e. endl. cont. Gr. I, 15, e. vollst. Syst. I, 85, e. Glsyst. II, 35, e. Fctgr. II, 180.

Grundlegende Diffgl. für e. r-gl. cont. Gr. $x_i' = f_i(x, a)$: I, Kap. 2, für d. x' als Fct. d. a I, 33, für d. x als Fct. d. a I, 43, Diffgl. zw. d. x und x' I, 44 f., neue Ableit. d. Diffgl. III, 552—557, ihre begriffl. Deutung III, 554 ff. Gültigkeitsber. d. grundl. Diffgl. I, 40, 43, 45. Eigensch. d. Fct. $\xi_{ji}(x)$, $\psi_{jk}(a)$, $a_{jk}(a)$, $\vartheta_{jk}(a)$ I, 32, 34, 41; III, 581. Bereiche, wo diese Fct. def. sind I, 35, 39, 40, 42. Integr. d. grundl. Diffgl. I, 67—72, III, 558—561. Eigensch. e. Schaar v. ∞^r Trf., d. d. grundl. Diffgl. genügt I, 72 Th. 9, 160, hinreich. Bed., damit e. solch. Sch. e. r-gl. Gr. bild. III, 562 u. 791 (s. adj. Gr. u. Pargr.).

Gruppe v. Trf., allg. Begr. (contin., discont., endl. cont., unendl. cont.) I, 3—6. Gr., d. aus discreten Schaaren von Trf. bestehen I, Kap. 18, III, 575. D. Inbegriff all. Trf., d. e. Glsyst. (Mann.) od. e. Schaar v. Mann. inv. lassen, bildet e. Gr. I, 208, 465 (vgl. endl. cont. Gr.).

Hauptlösungen e. lin. part. Diffgl. I, 83, e. vollst. Syst. I, 90.

Hauptsatz d. Grth. III, 546, 590.

Helmholtzsche Axiome s. Ax.

Holoedrischer Isom. s. gleichzusgs.

Homogen heisst e. Fct. v. $x_1 \ldots x_n, p_1 \ldots p_n$, wenn sie in d. p hom. ist II, 213 (vgl. BT. u. Fctgr.).

Identische Trf., ihre Existenz i. e. Gr. nicht v. vornh. sicher I, 22. Jede r-gl. Gr. kann a. e. Gr. m. d. id. Trf. abgeleitet werden I, 163, III, 574. E. Gr. ohne id. Trf. I, 163 f.

Identität s. Jacobische. Allg. Id. zw. bilin. Symb. $|uv|$ II, 237; d. Id. für d. Symb. $\{uv\}$ b. char. Fct. II, 536. D. allg. hom. bilin. Symb., das e. solche Id. erfüllt III, 604—606.

Imprimitiv s. primitiv.

Imprimitivitätszerlegung s. Zerlegung.

Increment s. Zuwachs.

Infinitesimale Trf., Begriff u. Form I, 53, d. Symb. f. e. inf. Trf. (ist blos bis a. e. const. Factor best.) I, 54. Unabhäng. d. Symb. v. d. Wahl d. Veränd. 56 f. Jede inf. Trf. erz. e. eingl. Gr. 55, s. ordn. jed. Punkt e. unendl.

kl. Strecke u. e. Richt. zu 58, hydrodyn. Deut. 59 f. Unabh. inf. Trf. 61. r unabh. inf. Trf. best. e. Schaar v. ∞^r endl. Trf. 65. Ausführ. e. eingl. Gr. auf e. inf. Trf. 141. Bezieh. zw. d. inf. Trf. e. r-gl. Gr. 150, das Bestehen d. Bez. ist nothw. u. hinr., dam. r unabh. inf. Trf. e. r-gl. Gr. erz. I, 158, III, 583—588, 590—597, 658—661, d. Const. c_{iks} in diesen Bez. I, 170, III, 598 (s. Zusammens.). Enthält e. r-gl. Gr. d. inf. Trf. Xf u. Yf, so enth. sie auch $aXf + bYf$ u. (XY): I, 77, 151, III, 576 ff. Neue Ableit. der Bed. f. d. inf. Trf. e. r-gl. Gr. a. d. grdl. Dgl. III, 578—581. Wann sind r geg. unabh. inf. Trf. i. e. r-gl. G. enth. III, 583—588. Inf. Trf. versch. O. s. Ordn. Schaaren v. inf. Trf. s. Schaar. Abbild. d. inf. Trf. e. r-gl. Gr. a. d. Punkte e. ebenen R_{r-1} I, 287, III, 672 f. *Inf. proj. Trf.* I, 554 f.; i. hom. Form I, 579; d. b. ihn. inv. Fig. I, 580 ff., 585. Reduct. a. e. einfache Form I, 584. *Infinit. BT.* Best. all. inf. BT. d. R_{n+1} II, 250—252 (s. charakt. Fct.), Form ihres Symb. II, 252, unabh. inf. BT. II, 255. D. inf. BT. m. d. char. Fct. W lässt d. Gl. $W = 0$ inv. 256. Infin. BT. i. d. x, p 261, inf. BT., d. d. Ausdr. $dz - \Sigma p\,dx$ inv. lassen 258 ff., inf. hom. BT. 262 f., unabh. inf. hom. BT. 264. Sind Af u. Bf inf. BT. m. geg. char. Fct., so ist d. char. Fct. v. (AB) zu best. 1) b. hom. inf. BT. 266. 2) b. inf. Trf., d. d. Ausdr. $dz - \Sigma p dx$ inv. lass. 270. 3) b. inf. BT. i. z, x, p II, 275, III, 759. 4) b. inf. Trf. v. d. Form $(\varphi f)_{xp}$ II, 270. Uebergang v. d. inf. BT. i. z, x, p zu d. inf. hom. BT. u. umgek. II, 273, inf. PT. als inf. hom. BT. II, 265 (vgl. char. Fct., endl. cont. Gr.).

Integrable Gr. Definition III, 679, Berechtig. d. Namens III, 709. Krit. f. d. Integrab. III, 680 f. Eigensch. d. integr. Gr. I, 265—270. Integr. proj. Gr. III, 681, I, 589, Th. 105. Zur Best. all. integr. proj. Gr. d. R_n III, 262. Charakt. Eigensch. d. nicht integr. Gr. III, 757 (vgl. Untergr.).

Integralconoid e. part. Diffgl. 1. O. III, 341.

Integralcurven e. sim. Syst. I, 99.

Integralfunctionen e. sim. Syst. I, 83, e. Syst. v. tot. Diffgl. 92.

Integralgleichungen, vollst. Integr.-gl. e. sim. Syst. I, 82, e. unbeschr. integr. Syst. v. tot. Diffgl. 93.

Integrationsprobleme III, 665, e. lin. part. Diffgl. 1. O., d. e. Gr. gest. 708. Reduct. a. d. einfachsten Hülfsgl. 708—712.

Intransitiv s. transitiv. Jede intr. Gr. d. R_n zerlegt d. R_n in invar. Mann. I, 215 f. E. intr. Gr. d. R_n transf. u. Umst. d. einzelnen inv. Mann. d. R_n d. e. hol. isom. Gr. I, 310.

Invariant s. Fct., Glsyst., vollst. Syst., Pfaffsche Gl. Best. aller Trf., d. e. r-gl. Gr. inv. lassen I, 360 f. — Inv. bleiben s. gestatten. — *Inv. Ugr.* e. r-gl. Gr. I, 260 f., 280. Beisp. v. inv. Ugr.: d. derivirten Gr. III, 679, I, 261, Satz 6. D. Deriv. e. inv. Ugr. I, 262, Satz 7, III, 679, andr. Beisp. I, 264 f., 307, 309 (s. auch gleichber. u. integr.). Bezieh. zw. zwei inv. Ugr. e. r-gl. Gr. I, 264. Wann giebt es e. inv. $(r-1)$-gl. Ugr. I, 263, 577, III, 692, 756. Bild e. inv. Ugr. i. d. R_r d. endl. Trf. I, 280, i. d. R_{r-1} d. inf. Trf. III, 673. D. inv. Ugr. liefern d. Zuss. aller m. d. r-gl. meroedr. isom. Gr. I, 300—305. Verhalten e. Figur, d. b. e. invar. Ugr. inv. bleibt, gegenüb. d. r-gl. Gr. I, 586, III, 108. Allg. Sätze ü. d. Exist. inv. Ugr. III, 688, 691, 694, 697.

Invariante (absolute) e. Trf. u. e. Gr. I, 95 f., d. Inv. e. eingl. Gr. I, 97. D. Inv. e. r-gl. Gr. 215, ihre Best. ohne Integr., wenn d. endl. Gl. d. Gr. geg. sind 218. Invarianten e. Fctsyst. gegüb. BT. II, 178. Invar. mehr. Punkte, s. Punkt.

Invariantentheorie d. BT. II, 176 ff.

Inverse, d. inv. Trf. e. Trf. I, 2. D. z. d. Trf. e. Gr. inv. Trf. bilden e. Gr. I, 19. D. Exist. paarw. inv. Trf. i. e. Gr. nicht v. vornh. sicher 22. D. inv. Trf. d. Trf. e. eingl. Gr. i. d. kan. Form 52 f. (s. endl. cont. Gr.).

Involution, i. Invol. liegen u. Involsyst. II, 97. Eigensch. e. $(n+1)$-gl. Involsyst. i. z, x, p II, 97 f., jedes solche Involsyst. best. e. BT. 124. Jedes m-gl. Involsyst. in x, p best. e. m-gl. vollst. Syst. 174. E. Invols. i. $2n$ Ver. x, p ist höchstens n-gliedrig 176.

Irreducible u. reducible Gr. v. BT. II, 369. Kriterien für d. Reducib. 1) b. Gr. v. hom. BT. II, 371—376. 2) b. Gr. v. BT. i. z, x, p 376 f. 3) b. Gr., d. d. Ausdr. $dz - \Sigma p dx$ inv. lass. 377. 4) b. Gr. v. reell. BT. III, 384. — Kriterien f. d. Irred. e. Gr. v. BT. d. Eb. II, 390—393, irred. Gr. v. BT. d. Eb. als Gr. v. PT. d. R_3 394 f., d. inf. Trf. 1. O., d. e. solche Gr. enth. 410 f. Es giebt nur 3 solche Gr. 433 Th. 69 (s. Diffgl.). Neue Form d. Gr. (Gr. v. BT., d. Kreise i. Kr. überf.) 440—442. Als Gr. v.

PT. d. R_3 ist nur eine v. ihn. prim. 445, d. 10-gl. ist einf. 437. Ihre Ueberf. i. proj. Gr. d. R_3 445 (s. lin. Compl.). Gew. irr. Gr. v. BT. d. R_{n+1} II, Kap. 25, ihre Defin. II. 470 f., ihre inf. Trf. 1. O. 475, ihre char. Fct. 479 f., 483. Es giebt nur drei: 513, d. b. ihn. inv. Syst. v. Diffgl. v. niedr. O. 516. Neue Form d. Gr. 517, inv. Schaaren v. Element-M_n b. diesen neuen Gr. 518 f. Nur eine d. gef. Gr. ist einf. u. als Gr. v. PT. d. R_{2n+1} prim. 521, 501, 505, 513. D. Gr. lassen sich i. proj. Gr. d. R_{2n+1} überführen II, 522 (s. lin. Compl.). — d. allg. proj. Gr. d. Eb. ist dch. imag. BT. m. e. reellen irred. Gr. v. BT. d. Eb. ähnl. III, 384 f., 761. E. 14-gl. irr. Gr. v. BT. d. R_3 III, 763.

Isolirte Punktfiguren III, 108.

Isomorph s. Isomorphismus u. gleichzusges. Zw. Gr. sind isom. a. ein. bezog. I, 293. Zu jed. Gr. giebt es eine isom. lin. hom. Gr. I, 294 (vgl. inv. Ugr., primitiv, Mann., Schaar).

Isomorphismus 1) holoedr. s. gleichzusges. 2) meroedr. I, 292 f. u. III, 701 Anm. Verschied. Defin. d. meroedr. Is. I, 293. Uebereinst. beid. Defin. I, 420—424, III, 661 f. Best. all. Zuss., d. e. mit e. geg. r-gl. Gr. mero. isom. Gr. haben kann I, 300—305. Bezieht m. e. $(r-q)$-gl. Gr. isom. a. e. r-gl. isom., so entspr. e. gew. inv. Ugr. d. r-gl. d. id. Trf. I, 303, jeder (inv.) Ugr. d. r-gl. entspr. e. (inv.) Ugr. d. $(r-q)$-gl. I, 302 f.

Jacobische Identität, 1) d. specielle zw. inf. PT. I, 94, ihre begr. Deutung III, 757. 2) d. allg. zw. Fct. der x, p II, 171 ff., ihr Ursprung i. d. Th. d. inf. BT. II, 270, ihre begr. Deutung II, 278—280. Tragweite d. Jac. Id. III, 604—606 (vgl. Ident.).

Kanonische Form d. endl. Gl. e. r-gl. Gr. I, 171, sie ist eind. best. III, 609. Red. d. endl. Gl. e. r-gl. Gr. a. d. kan. F. III, Kap. 26. D. Probl. kommt a. d. Integr. e. sim. Syst. hinaus III, 611, v. dem m. gew. Integralgl. kennt 612 f. Wann d. Probl. ohne Integr. lösbar ist 614. Eigensch. d. bekannt. Integrgl. 614—618, Zurückführ. a. Quadraturen 618—624 (vgl. asyst.; adj. Gr.; Pargr.). Kanon. Form e. Fctgr. II, 194. Red. d. Fctgr. a. d. kan. Form II, 194—197. K. F. e. hom. Fctgr. II, 220, Red. a. d. k. F. 221—224.

Kanonische (homogene) Fctgr. II, 198, 224. Jede r-gl. k. (hom.) Fctgr. i. $2n$ Ver. x, p gehört $2n$-gl. k. (hom.) Fctgr. an II, 203, 225 f.

Kanonische Pargr. s. Pargr.

Klammersymbol, -operation, -ausdruck b. inf. PT. I, 94. Unabh. d. Klammausdr. v. d. Wahl d. Veränd. I, 84, d. eckige Kl. $[uv]$ II, 88, das allg. Klammersymb. $(uv)_{xp}$ II, 100. Verhalten v. $[uv]_{zxp}$ b. BT. i. z, x, p II, 123. Verh. v. $(uv)_{xp}$ b. BT. i. x, p II, 131. Uebergang v. ( ) zu [ ] II, 143 f. D. Symb. $\{uv\}$ II, 320, d. Symb. $|uv|$ II, 235, 335. Klammersymb. als Multiplicationsop. III, 749, 752.

Kleinste b. e. Gr. inv. Mann., d. e. Punkt angehört I, 224 f.

Krümmungsmass s. Riemannsches.

Lagen, d. e. Mann. b. e. r-gl. Gr. annimmt I 480 f., d. Trff. d. Gr., d. eine dieser Lagen i. e. andr. überf. 481. Zahl d. Lagen I, 482. D. Inbegr. d. Lag. wird d. e. isom. Gr. trf., deren Gliederzahl zu best. ist I, 483.

Linear abgeleitet, e. inf. Trf. ist aus and. lin. abg. I, 61.

Lineare Gruppe, d. allg. l., d. spec. l., d. allg. l. hom., d. spec. l. hom. I, 556 f., d. inv. Ugr. d. Gr. I, 560—562. Best. d. lin. Gr. i. R_n I, 570 f., d. lin. Gr. d. R_n, d. d. unendl. fern. Ebene ebens. trf., wie d. allg. lin. Gr. I, 574, gew. Ugr. d. allg. l. u. d. spec. lin. Gr. d. R_n III, 269, 271. Best. d. lin. hom. Gr. d. R_n I, 574 ff. Jede r-gl. Gr. d. R_n ordn. jed. P. e. gew. lin. hom. Gr. zu I, 603, Verh. dies. Gr. b. Einf. neu. Ver. 602. Lin. hom. inf. Trf. I, 580 f., Red. a. e. Normalf. 584 f., lin. hom. Gr., d. ebensoviele unabh. alg. Inv. haben als s. unabh. Inv. haben III, 802 (vgl. Ebene, Raum, algebr.).

Linearer Complex, d. proj. Gr. e. lin. Compl. i. R_3 II, 446 ff., ihre grösst. Ugr. II, 455, Meth. z. Best. all. ihr. Ugr. III, 258—262. Best. all. ihr. Ugr. III, 810. Alle Gr. v. PT. i. mögl. wen. Ver., d. m. ihr glchzusg. sind (s. conf. Gr.) II, 460, d. proj. Gr. e. Ger. i. R_3 als Ausartung d. Gr. d. lin. Compl. III, 247. D. proj. Gr. d. lin. C. i. R_{2n+1} II, 522, III, 295, ihre grösst. Ugr. III, 778.

Linienelement = Punkt m. zugeordn. Richt. I, 525. Wie d. Linel. d. R_n b. e. Gr. d. R_n trf. werden I, 525, wie die Linel. d. e. festgeh. Punkt trf. w. I, 601. — Linel. i. d. Ebene II, 4, d. Linel. e.

Punktes od. e. Curve i. d. Eb. II, 12. D. Linel. d. Eb. als Punkte i. R_3 II, 393 f. Jedes Linel. d. Eb. best. e. gew. inf. proj. Trf. III, 89 ff.

Mannigfaltigkeiten, d. inf. Trf. gest. I, 133—136 (vgl. Glsyst.). Gest. e. Mann. e. r-gl. Gr., so werd. ihre Pkt. d. e. isom. Gr. trf., d. endl. u. d. inf. Trf. d. Gr. I, 233 f., 308 (vgl. Lage u. Schaar). Mannigfalt. 2. Gr. s. proj. Gr.

Meroedrisch s. Isomorphismus.

Monodromieaxiom, d. Helmholtzsche III, 439. e. Gr. d. R_3, d. d. Mon. erfüllt, nicht ab. d. übr. Hschen Ax. III, 457 bis 460, 468. D. Mon. ist überfl. 469 f. D. Bew. Kleins dafür ist unrichtig 528 f.

Nichtanalytische Gr. s. reelle.

Nichteukl. Bew. s. Eukl. Alle Gr. v. nichteukl. Bew. i. R_3 III, Kap. 10. Gruppenth. Charakt. d. beiden Art. v. nichteukl. Bew. i. R_3 III, 538.

Normalreihen v. Ugr. e. r-gl. Gr. III, 704, Sätze über sie 704, 765.

Normirung d. inf. Trf. k-ter O. e. endl. cont. Gr. I, 610, d. char. Fct. e. Gr. v. BT. II, 547.

Operationen, Gr. v. O. I, 26, III, 671.

Ordnung e. inf. Trf. i. d. Umg. e. P. I, 191. Maximum d. Ordn. i. e. endl. cont. Gr. I, 191, 606. Wieviele unabh. inf. Trf. 1. u. höh. O. enth. e. endl. cont. Gr. i. d. Umg. e. P. 199 f. D. inf. Trf. k-ter u. höherer O. erz. e. Ugr. 205, 263 f., d. inf. Trf. 1. O. best., wie d. Linel. durch e. festgeh. P. trf. werden 601.

Parameter, Einführ. neuer Par. i. e. r-gl. Gr. I, 23.

Parametergruppe, d. erste Pargr. e. r-gl. Gr. I, 402—404, III, 638 f. Ihre grundl. Diffgl. u. ihre inf. Trf. I, 405 f., s. ist m. d. $r$gl. Gr. glchzgs. 407. Best. d. endl. Gl. d. Pargr. aus ihren inf. Trf. 411. Wie ändert sich d. Pargr. b. Einf. neuer Par. 411 f. Zwei Gr., d. d. Pargr. gemein haben, könn. d. Einf. neu. Par. glchz. a. d. kan. Form. gebr. w. u. sind dah. glchzusgs. 417, d. rec. Gr. d. ersten Pargr. ist d. zweite Pargr. I, 428, III, 638 f. Bildung d. inf. Trf. beid. Pargr. a. d. endl. Gl. e. r-gl. Gr. III, 639—642. D. Pargr., d. z. d. kan. Form d. endl. Gl e. r-gl. Gr. geh., heissen kan. Pargr. III, 656 f. Berechnung d. inf. Trf. d. beid. kan. Pargr., sie sind d. d. Zuss. d. betr. Gr. best. III, 642—655, Form d. inf. Trf. 651, 654, gew. Potr. f. d. inf. Trf. d. kan. Pargr. III, 795 f., Quot. best. conv. Potr. III, 794 f., d. Nullstellen d. gemeins. Nenn. dieser Quot. III, 760. Andre Meth. z. Berechn. d. inf. Trf. e. Pargr., d. zu e. r-gl. Gr. v. geg. Zuss. geh. III, 803 ff.

Pfaffsche Gl. u. Ausdr. I, 529 (s. gestatten). E. Glsyst. genügt e. Pf. Gl. II, 12 f., 40—44. D. Glsyst., d. der Pf. Gl. $dz - \Sigma p dx = 0$ gen. II, 78—83, d. d. Gl. $\Sigma p dx = 0$ gen. II, 83 f. Zusammenh. zw. beid. u. begriffl. Deut. d. Zush. 85 f. Eigensch. d. $(n+1)$-gl. Glsyst. i. z, x, p, d. d. Gl. $dz - \Sigma p dx = 0$ gen. (Element.-M_n d. R_{n+1}) 88—96, Eig. d. n-gl. Glsyst., d. d. Gl. $\Sigma p dx = 0$ gen. 101. Es giebt nur 1 Pf. Gl., der alle Element-M_1 d. Eb. genügen II, 15, entspr. i. R_3 u. i. R_{n+1} 61, 157. Infin. Trf., d. d. Gl. $dz - \Sigma p dx = 0$, d. Ausdr. $dz - \Sigma p dx$ u. d. Ausdr. $\Sigma p dx$ inv. lass. s. inf. BT. Geom. Deut. d. Gl. $dz - y dx = 0$ i. R_3: II, 394, d. Gl. $dz - \Sigma y dx = 0$ i. R_{2n+1}: 466. Syst. v. 2 Pf. Gl. i. R_4 III, 761 f.

Poissonsches Theorem II, 173, Verallg. 281 f.

Polargr. s. recipr. Fctgr.

Primitiv u. imprimitiv, jede impr. Gr. d. R_n best. e. inv. Zerlegung d. R_n: I, 220 f. Zu jed. impr. Gr. gehört e. isom. (verkürzt.) Gr. I, 222, 307. Best. all. inv. Zerleg. b. e. trans. Gr., Best. all. prim. Gr. v. geg. Zuss. 522. Primitivität b. Gr. v. hom. BT. II, 305 f., b. Gr. v. BT. i. z, x, p II, 322. Kriterien f. d. Primit. e. Gr. v. PT. d. Ebene III, 30—34. Obere Gränze f. d. Gliederz. d. endl. cont. prim. Gr. d. R_n III, 313. Prim. u. impr. *reelle* Gr. III, 363, reell prim. Gr. III, 473. Satz üb. d. Imprim. gew. Gr. d. R_4 III, 762.

Projektive Gr., d. allg. d. R_n I, 554, ihre inf. Trf. u. ihre Zuss. 555, sie lässt sich hol. isom. auf sich beziehen 555, 569, sie ist einf. 560. Ihre grössten Ugr. I, 569, III, 279, Th. 16. Darstell. proj. Gr. d. R_n i. homog. Coord. I, 578 ff. Wie entscheidet man, ob e. proj. Gr. dch. nichtproj. Trf. i. e. proj. Gr. übergeh. kann? III, 284, Anw. a. d. allg. proj. Gr. d. R_n III, 285—288. D. proj. Gr. e. Mann. 2. Gr. i. R_n (vgl. conf. Gr.) III, 292, 334, 353 f., wann sie einf. ist 357, ihre grösst. Ugr. III, 809, sie steckt i. kein. gröss. cont. Ugr. d. allg. proj. Gr. 357 f., sie steckt nur i. 2 endl. cont. Gr. d. R_n, i. d. allg. proj. u. i. ein., d.

m. d. conf. Gr. ähnl. ist III, 354, 359 (vgl. freie Bewegl., Ebene u. Raum). Proj. Gr., i. denen jed. endl. Trf. v. e. inf. Trf. d. Gr. erz. ist 762. Gr., d. aus all. proj. Trf. best., d. m. d. Trf. e. proj. Gr. vert. sind 779 (s. auch Gerade, Ebene, Raum). Proj. Gr. v. geg. Zusamms. III, 785—788.

Pseudogerade b. gew. Gr. d. R_4 III, 518, d. R_n 522.

Pseudokugeln b. gew. Gr. d. R_3 III, 402, 507. d. R_4 u. R_n 516, 521. Bezieh. zw. d. Punkt. ein. Pseudokugel u. d. Linienel. dch. ihr Mittelp. 459 f., 542 f.

Punkt, nur solch. P. w. betr., i. den. s. alle inf. Trf. d. r-gl. Gr. regulär verh. I, 171, dagegen brauch. s. d. Coeff. i. d. aufgel. Defingl. nicht regul. zu verh. 189, 198. Punkte v. allg. Lage gegüb. e. r-gl. Gr. 203, 498. Best. all. inf. Trf. e. r-gl. Gr., d. e. P. inv. lass. 201—203. Diese inf. Trf. erz. e. Ugr. 205, Satz 2. Invar. e. P. u. mehrerer P. gegüb. e. r-gl. Gr. 216, 218—220 (s. wesentl.). B. e. r-gl. Gr. v. PT. d. R_n hab. $n+3$ P. immer e. Invar. III, 301 (vgl. transitiv), ab. alle Inv. v. belieb. viel. P. lassen sich d. d. Inv. v. Syst. v. je r P. ausdr. III, 297. Gr. v. PT. d. R_3, b. den. 2 P. nur 1 Inv. haben u. mehr als 2 P. keine wes. Inv. III, Kap. 20, d. Pseudokugeln e. solch. Gr. III, 402. Darst. d. endl. Gl. e. solch. Gr. d. d. Inv. v. Ppaaren 404. Char. Eig. d. Gr. 405, 408, 409. Wann haben 2 P. b. e. sechsgl. Gr. d. R_3 1 u. nur 1 Inv. 406. D. prim. unt. d. ges. Gr. 410 f. Klassif. d. impr. 411—413, ihre Best. 414—425. Tabelle aller d. Gr. 426. Erled. d. Probl. f. reelle Gr. d. R_3 427—433. Tab. d. reell. Gr. 433 f. Welche unt. d. Gr. können i. proj. übergeführt w. 426 f., 538—542, d. entspr. Gr. i. d. Ebene 435—437. — Haben 2 endl. entfernte P. b. e. Gr. v. PT. e. Inv., so auch 2 unendl. benachb. 500, Kriterium f. d. Existenz e. Inv. v. 2 unendl. benachb. P. 503 f., wenn eine hom. Inv. 1. O. exist. soll 504 f. (vgl. Bogenel.).

Rang, e. r-gl. Gr. III, 773, d. Gr. v. Range Null 774 f.

Rationale Raumcurven 3. O. i. R_3. Ihre proj. Gr. als Ugr. d. Gr. d. lin. Compl. II, 451, III, 259. Eigensch. ihrer proj. Gr. III, 187—190. D. proj. Gr. e. rat. Curve n-ter O. i. R_n III, 187.

Raum, der gewöhnl. 1) *alle lin. hom. Gr. d.* R_3 III, Kap. 6, Tabelle III, 116—119. 2) *endl. cont. Gr. v. PT. d.* R_3. a) d. primit., mögl. Fälle III, 123 f., ihre Best. 124—137, Zusammenst. 139 f., d. einf. unt. ihn. 140. b) imprim. α) Gr. m. e. inv. Schaar v. ∞^1 Flächen, d. sich nicht in e. inv. Schaar v. ∞^2 Curv. zerlegen lässt 142—154. β) Gr. m. e. inv. Schaar v. ∞^2 Curv., d. sich nicht i. e. inv. Sch. v. ∞^1 Fl. anordnen lässt 154—170. γ) d. übrigen 170—178 (vgl. Punkt). 3) *d. proj. Gr. d.* R_3 a) solche, d. e. Curv. od. e. Fläche inv. lassen u. dad. defin. sind III, Kap. 9. b) d. proj. Gr. d. Fl. 2. Gr. (Gr. d. nichteukl. Bew.) III, Kap. 10, Tabelle ihr. Ugr. 203 f., d. b. ihr inv. Schaar. v. ∞^4 Curv. 206 f., d. Ugr. e. m. ihr zushäng. 7-gl. hom. Gr. d. R_4 207 ff. c) d. Gr. d. Eukl. Bew. u. Aehnltrf. III, Kap. 11, Tabelle ihr. Ugr. 214—217, Curven u. Fl., d. b. ihr gerade ∞^4 Lagen ann. 220 ff. Curven, d. b. d. Gr. d. Eukl. Bew. gerade ∞^4 Lag. annehmen 223. d) Best. d. prim. proj. Gr. d. R_3 III, 224—232, Zusammst. 226 f., allg. Satz üb. d. proj. Gr. d. R_3 235. e) d. impr. proj. Gr. d. R_3, allg. Eigensch. 232—234, alle, d. keine ebene Mann. inv. lassen 236, d. e. Ebene od. Gerade inv. lassen 237—246, 247—258.

Raum v. n Dimens. Zur Best. all. proj. Gr. d. R_n, d. e. eb. Mann. inv. lass. 262 (vgl. proj. Gr., Aehnlichktrf., transitiv).

Reciproke Fctgr. (Polargr.) II, 184 f., b. e. hom. Fctgr. 217. Begriffl. Deut. d. Polargr. 260.

Reciproke einf. trans. Gr. Kennt man d. inf. Trf. zweier solcher Gr., so kann man durch Quadr. d. endl. Gl. beider Gr. i. d. kan. Form finden III, 634, rec. einf. tr. lin. hom. u. proj. Gr. III, 779 f. (vgl. einf. trans.). *Reciproke Fctgr.* (Polargr.) II, 184 f., b. e. hom. Fctgr. II, 217. Begriffl. Deut. d. Polargr. II, 260 (s. Fctgr.).

Reciproke Radien, d. Gr. d. r. R., s. conforme Gr.

Reducibel. s. irreducibel.

Reelle Gr. 1) analytische III, 360—365. 2) nicht analyt. III, 365—368. Unt. gew. Bed. ist jede trans. reelle nichtan. Gr. m. e. reellen analyt. ähnl. 366, 792 (vgl. Gerade, Ebene, Raum, proj. Gr., prim., irred.).

Reihenentwickelungen f. d. inf. Trf. e. Gr. I, 189 f. (s. Ordnung). Rechnen m. d. Reihentw.: d. Glieder niedr. O. i. (XY) sind durch d. Gl. niedr. O. i. Xf u. Yf bestimmt I, 193. Verhalten d. Gl. niedr. O. b. Einführ. neu. Ver. 196 f.

Reihenentw. f. d. char. Fct. inf. BT. i. d. Umgebung v. $z = x_\nu = y_\nu = 0$ II, 524 ff., i. d. Umg. e. bel. Werthsyst. II, 535. D. Gl. niedr. Stufe i. d. char. Fct. $\{uv\}$ sind durch die Gl. niedr. Stufe i. u, v best. II, 527. Verh. d. Gl. niedr. Stufe b. Ausf. e. endl. BT. II, 527—531.

Repräsentant e. Typus v. Gr. od. Ugr. I, 435, 281.

Richtung, d. e. einf. Trf. od. e. lin. part. Diffgl. e. Punkt zuordn. I, 58, 101. unabh. Richt. i. e. Punkt 102, 106. q unabh. lin. part. D. best. i. jed. P. e. eb. Bündel von ∞^{q-1} Richt. 102 f. Wieviele unabh. Richt. ordn. e. r-gl. Gr. e. Punkt zu 200 ff. D. Zahl dies. unabh. Richt. i. e. Punkte v. allg. Lage entsch. üb. Trans. u. Intrans. 217.

Riemannsches od. Riemann-Helmholtzsches Problem III, 397, 535. Lösung d. Pr. dch. Axiome im Infin. III, Kap. 22, d. Axiome i. Endl. III, Kap. 23 (s. Axiome u. freie Bewegl.). Nutzen d. Erled. d. Probl. III, 536 f. Riemannsches Krümmungsmass e. R_n m. beständig pos. quadrat. Bogenel. III, 486, 489. Räume m. const. Riem. Krümmungsm. III, 489 f.

Schaar 1) (lineare) *Schaar v. inf. Trf.*: Kriter. f. d. Invarianz d. Schaar $\Sigma e_k X_k f$ b. e. Trf. I, 246, b. e. eingl. Gr. 249—252, b. e. inf. Trf. 250. Best. d. eingl. Gr., durch d. $e_1 \ldots e_r$ trf. werden 253. Gleichz. bleibt auch d. Sch. d. eingl. Gr. $\Sigma e_k X_k f$ inv. 255. Wann bleibt d. Sch. d. endl. Trf. $\Sigma e_k X_k f$ bei jed. ihr angeh. Trf. inv.? 256, d. Sch. bild. d. e. Gr. 257 f. 2) *Schaar v. Mann.*, d. b. e. eingl. Gr. inv. bleibt I, 143 (s. gestatt. u. wesentl.). Gest. e. Sch. v. Mann. e. Gr., so werd. d. Mann. d. Sch. d. e. isom. Gr. vert. 472, Satz 5. Wieviele inf. Trf. d. Gr. gest. e. Mann. v. allg. Lage d. Sch.? 475—479. Best. all. Sch. v. Mann., die b. e. r-gl. Gr. inv. bleib. 484 f. Sch. v. ebenen M. s. Umhüllungsfig. 3) *Schaar von* ∞^r *endl. Trf.* I, 11—14. Bezieh. zw. 2 unendl. benachb. Trf. d. Sch. u. gew. inf. Trf. III, 547 f. Jede Sch. v. ∞^r endl. Trf. ordnet jed. ihr. Trf. 2 (lineare) Sch. v. je ∞^{r-1} inf. Trf. zu III, 549. Ist d. Sch. e. r-gl. Gr., so fallen all. d. Sch. v. inf. Trf. zusammen III, 549—552. Aus jed. Sch. v. ∞^r Trf., d. d. grundl. Diffgl. genügt, lassen sich r-gl. Gr. m. paarw. inv. Trf. herstellen 565. Zw. Sch. von je ∞^r Trf., d. nach ein. ausgef. wied. e. Sch. von ∞^r Trf. erg. III, 566—571. D. beid. Sch. fallen zus. 571 f. E. Sch. v. ∞^r Trf., b. der m Trf. d. Sch. nach ein. ausgef. wied e. Trf. d. Sch. lief. 572—574.

Simultane Systeme v. gew. Diffgl., ihr Zush. mit den lin. part. Diffgl. 1. O. I, 82 f.

Speciell s. linear.

Stufe e. ganzen Fct. v. z, x_ν, y_ν II, 525, St. e. char. Fct. II, 526. Eigenschaften u. Bedeut. d. charakt. Fct. 2. Stufe i. e. endl. cont. Gr. v. BT. 532—535, 542. Bezieh. zw. d. St. e. char. Fct. u. d. Ordn. d. zugeh. inf. BT. 532 f.

Symbol s. inf. Trf., endl. Trf., Klammersymb.

Systatisch s. asyst.

Totale Diffgl. s. Pfaffsche Gl., unbeschr. intgr. u. vollst. Syst.

Transformation, Begr. d. T. I, 1.

Transformationsprobleme (s. auch Aehnl.). Wann lassen sich r geg. inf. Trf. i. r andr. überf. I, 366. Allg. Trfspr. i. d. Th. d. BT. II, 176 f. Wann lass. s. r geg. Fct. $U_1 \ldots U_r$ v. d. x, p d. e. (homog.) BT. i. x, p i. r andre überf.? 1) wenn $U_1 \ldots U_r$ e: r-gl. (homog.) Fctgr. best. II, 209, 229, 2) allgem. II, 209—212, 230—232. Wann lass. s. r Fct. v. z, x, p d. e. BT. i. z, x, p i. r andr. überf. II, 232 f.

Transitiv u. Intransitiv. Begriff I, 212. Kriter. f. d. inf. Trf. d. Gr. 215—217, d. Defingl. genügen zur Entscheid., sogar schon d. Reihenentw. d. inf. Trf. i. d. Umgeb. e. P. v. allg. Lage 217. Trans. u. intr. b. Gr. v. hom. BT. II, 305, b. Gr. v. BT. i. z, x, p II, 322. Trans. u. intrans. b. reell. Gr. III, 362 (vgl. reelle Gr.). Rationale Zahlen als Mass f. d. Trans. e. r-gl. Gr. III, 746 f. Best. all. trans. Gr. v. geg. Zuss. durch Integr. gew. Diffgl., wenn e. Gr. v. dies. Zus. bekannt ist I, Kap. 22 u. S. 487 ff. Aufzähl. d. versch. Typen v. trans. Gr. v. geg. Zuss., durch algebr. Oper. I, 446, Th. 81. Best. all. r-gl. intrans. Gr. I, 455—458, all. intr. Gr. v. geg. Zuss. I, 458. Best. all. trans. Gr. v. geg. Zuss., wenn blos d. Zuss. geg. ist u. zwar d. endl. Gl. u. d. inf. Trf. durch Quadr. III, 662—665, d. inf. Trf. all. dch. ausf. Opp. III, 797 ff. Jede r-gl. trans. Gr. kann e. solche F. erh., dass ihre inf. Trf. Quot. best. conv. Potr.

werden III, 800. Wann ist e. trans. Gr. asystatisch? I, 520, wann primitiv I, 521. Klassific. d. trans. Gr. d. R_n I, 604 f. Best. all. transit. Gr., für d. man d. Anfangsgl. i. d. Reihenentw. ihr. inf. Trf. i. d. Umg. e. P. v. allg. Lage kennt I, 609—614. Trans. Gr. m. e. inf. Trf. 1. O. v. d. Form: $\Sigma x_\nu p_\nu +\cdots$ I, 618. Best. all. endl. cont. Gr. d. R_n, d. im Inf. mögl. trans. sind I, Kap. 29, m-fach transitiv: I, 631, III, 296, 746. E. endl. cont. Gr. d. R_n ist höchstens $(n+2)$-fach trans. I, 632, III, Kap. 16, S. 301. Jede $(n+2)$-fach trans. Gr. d. R_n ist m. d. allg. proj. Gr. ähnl. III, 308.

Translationen. D. grösst. Gr. v. PT., i. der d. Gr. d. Transl. inv. ist III, 301. Bild e. Gr. von Transl. d. R_n auf d. unendl. fern. Eb. I, 559. Zwei m-gl. Gr. v. Trl. d. R_n sind stets innerh. d. allg. lin. (sogar schon inn. d. speciell. lin.) Gr. d. R_n gleichber. I, 558. D. infin. proj. Trf., d. m. d. inf. Trl. gleichber. sind I, 577, insbes. i. d. Ebene III, 89—91, d. Gl. der v. dies. inf. Trf. gebild. Mann. III, 91.

Typen v. endl. Trf. u. Ugr. e. r-gl. Gr. I, 281. Best. all. Typen v. endl. Trf. I, 282, aller Typ. v. eingl. Ugr. u. inf. Trf. 282 ff. Zushang zw. beid. Aufg. I, 284—287. Bild e. Typus v. inf. Trf. i. d. R_{r-1} d. inf. Trf. III, 675. Best. all. Typ. v. Ugr. e. r-gl. Gr. I, 494—496. Typ. v. trans. u. intr. Gr. I, 434, 455. Typengattung s. Gatt. Typ. v. reellen Gr. III, 364. Typen v. Gr. v. hom. BT. II, 362. Aufzähl. aller solchen Typen v. geg. Zus. ebd. Typ. v. Fctgr. II, 205, v. homog. Fctgr. II, 227. Typen v. Zusammensetz. r-gl. Gr. III, 716, vgl. I, 297 ff.

Umhüllungsfigur e. Schaar v. ebenen Mann. d. R_{n+1} III, 697—700.

Unabhängige inf. Trf. I, 61. Sind $X_1 f \ldots X_r f$ unabh. inf. Trf., so erz. d. ∞^{r-1} inf. Trf. $\Sigma \lambda_k X_k f$ e. Schaar v. ∞^r endl. Trf. I, 65. Aus r unabh. inf. Trf. in n Veränd. kann man r inf. Trf. $W_1 f \ldots W_r f$ in rn Ver. bild., so dass d. r Gl. $W_k f = 0$ v. ein. unabh. sind I, 66. Unabh. Richt. I, 102 (s. Richt.).

Unbeschränkt integrable Syst. v. tot. Diffgl. I, 93, Form d. Lös. e. solch. Syst. 94.

Unendliche cont. Gr., allg. Begriff I, 5 f.

Untergruppe e. r-gl. Gr. I, 204. Sätze üb. d. Exist. v. Ugr. I, 205—207, 473. D. inf. Trf. e. r-gl. Gr., d. e. Glgsyst. inv. lass., erz. e. Ugr. I, 207 f. D. Best. all. cont. Ugr. e. r-gl. Gr. ist e. algebr. Aufg. 210. D. inf. Trf. jed. Ugr. lassen sich durch lin. hom. Gl. defin. 211. D. gemeins. inf. Trf. 2er Ugr. erz. e. Ugr. 211. Ugr. b. e. impr. Gr. 222, inv. Ugr. s. inv.-Bild e. Ugr. i. R_r d. ∞^r endl. Trf. I, 279, i. R_{r-1} d. inf. Trf. III, 673. Ugr. e. Gr., d. keine inf. Trf. v. best. Form enth. I, 562. Best. all. 2-gl. Ugr., denen e. eingl. Ugr. angehört I, 590, vgl. III, 772 f. Existenz 3-gl. u. 4-gl. Ugr. I, 593, III, 756. Wann steckt e. m-gl. Ugr. i. e. $(m+1)$-gl. III, 674. Jede m-gl. integr. Ugr. steckt i. e. $(m+1)$-gl. III, 681. Ugr. e. r-gl. Gr., d. i. kein. grösst. Ugr. stecken III, 694—697. Satz üb. $(r-1)$-gl. Ugr. e. r-gl. Gr. III, 694, 696. (s. endl. cont. Gr.). Kennt m. d. endl. Gl. e. r-gl. Gr., so kann m. dch. Quadr. d. endl. Gl. jed. Ugr. i. d. kanon. Form aufst. III, 625.

Untergr. e. Fctgr. II, 181, Form, auf d. e. Fctgr. m. e. bek. Ugr. gebr. werd. kann II, 201, 207.

Unvollständige BT., d. nur f. gew. Elem. d. R_{n+1} gültig sind II, 153.

Verein v. Elem. s. Elementmann.

Vereinigt liegende unendl. benachb. Linienel. i. d. Ebene II, 21, Flächenel. i. R_3 II, 65, Elem. d. R_{n+1} II, 107 f. Wann geht e. Elem. d. R_{n+1} b. e. inf. BT. d. R_{n+1} i. e. unendl. benachb. El. üb., d. mit ihm verein. liegt? II, 256.

Vertauschbare endl. Trf. I, 2 f., d. Trf. d. eingl. Gr. Xf u. Yf sind dann u. nur d. vert., wenn $(XY) = 0$ (vert. inf. Trf.) I, 259. Sind d. beid. inf. Trf. Yf u. Zf m. Xf vert., so auch (YZ) I, 369. D. Trf. e. r-gl. Gr. sind vert. I, 260. Für $r > 3$ enthält jede r-gl. Gr. zweigl. Ugr. v. vert. Trf. III, 756. In d. einf. ausged. Mann. giebt es keine unabh. vert. inf. Trf. III, 6. Andrer Satz üb. Ugr. m. vert. Trf. I, 264, Satz 9. Gr. v. vert. Trf., d. m. Gr. v. Transl. ähnlich sind I, 339, Satz 1. Best. all. inf. Trf., d. m. d. Trf. e. r-gl. Gr. vert. sind I, Kap. 20, sie erford. d. Int. vollst. Syst. 369—377. Constr. v. endl. Trf., d. m. all. Trf. e. r-gl. Gr. vert. sind I, 510—514 (vgl. einf. trans. Gr.). *Vertauschbare inf. hom. BT.* II,

267. Gr. v. vert. hom. BT. II, 267 f. Best. all. hom. BT., d. m. all. Trf. e. Gr. v. hom. BT. vert. sind II, 318 f.
Vollständige Lösung e. part. Diffgl. 1. O. II, 101, 111.
Vollständige Systeme, Begriff d. q-gl. vollst. S. I, 85, d. Syst. in aufgelöst. Form 86, Zurückf. a. d. Integr. e. Reihe v. lin. part. Diffgl. 1. O. 87—89. Beschaffenheit d. Lösungen (Hauptlös.) 90 f. Zusammh. m. d. unbeschr. integr: Syst. v. tot. Diffgl. 91—94. D. gemeins. Gl. zweier vollst. Syst. bilden e. mit beid. invar. verknüpftes vollst. System 144, ebenso d. lin. part. Diffgl., denen d. gemeins. Lös. beid. genügen 145. Best. all. vollst. Syst., die alle inf. BT. gestatten, b. denen d. Ausdr. $dz - \Sigma p\,dx$ u. d. Fct. $u(x,p)$ inv. bleiben II, 291 f.

Wesentliche Invariante mehrerer P. b. e. r-gl. Gr. I, 219, III, 399 (vgl. Punkte).
Wesentliche Parameter e. Schaar v. endl. Trf. I, 12, Kriterien für d. Wesentl. 13. Hinreich. Bed. dafür, dass i. e. Schaar v. Trf. v. d. Form: $x_i' = x_i + \Sigma e_k \xi_{ki}(x) + \cdots$ d. r Par. $e_1 \ldots e_r$ wesentl. sind 65. Neue Methoden zur Best. d. Zahl d. wes. Par. e. Schaar v. Trf. III, 593, I, 183. Zahl d. wesent. Par. e. Schaar v. Mann. I, 460—463, Zahl d. wesentl. Par. d. Schaar v. Mann., d. aus e. Sch. v. Mann. d. Ausführ. e. r-gl. Gr. entsteht I, 484—487.

Zahlenmannigfaltigkeit, d. Raum als Z. III, 394.
Zerlegung d. R_n. Jedes vollst. Syst. best. e. Zerl. d. R_n u. jede Zerl. lässt sich d. e. vollst. Syst. defin. I, 101. Jed. intr. Gr. best. e. Zerl. d. R_n i. lauter inv. Mann. I, 215 f. E. Zerleg., d. b. e. eingl. Gr. inv. bleibt I, 143. Jede impr. Gr. best. e. inv. Zerl. d. R_n I, 220 f.
Zulassen s. gestatten.
Zusammengesetzte Gr. = nicht einf. Gr., s. einfach.
Zusammensetzung e. r-gl. Gr., d. Zss. ist durch die c_{iks} bestimmt I, 289. D. Relat., denen diese c_{iks} genügen I, 170. Wann stellen 2 versch. Syst. v. c_{iks} dieselbe Zuss. dar I, 290 f. Zu jed. Syst. v. $r^3 c_{iks}$, das jene Relat. erfüllt, gehört e. lin. hom. Gr., d. unt. gew. Bed. r-gl. ist u. d. Zuss. c_{iks} hat I, 296, II, 334. Zu jedem solch. Syst. v. c_{iks} gehör. ferner stets r-gl. Gr. v. d. Zuss. c_{iks} I, 297, Bew. hierfür II, 294—296, unabh. v. d. Th. d. Fctgr. III, 599—604, noch anders III, 795 ff. Betracht. man e. r-gl. Gr. blos i. B. auf ihr. Zuss., so erscheint sie als e. Gr. v. Operat. III, 671. D. Best. aller mögl. Zuss. r-gl. Gr. erford. blos. alg. Oper. I, 300. Invariantenth. Formul. d. Probl. III, 755. D. Probl. d. Best. all. Zuss. als Probl. a. d. Th. d. höh. compl. Zahl. III, 749. Untersuch. üb. d. Zuss. r-gl. Gr. III, Kap. 28. Alle Zuss. v. 2-gl. Gr. III, 713, v. 3-gl. Gr. III, 713—722, Tabelle 716, v. 4-gl. Gr. 722—733, Zusammenst. 732, Zuss. d. 5-gl. u. d. 6-gl. nicht integr. Gr. 733—737, 737—744. Allg. Form für d. Zuss. e. endl. cont. Gr. III, 778 (vgl. einf., endl. cont. Gr., integr. Gr., adj. Gr., trans., prim., asyst.).
Zusammensetzung e. r-gl. Fctgr. II, Vorr. Charakt. Eig. d. Zuss. II, 234. r^2 Fct. $\omega_{ik}(\varphi_1 \ldots \varphi_r)$, d. gew. Bed. genügen, stellen imm. d. Zuss. e. r-gl. Fctgr. dar II, 241, Th. 37. Best. e. solchen Fctgr. II, 238—241, anders 243 f., Best. d. Zahl d. ausgez. Fct. d. Fctgr. ohne Integr. 242 f. Sind d. ω_{ik} hom. v. 1. O. i. d. φ, so giebt es stets r unabh. hom. Fct. 1. O., d. e. r-gl. hom. Fctgr. v. dieser Zuss. best. 244—248. Best. d. Zahl d. ausgez. Fct. u. d. ausgez. Fct. nullt. O. ohne Integr. 249.
Zuwachs (Increment) e. Ver. u. e. Fct. b. e. inf. Trf. I, 53.

Namenregister

zu Abschnitt I, II und III.

Abel: III, Widm.
Ampère: II, 114 f., III, Vorr.
Appell: III, Vorr.
Aronhold: I, Vorr.

Beltrami: III, Vorr., 810.
Bernoulli: III, Vorr.
Bohlmann: III, 815.
Bolyay: III, 393 f.
Boole: I, 91.
Bouquet: I, 91.
Bour: II, 129.
Briot: I, 91.

G. Cantor: III, 395, 679.
Cartan: III, Vorr., 763, 765, 771, 776 f., 810.
Cartesius: III, Vorr.
Cauchy: I, Vorr., 1, 91, 585; II, 89; III., Vorr.
Cayley: I, Vorr., 552; III, Vorr., 666, 749.
Chasles: II, 447.
Christoffel: III, Vorr., 355, 395.
Clebsch, I, Vorr., 82, 85, 86; II, 34 f., 99, 148; III, 530.

Darboux: I, Vorr., 91; II, 144; III, Widm., Vorr., 139, 351.

Engel: I, Vorr. u. S. X, 165, 429, 501; II, Vorr., 106, 526, 528; III, Widm., Vorr., 325, 384, 598, 754—768, 771, 774 f., 777, 785, 792, 794, 798, 808.
Euklid: III, Vorr., 393.
Euler, II, 114 f.; III, Vorr.

Galois: I, Vorr.; III, Widm., Vorr., 666, 811.
Gauss: III, Vorr., 394, 489, 749, 810.
Gergonne, III, Vorr.
Gordan: I, Vorr.
Grassmann: III, Vorr., 534 f., 748, 752.

Halphen: I, 553; III, Vorr., 55.
Hamilton: III, 749.
Hankel: III, 749.
v. Helmholtz: I, Vorr.; III, Vorr., 396—398, 437—471, 475, 486, 498 f., 508, 523, 527 ff.
Hermite: I, Vorr.
Hesse, III, Vorr.
Hindenburg: III, Vorr.
Hölder, III, 765.

Jacobi: I, Vorr., 82; II, 92, 97, 113 f., 129, 148, 171, 173, 175; III, Vorr.
C. Jordan: I, Vorr., 81, 293; III, Vorr., 385, 666, 704.

Killing: I, 261; III, Vorr., 296 f., 325, 524, 527, 532—534, 754, 756 f., 763, 768—778, 809.
F. Klein: I, Vorr., 3, 212; II, 451; III, Vorr., 86, 139, 185, 357, 397, 524, 528 f.
Knothe: III, Vorr., 258, 810.
Korkine: II, 187.
Kowalewsky: I, 91.

Lagrange: I, Vorr.; II, 18, 129; III, 133.
Laguerre: III, Vorr., 55.
Lambert: III, Vorr.
Lamé, III, Vorr., 810.
Legendre: II, 69; III, Vorr., 393.
Lindemann: II, 34; III, Vorr., 524, 529 f., 810.
Liouville: III, 137, 351.
Lipschitz: III, Vorr.; 325, 355, 395, 534, 771, 776.
Lobatschewski: III, Vorr., 393 f.
Loria: III, 139.

Maurer: III, Vorr., 581, 754, 796, 800 ff.
A. Mayer: I, Vorr., 86, 91; II, Vorr., 99, 122.

Minding: III, Vorr., 810.
Möbius: II, 447.
Molien, III, 784.
Monge: I, 100; III, Vorr., 126.

Noether: III, 138 f.

Page: III, Vorr., 807 f.
Painlevé: III, Vorr., 811.
Pfaff: I, Vorr.; II, 89, 148.
Picard: I, Vorr.; III, Widm., Vorr., 753, 811 f., 815.
Plücker: II, 17 f., 447; III, Vorr.
Poincaré: I, Vorr.; III, Vorr., 437, 750 f., 779.
Poisson: I, Vorr., 545; II, 129, 171, 173.
Poncelet: II, 69; III, Vorr.

Reye: III, 139.
Riemann, I, Vorr.; III, Vorr., 355, 394—397, 472, 485—499, 535 f., 770.

Saccheri: III, Vorr.
Scheffers: III, Vorr., 754, 783 f., 809 f. 812.
Scheibner: III, 789.
Schur: II, Vorr.; III, Vorr., 564, 599, 754, 759 f., 788 ff., 806.
Schwarz: I, 552 f.; III, 133.
Stäckel: III, Vorr., 811.
Staude: III, Vorr., 811.
Stephanos: III, 12.
Study: III, Vorr., 754, 762, 778 ff.
Sylvester: I, Vorr., 553; III, Vorr.

de Tannenberg: III, Vorr., 128, 810.
J. Tannery: III, Widm.
W. Thomson: III, Vorr.
de Tilly: III, Vorr., 524—528.
Tissot: III, 811.
Tresse: III, Vorr., 810.

Umlauf: III, Vorr., 774 f., 810.

Veronese: III, 528.
Vessiot: III, Vorr., 704, 811.

Waelsch: III, 574.
H. Weber: III, 497.
Weierstrass: I, Vorr., 1, 91.
Werner, III, Vorr., 522, 778, 809.

Żorawski, III, Vorr., 810.

Berichtigungen.

Zu Abschnitt I.

S. 53, Z. 6 v. o. lies: anzuwenden.
S. 125, Z. 3 v. o. lies: $X_j X_k W_\lambda = 0, \ldots$
S. 143, Z. 5 v. o. lies: Gruppe Yf.
S. 145, Z. 1. v. u. lies: er statt es.
S. 195, Z. 9 v. o. statt p_1 lies: $\frac{\partial f}{\partial x_1}$.
S. 245, Z. 2 v. u. lies: auf M regulär verhalten.
S. 292 vgl. Abschn. III, S. 701, Anm.
S. 408, Z. 9 v. o statt: F_n lies $\overline{F}_n$.
S. 436, Z. 11 v. u. statt u^ν lies: u_ν.
S. 442, Z. 16 v. u. statt: $Z_1 f \ldots Z_r f$ lies: $Y_1 f \ldots Y_r f$.
S. 483, Z. 12 v. u. statt: $m = r$ lies: $m = 0$.
S. 484, Z. 3 v. u. statt a^r lies: a_r.

Zu Abschnitt II.

S. 58, Z. 12 v. u. statt Δ lies: D.
S. 240 in Gl. (20) statt: $|P_i P_\varkappa|$, $|X_i X_\varkappa|$ u. $i, \varkappa = 1 \ldots r$
lies: $|P_i P_j|$, $|X_\pi X_\varkappa|$ u. $i, j = 1 \ldots m+q$; $\pi, \varkappa = 1 \ldots m$
S. 433 Z. 17 v. u. lies: Glieder erster Ordnung.
S. 440, Z. 6 v. u. statt: $\mathfrak{z}\sqrt{\mathfrak{y}}$ lies: $\mathfrak{x}\sqrt{\mathfrak{y}}$.
S. 535 Z. 7 v. u. lies: $+ V \frac{\partial U}{\partial z}$.

Zu Abschnitt III.

S. 29, Z. 2 v. u. statt: 1885 lies: 1884.
S. 52, Z. 13 f. v. u. statt: $x_1 = x$, $y_1 = y$ lies: $x_1 = y$, $y_1 = x$.
S. 81, Z. 11 v. o. statt: 1885 lies: 1884.
S. 110, Z. 13 v. o. statt: zr lies: yr.
S. 118 ist unter VI i. d. ersten Reihe d. 2. Gr. zu streichen u. bei d. 1. u. 3. hinzuzufügen: $c \neq 0$.
S. 127, Z. 13 u. 14 v. u. sind x, y, z mit $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ zu vertauschen.
S. 154, Z. 6 v. o. statt: rzr lies: r, zr.
S. 179, Z. 18 v. u. lies: Bewegungen und der Aehnlichkeitstransformationen.
S. 184, Z. 14 v. u. statt: b_2 lies: b_3.
S. 212 unter (2) ist $xp + yq + zr$ zu tilgen.
S. 340, Z. 2 v. u. lies: jedoch bei andrer Gelegenheit noch einmal ...
S. 426, vgl. S. 542.

7 DAY USE
RETURN TO
ASTRONOMY, MATHEMATICS-
STATISTICS LIBRARY
This publication is due on the LAST DATE
and HOUR stamped below.

MAY 1 1 1971

Tel. No. 642-3381

OCT 28 1977

DEC 08 1980

Due end of SUMMER semester
Subject to recall after—

JUL 06 1993

RB17-40m-2,'71
(P2002s10)4188-A-32

General Library
University of California
Berkeley

U.C. BERKELEY LIBRARIES
C037458627